МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М. В. Гольцева, О. Л. Дорошевич

МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ УЧАЩИХСЯ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Минск БГМУ 2019

УДК 51(075.4)-054.6
ББК 22.1я729
Г63

Рекомендовано Научно-методическим советом университета в качестве учебно-методического пособия 21.06.2019 г., протокол № 10

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. физики и методики преподавания физики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка В. Р. Соболь; д-р физ.-мат. наук, проф. каф. физики твердого тела Белорусского государственного университета В. Г. Шепелевич

Гольцева, М. В.

Г63 Математика для иностранных учащихся подготовительного отделения : учебно-методическое пособие / М. В. Гольцева, О. Л. Дорошевич. – Минск : БГМУ, 2019. – 60 с.

ISBN 978-985-21-0436-4.

Включает сведения по элементарной математике и основам дифференциального исчисления. Рассчитано как для аудиторных занятий, так и для самостоятельной работы.

Предназначено для иностранных учащихся подготовительного отделения.

УДК 51(075.4)-054.6
ББК 22.1я729

Учебное издание

Гольцева Марина Владимировна
Дорошевич Ольга Леонидовна

МАТЕМАТИКА
для иностранных учащихся подготовительного отделения

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск М. В. Гольцев
Компьютерная вёрстка Н. М. Федорцовой

Подписано в печать 31.12.19. Формат 60×84/16. Бумага писчая «Снегурочка».
Ризография. Гарнитура «Times».
Усл. печ. л. 3,49. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 170 экз. Заказ 646.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный медицинский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/187 от 18.02.2014.
Ул. Ленинградская, 6, 220006, Минск.

ISBN 978-985-21-0436-4

ЧИСЛА И ВЫЧИСЛЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

Выражение	Знак	Чтение выражения	Действие	Результат
$a + b = c$	Плюс «+»	«а» плюс «бэ» равно «цэ»	Сложение	Сумма
$a - b = c$	Минус «–»	«а» минус «бэ» равно «цэ»	Вычитание	Разность
$a \cdot b = c$	Умножить «·»	«а» умножить на «бэ» равно «цэ»	Умножение	Произведение
$a : b = c$	Разделить «:»	«а» разделить на «бэ» равно «цэ»	Деление	Частное

Порядок арифметических действий в числовом выражении: сначала выполняются действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют возведение в степень, затем умножение или деление, а потом сложение или вычитание. После этого выполняют действия вне скобок в том же порядке.

Например, если нужно найти значение выражения

$$(10 + 2^3 \cdot 3) + 4^3 - (16 : 2 - 1) \cdot 5,$$

то порядок действий таков:

3 1 2 8 6 9 4 5 7

$$(10 + 2^3 \cdot 3) + 4^3 - (16 : 2 - 1) \cdot 5 = 34 + 64 - 35 = 63$$

Действия над целыми числами

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 … — натуральные числа.

+1; +2; +3; … — положительные числа. Положительные числа обозначаются знаком (+) или записываются без знака.

–1; –2; –3; … — отрицательные числа. Отрицательные числа обозначаются знаком (–), читается «минус 1, минус 2, минус 3».

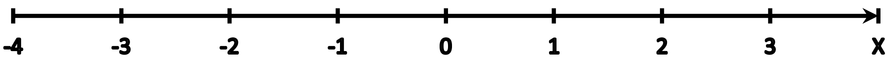


Рис. 1. Положительные и отрицательные числа на числовой оси

Числа (–2) и (+2) — противоположные числа. Противоположные числа имеют разные знаки, но одинаковые модули: $|-2| = |+2|$; (| | — модуль).

2, 4, 6, 8, 10, 2n … — четные числа. 1, 3, 5, 7, 9, 2n + 1 … — нечетные числа.

(>) — больше, чем; (≥) — больше или равно; (<) — меньше, чем; (≤) — меньше или равно.

Число $3 > 2$; число $-3 < -2$; число $2 > 0$; число $-1 < 0$; число $3 > -1$.

$a \geq 0$, $b \leq 0$, $c \geq 0$, $x \leq 0$.

Действия с положительными и отрицательными числами.

- Сложение:
  $(-3) + (-5) = -(3 + 5) = -8$
  $12 + (-5) = 12 - 5 = 7$
  $(-15) + 9 = -15 + 9 = -6$
- Вычитание:
  $(-20) - 39 = (-20) + (-39) = -(20 + 39) = -59$
  $41 - (-17) = 41 + 17 = 58$
  $21 - 38 = 21 + (-38) = -17$
- Умножение:
  $5 \cdot 6 = 30$
  $(-5) \cdot 6 = -30$
  $(-5) \cdot (-6) = 30$
  $5 \cdot (-6) = -30$
  $2 \cdot 0 = 0$
  $-2 \cdot 0 = 0$

Правило
(+) · (+) = (+)
(–) · (+) = (–)
(–) · (–) = (+)
(+) · (–) = (–)

- Деление:
  $12 : 4 = 3$
  $-12 : 4 = -3$
  $-12 : (-4) = 3$
  $12 : (-4) = -3$
  $0 : 12 = 0$
  $0 : (-12) = 0$
  Делить на 0 нельзя.

Правило
(+) : (+) = (+)
(–) : (+) = (–)
(–) : (–) = (+)
(+) : (–) = (–)

Упражнения

Выполнить действия:

$-21 + (-3 - 4 + 5) : (-2) =$

$121 : (-11) + 11 =$

$(-7) \cdot (-7) : 7 + 3 =$

$(-8 + 32) : (-6) - 7 =$

$57 : (-19) + (-16) : (-4) =$

Дроби и действия над ними

Запись числа в виде $\frac{a}{b}$ называется обыкновенной дробью, где a — числитель, b — знаменатель.

Если числитель меньше знаменателя, дробь называется правильной: $\frac{5}{6}$ — это правильная дробь ($a < b$), 5 — числитель, 6 — знаменатель.

Если числитель равен или больше знаменателя, дробь называется неправильной: $\frac{3}{2}$ — это неправильная дробь ($a > b$); 3 — числитель, 2 — знаменатель. Целое число можно записать в виде неправильной дроби. Для этого достаточно представить его в виде дроби, числитель которой равен данному числу, а знаменатель — единица: $5=\frac{5}{1}$; $75=\frac{75}{1}$; $103=\frac{103}{1}$.

Смешанные числа — это числа, запись которых содержит целую и дробную части (где дробная часть — правильная дробь): $2\frac{7}{10}$; $4\frac{3}{5}$.

Десятичные дроби — это дробные числа, представленные в десятичной записи: 3,5; 1,03; 0,321. Десятичные дроби имеют разряды: первый разряд после запятой — десятых, затем сотых, тысячных и т. д. Десятичные дроби можно представить в виде обыкновенных дробей и смешанных чисел:

$$3{,}5=3\frac{5}{10}=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2};\ 0{,}75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4};\ 1{,}03=1\frac{3}{100}=\frac{103}{100}.$$

Прочитайте:

$\frac{1}{2}$ — одна вторая; $\frac{3}{2}$ — три вторых; $\frac{1}{3}$ — одна третья; $\frac{2}{3}$ — две третьих; $\frac{1}{4}$ — одна четвертая; $\frac{7}{4}$ — семь четвертых; $3\frac{1}{5}$ — три целых одна пятая; $21\frac{4}{5}$ — двадцать одна целая четыре пятых; 2,3 — две целых три десятых; 1,23 — одна целая двадцать три сотых; 0,1 — одна десятая; 0,02 — две сотых; 0,125 — сто двадцать пять тысячных.

Действия над дробями:

- Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одинаковое число (это число не равно нулю), то получится дробь, равная данной. Это есть основное свойство дроби.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k},\ k\neq 0;\ \frac{a}{b}=\frac{a:p}{b:p},\ p\neq 0}$$

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10};\ \frac{9}{15}=\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5}$$

- ***Сокращение дроби.***

Сократить дробь — значит разделить числитель и знаменатель на одинаковое число (это число не равно нулю).

$$\frac{33}{66}=\frac{33:11}{66:11}=\frac{3}{6}=\frac{3:3}{6:3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{25}{100}=\frac{25:25}{100:25}=\frac{1}{4}$$

Упражнение

Сократить дроби:

$$\frac{62}{100};\ \frac{22}{66};\ \frac{75}{100};\ \frac{40}{64};\ \frac{21x}{14x}$$

- ***Сложение и вычитание дробей.***

$$\boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d\pm c\cdot b}{b\cdot d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm b}{b}}$$

Пример 1:

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{3}=\frac{5\cdot 3-2\cdot 8}{8\cdot 3}=\frac{15-16}{24}=-\frac{1}{24}$$

Пример 2:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}-\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{5-2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Упражнение

Выполнить действия

$$\frac{1}{10}-\frac{2}{10}-\frac{3}{10};\ \frac{5}{7}-\frac{2}{7}+\frac{1}{7};\ \frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{3}{8};\ \frac{3}{20}-\frac{7}{12}+\frac{4}{15}$$

- ***Умножение дробей.***

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Пример 1:

$$\frac{12}{35}\cdot\frac{20}{27}=\frac{(4\cdot 3)\cdot(4\cdot 5)}{(5\cdot 7)\cdot(3\cdot 9)}=\frac{4\cdot 4}{7\cdot 9}=\frac{16}{63}$$

Пример 2:

$$\frac{33}{40}\cdot\frac{50}{77}=\frac{(11\cdot 3)\cdot(10\cdot 5)}{(4\cdot 10)\cdot(11\cdot 7)}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{15}{28}$$

Чтобы умножить обыкновенную дробь на число, надо числитель умножить на это число, а знаменатель оставить тем же.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}}$$

Упражнение

Выполнить действия:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7};\quad \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right);\quad -\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);\quad \frac{1}{3}\cdot 3;\quad \frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}$$

- ***Деление дробей.***

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}}\qquad \boxed{\frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}}\qquad \boxed{a:\frac{c}{d}=\frac{ad}{c}}$$

Пример:

$$\frac{3}{4}:\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{1}{2};\quad \frac{3}{4}:3=\frac{3}{4\cdot 3}=\frac{1}{4};\quad 3:\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 2}{3}=2$$

Упражнение

Выполнить действия:

$$\frac{3}{5}:\frac{5}{7};\quad \frac{1}{2}:\left(-\frac{1}{3}\right);\quad -\frac{3}{7}:\left(-\frac{1}{2}\right);\quad \frac{1}{3}:3;\quad \frac{2}{7}:\frac{7}{2}$$

Действия со смешанными числами:

- Смешанное число можно представить в виде суммы его целой и дробной частей: $5\frac{7}{8}=5+\frac{7}{8}$; $54\frac{1}{13}=54+\frac{1}{13}$.

И обратно, сумму целого числа и дроби можно представить в виде смешанной дроби (смешанного числа): $2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$.

- Смешанные числа можно переводить в неправильные дроби.

$$\boxed{a\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}}$$

Пример: $5\frac{1}{9}=\frac{5\cdot 9+1}{9}=\frac{46}{9}$; $3\frac{7}{11}=\frac{3\cdot 11+7}{11}=\frac{40}{11}$

- Неправильную дробь можно перевести в смешанное число.

Пример: перевести дробь $\frac{59}{7}$ в смешанное число:

Делим с остатком числитель на знаменатель: 59 : 7 = 8… Значит, 8 — целая часть. Остаток от деления равен 3. Его записываем в числитель. Знаменатель 7 переписываем без изменения: $\frac{59}{7}=8\frac{3}{7}$.

Упражнения

1. Перевести смешанную дробь в неправильную:

$7\frac{1}{4}$; $3\frac{2}{5}$; $2\frac{4}{7}$; $9\frac{1}{10}$

2. Выполнить действия:

$1\frac{1}{10}-\frac{2}{10}-\frac{3}{10}$; $3\frac{5}{7}-\frac{2}{7}+1\frac{1}{7}$; $1\frac{3}{20}-2\frac{7}{12}+3\frac{4}{15}$; $\frac{\frac{5}{7}}{12}$; $\frac{3}{\frac{11}{16}}$; $\frac{\frac{14}{15}}{\frac{12}{25}}$

Действия с десятичными дробями

- ***Сложение и вычитание.***

Десятичная дробь имеет целую и дробную часть. При сложении десятичных дробей целые и дробные части складываются по отдельности.

Десятичные дроби удобнее складывать в столбик, при этом целые части обязательно должны быть под целыми, а дробные — под дробными частями (запятая под запятой).

Пример 1. Найти значение выражения 2,65 + 3,27.

Записываем в столбик данное выражение.

Складываем сотые части: 5 + 7 = 12. Число 12 не поместится в сотой части нашего ответа. Поэтому в сотой части записываем цифру 2, а единицу переносим на следующий разряд.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ +\,2{,}65 \\ \underline{3{,}27} \\ 2 \end{array}$$

Теперь складываем десятые части: 6 + 2 = 8 плюс единица, которая досталась от предыдущей операции, получим 9. Записываем цифру 9 в десятой части нашего ответа.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ +\,2{,}65 \\ \underline{3{,}27} \\ 92 \end{array}$$

Теперь складываем целые части: 2 + 3 = 5. Записываем цифру 5 в целой части нашего ответа и отделяем запятой целую часть от дробной: 2,65 + 3,27 = 5,92.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ +\,2{,}65 \\ \underline{3{,}27} \\ 5{,}92 \end{array}$$

Пример 2. Найти значение выражения 3 – 1,2.

В этом примере из целого числа вычитается десятичная дробь.

Вычитаем десятые части: 0 – 2. От нуля не вычесть число 2. Поэтому нужно занять единицу у соседнего разряда. Заняв единицу у соседнего разряда, 0 обращается в число 10. Теперь можно вычислить десятые части 10 – 2 = 8. Записываем восьмерку в десятой части нашего ответа:

$$\begin{array}{r} -\,3{,}0 \\ \underline{1{,}2} \\ 8 \end{array}$$

Теперь вычитаем целые части. Раньше в целой части располагалось число 3, но мы заняли у него одну единицу. В результате оно обратилось в число 2. Поэтому из 2 вычитаем 1 : 2 – 1 = 1. Записываем единицу в целой части нашего ответа и отделяем запятой целую часть от дробной: 3 – 1,2 = 1,8.

$$\begin{array}{r} -\,3{,}0 \\ \underline{1{,}2} \\ 1{,}8 \end{array}$$

- ***Умножение и деление десятичных дробей.***

Пример 1. Найти значение выражения 2,5 × 1,5.

Перемножим эти десятичные дроби как обычные числа, не обращая внимания на запятые. Получили 375. В этом числе необходимо отделить запятой целую часть от дробной. Для этого нужно посчитать количество цифр после запятой в дробях 2,5 и 1,5. В первой дроби после запятой одна цифра, во второй дроби тоже одна. Итого две цифры. Нам нужно отсчитать две цифры справа налево в числе 375 и поставить запятую.

$$\begin{array}{r} \times\,2{,}5 \\ \underline{1{,}5} \\ 3{,}75 \end{array}$$

а) Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., нужно запятую в десятичной дроби передвинуть *вправо* на столько цифр, сколько нулей в множителе.

Например: 2,88 × 10 = 28,8. Видим, что в множителе 10 один ноль. Значит, в дроби 2,88 передвигаем запятую вправо на одну цифру, получим 28,8.

б) Чтобы умножить десятичную дробь на 0,1, 0,01, 0,001 и т. д., нужно запятую в десятичной дроби передвинуть *влево* на столько цифр, сколько нулей во множителе.

Например, 3,25 × 0,01 = 0,0325. Так как в множителе 0,01 два ноля, в дроби 3,25 передвигаем запятую влево на две цифры, получим 0,0325.

в) Чтобы разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т. д., запятая в делимом переносится *влево* на столько цифр, сколько нулей в делителе.

Например, 2,1 : 1000 = 0,0021. Так как в делителе 1000 три нуля, в делимом 2,1 переносим запятую влево на три цифры, получим 0,0021.

г) Чтобы разделить десятичную дробь на 0,1, 0,01 и т. д., запятая в делимом переносится *вправо* на столько цифр, сколько нулей в делителе.

Например, 2,1 : 0,001 = 2100. Так как в делителе 0,001 три нуля, в делимом 2,1 переносим запятую вправо на три цифры, получим 2100.

Упражнение

Выполнить действия: 0,35 + 0,65; 0,1 – 0,01; 9,5 + 2,8; 0,01 × 100; 0,2 : 0,1.

Пропорции

Верное равенство двух отношений называется пропорцией:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}}$$

Пропорция может быть прочитана так: ***a*** относится к ***b*** так же, как ***c*** относится к ***d***. Числа ***a***, ***b***, ***c***, ***d*** называются членами пропорции, где ***a*** и ***d*** — крайние члены пропорции, ***b*** и ***c*** — средние члены пропорции.

Рассмотрим решение пропорций на конкретных примерах.

1) $\frac{y}{21}=\frac{9}{14}$

Здесь ***y*** — неизвестный крайний член пропорции. Чтобы найти неизвестный крайний член пропорции, произведение средних членов делим на известный крайний член и сокращаем числитель и знаменатель на 7:

$y=\frac{21\cdot 9}{14};\ y=\frac{27}{2};\ y=13{,}5$

2) $\frac{2x-3}{15}=\frac{6}{5}$

Согласно свойству пропорции: $5(2x - 3) = 15 \cdot 6$

Здесь удобно упростить уравнение, разделив обе части на 5:

$2x - 3 = 3 \cdot 6$; $2x = 18 + 3$; $x = 10{,}5$.

Упражнение

Найти x:

$\frac{5}{x} = \frac{6}{12}$; $\frac{5x-5}{6} = 15$; $\frac{2x-3{,}2}{1{,}2} = \frac{5x-6}{0{,}5}$; $\frac{1}{80-10x} = \frac{1}{5}$

Возведение в степень

Степенью числа ***a*** с показателем ***n*** называется произведение ***n*** множителей, каждый из которых равен ***a***:

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ раз}}$$

Число ***a*** **— основание степени**, число ***n*** **— показатель степени**. a^n — *«a»* в степени *«n»*, a^2 — *«a»* в степени «2» (*«a»* квадрат); a^3 — *«a»* в степени «3» (*«a»* куб); $\sqrt[2]{a}$ — квадратный корень из *a*; $\sqrt{\ }$ — знак корня или радикал.

Свойства степени:

$\boxed{0^n = 0}$ $\quad 0^{298} = 0$

$\boxed{1^n = 1}$ $\quad 1^{298} = 1$

$\boxed{a^0 = 1}$ $\quad 5^0 = 1$

$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Пример 1: $\frac{2^{-15} \cdot 2^{10}}{2^{-3}} = \frac{2^3 \cdot 2^{10}}{2^{15}}$

Пример 2: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = 4$

При возведении обыкновенных дробей в отрицательную степень можно пользоваться формулой $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{1}\right)^{2} = \frac{2^2}{1^2} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = -\frac{3^3}{2^3} = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}$$

Умножение степеней с одинаковыми основаниями:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \qquad 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

Деление степеней с одинаковыми основаниями:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}} \qquad 5^5 : 5^2 = 2^{5-2} = 5^3$$

Возведение степени в степень:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \qquad (4^5)^3 = 4^{5 \cdot 3}$$

Степень произведения:

$$\boxed{a^n b^n c^n = (abc)^n} \qquad 2^3 \cdot 1{,}5^3 \cdot (-3)^3 = (2 \cdot 1{,}5 \cdot (-3))^3 = (-9)^3 = -729$$

Степень частного:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^n}{b^n}} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^{3} = \frac{2^3}{5^3}$$

Дробный показатель степени:

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}} \qquad \boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}} \qquad \boxed{a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$$

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2; \;\; 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 4; \;\; 8^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Упражнения

Упростить:

$a \cdot a^3 \cdot a^7$	$0{,}25^2 \cdot 40^2$	$\dfrac{10^5}{2{,}5^5}$
$a \cdot a^0 + a^3 \cdot a^2$	$2\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{27}$	
$c \cdot a^3 \cdot a^7 \cdot a^0 \cdot c^7$	$9\sqrt{8} - 3\sqrt{32}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8 \cdot 27}}$
$m : m^3 \cdot m$		
$5^6 : 5^7$	$2^{-1} : \sqrt[5]{32}$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$
$(2a^3)^2$	$2\sqrt{12} - 3\sqrt{9}$	

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Координатная плоскость

Для обозначения числами точного положения точки на плоскости проведем две перпендикулярные прямые *x* и *y*, которые пересекаются в начале отсчета — точке О. Тем самым на плоскости задана *прямоугольная система координат*, которая превращает обычную плоскость в координатную. Точку О называют началом координат, координатные прямые *x* и *y* называют осями координат (прямая *x* — ось абсцисс, прямая *y* — ось ординат), а прямые углы, образованные осями координат, называют координатными углами.

Координатные углы пронумерованы следующим образом (рис. 2).

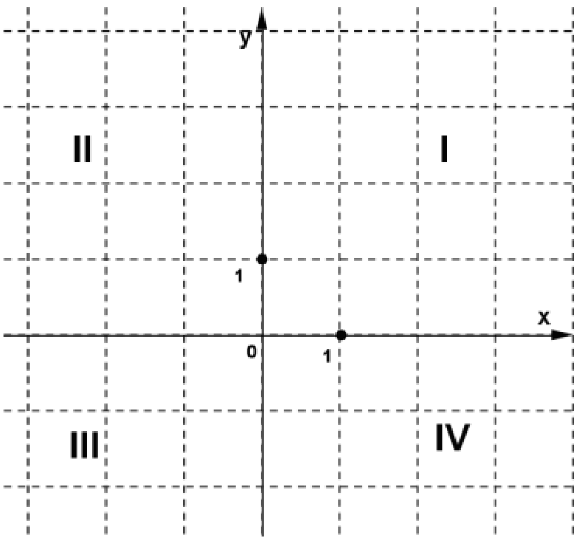


Рис. 2

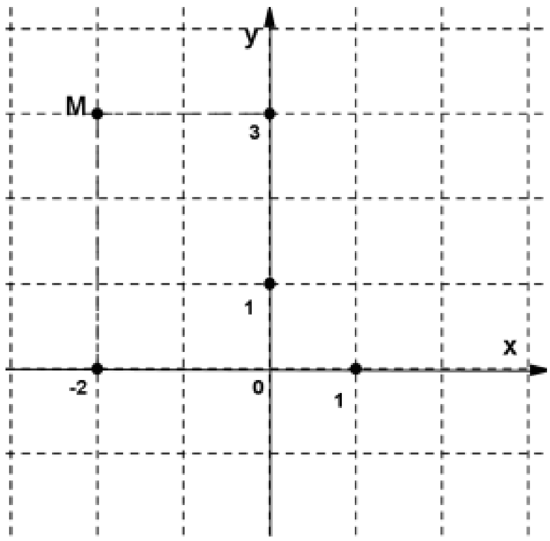


Рис. 3

Изобразим прямоугольную систему координат и отметим в ней произвольную точку М (рис. 3). Проведем через точку М прямую, параллельную оси y. Прямая пересечет ось x в некоторой точке, координата которой равна –2. Эту координату называют абсциссой точки М.

Далее проведем через точку М прямую, параллельную оси x. Прямая пересечет ось y в некоторой точке, координата которой равна 3. Эту координату называют ординатой точки М. Коротко пишем так: М(x; y). Эту пару чисел называют координатами точки М. Имеем М(–2; 3). Число –2 называют абсциссой точки М, а число 3 — ординатой точки М.

Функциональная зависимость

Как в повседневной жизни, так и при решении физических задач мы встречаемся с зависимостями между величинами.

Зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению одной переменной (x) соответствует единственное значение другой переменной (y) называется ***функциональной зависимостью*** или ***функцией***. Запись $y = f(x)$ означает, что y есть функция от x.

Функцию можно задать при помощи уравнения (аналитический способ), графика (графический способ) и при помощи таблиц (табличный способ).

Аналитический способ

Длина окружности $l = 2\pi r$. По этой формуле можно для каждого значения радиуса r найти соответствующее единственное значение l, следовательно, длина есть функция радиуса. Это аналитический способ задания функции.

Табличный способ

x	–4	–2	0	2	4
y	–4	–3	–2	–1	0

Эта функция задана таблично. Числа, стоящие в первой строке, — это значения аргумента, числа во второй строке — значения функции.

Графический способ

График функции — линия на плоскости, которая соответствует уравнению с переменными x и y. На горизонтальной оси (ось абсцисс) откладывается независимая переменная x (аргумент), по вертикальной оси (оси ординат) — зависимая переменная y (функция).

Рассмотрим функцию $y = 0{,}5x – 2$.

Чтобы построить график данной функции, можно использовать таблицу, в первой строке которой записать несколько произвольных значений аргумента, а во второй строке — соответствующие им значения функции.

Если $x = -2$, то $y = 0{,}5 \cdot (-2) - 2 = -3$;
если $x = 0$, то $y = 0{,}5 \cdot 0 - 2 = -2$;
если $x = 2$, то $y = 0{,}5 \cdot 2 - 2 = -1$;
если $x = 4$, то $y = 0{,}5 \cdot 4 - 2 = 0$.

x	–2	0	2	4
y	–3	–2	–1	0

Построив множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению, и соединив их плавной линией, получаем *график функции* (рис. 4).

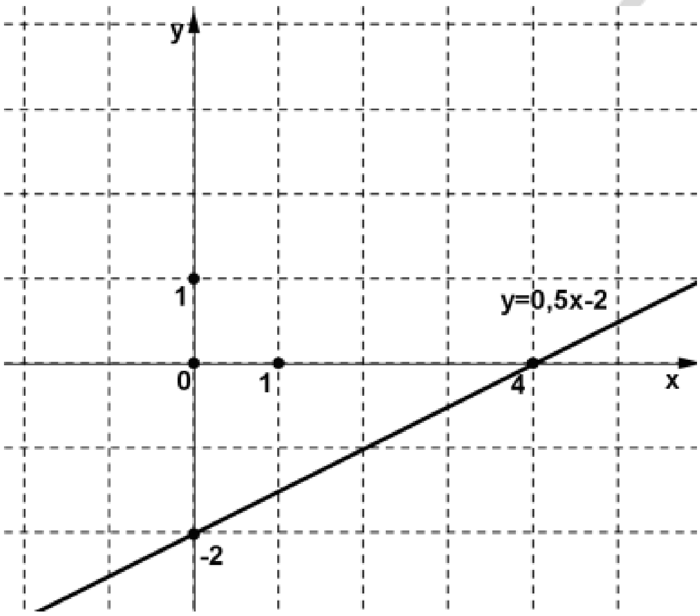
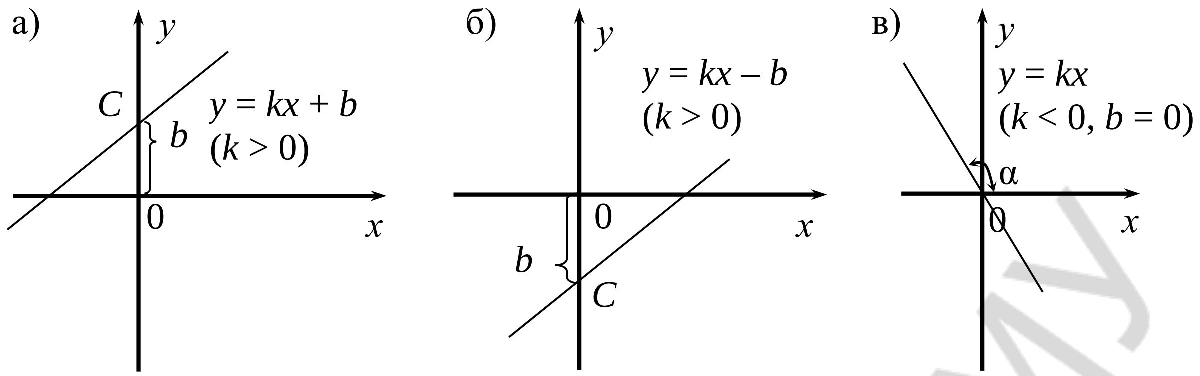


Рис. 4

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ. ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Многие реальные ситуации описываются математическими моделями, представляющими собой линейные функции.

Уравнение прямой: $y = kx + b$ (пример линейной функции), где k — угловой коэффициент, $k = \mathrm{tg}\alpha$, α — угол наклона прямой к положительному направлению оси Оx, b — ордината точки пересечения прямой с осью координат.



Графики а) и б): прямые $y = kx + b$ и $y = kx - b$ пересекают ось Оy на расстоянии ОС = b.

Коэффициент k влияет на наклон графика. Чем больше k по модулю (то есть несмотря на знак), тем «круче» (под большим углом к оси Оx) расположена прямая. Если $k > 0$, график наклонен вправо, при $k < 0$ — влево, при $k = 0$ прямая располагается параллельно оси абсцисс.

Выберем на графике две точки А и В (рис. 5). Для простоты выберем точку A на пересечении графика с осью ординат. Точка В — в произвольном месте прямой, пусть ее координаты равны (x; y). Рассмотрим прямоугольный треугольник АВС, построенный на отрезке АВ как на гипотенузе. Из рисунка видно, что АС = x, ВС = $y - b$.

Подставим $y = kx + b$ в ВС:

ВС = $y - b = kx + b - b = kx$.

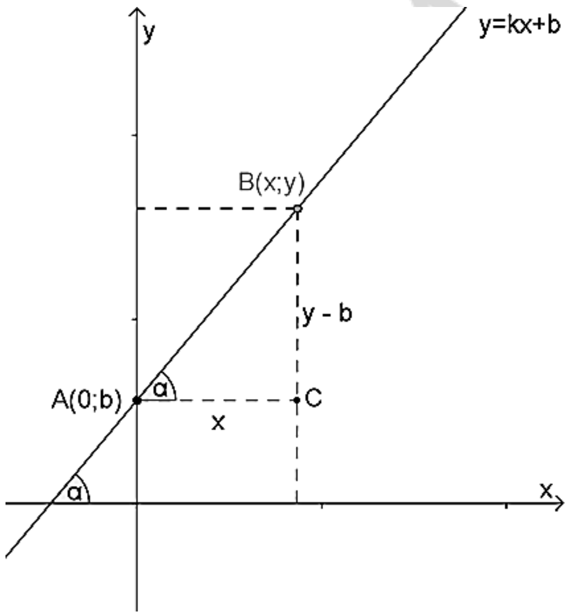


Рис. 5

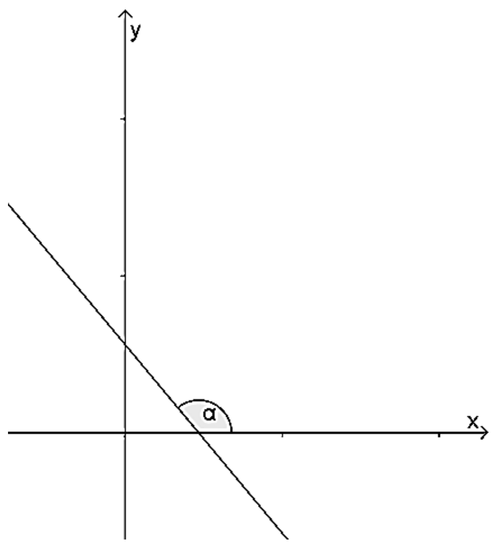


Рис. 6

Получается, что BC = $k \cdot$ AC $\Rightarrow k$ = BC / AC = tgα.

Итак, коэффициент k равен тангенсу угла наклона графика, то есть угла между графиком и осью абсцисс. Именно поэтому коэффициент k обычно называют угловым коэффициентом.

В случае, когда $k < 0$, tgα < 0, что соответствует тупому углу (рис. 6).

Линейные уравнения

Уравнение вида ***ax* = *b***, где ***a*** и ***b*** — числа (***a* — коэффициент перед переменной, *b* — свободный член**), а ***x*** — переменная, называется линейным уравнением с одной переменной. Такое уравнение может:

– иметь единственный корень (если $a \neq 0$, то $x = b/a$);

– не иметь корней (если $a = 0$, $b \neq 0$, то $0 \cdot x = b \Rightarrow$ корней нет);

– иметь бесконечно много корней (если $a = 0$, $b = 0$, то $0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ корнем является любое число).

Пример. Решите уравнение $6x - 2(x + 7) = -(x + 4)$.

1. Раскроем скобки: $6x - 2x - 14 = -x - 4$.

2. Переносим слагаемые с переменной в одну часть уравнения, а без переменной — в другую (не забываем поменять знак у перенесенных слагаемых на противоположный): $6x - 2x + x = 14 - 4$.

3. Приводим подобные слагаемые: $5x = 10$. Уравнение приведено к линейному виду ***ax* = *b***.

4. Решим полученное линейное уравнение: $x = 10 : 5 = 2$.

Упражнения

1. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с положительным направлением оси Оx следующие углы:

а) 45°; б) 0°; в) 135°.

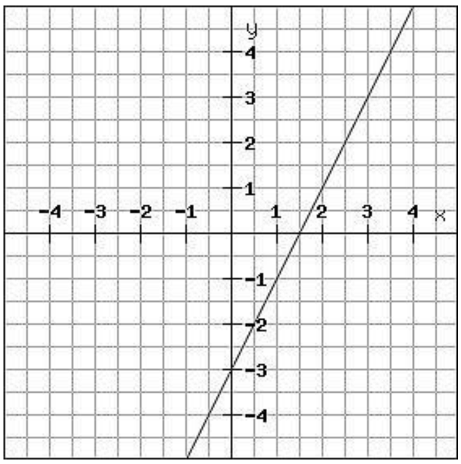
2. График какой функции изображен на рисунке?

а) $y = -3x + 2$;

б) $y = 1{,}5x - 3$;

в) $y = -2x + 1$;

г) $y = 2x - 3$.



3. Построить прямые: а) $y = -2x$; б) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = 3x + 2$.

4. Решить уравнения:

$7 - 2x = 8;$

$6x - 11 = 4x - 7;$

$3x - (x - 14) = 5;$

$0{,}5(6x - 0{,}8) = \frac{1}{6}(3x + 4{,}2).$

5. Даны прямые $y = 4x - 2$ и $y = -3x + 6$. Найти точки пересечения прямых с осями координат.

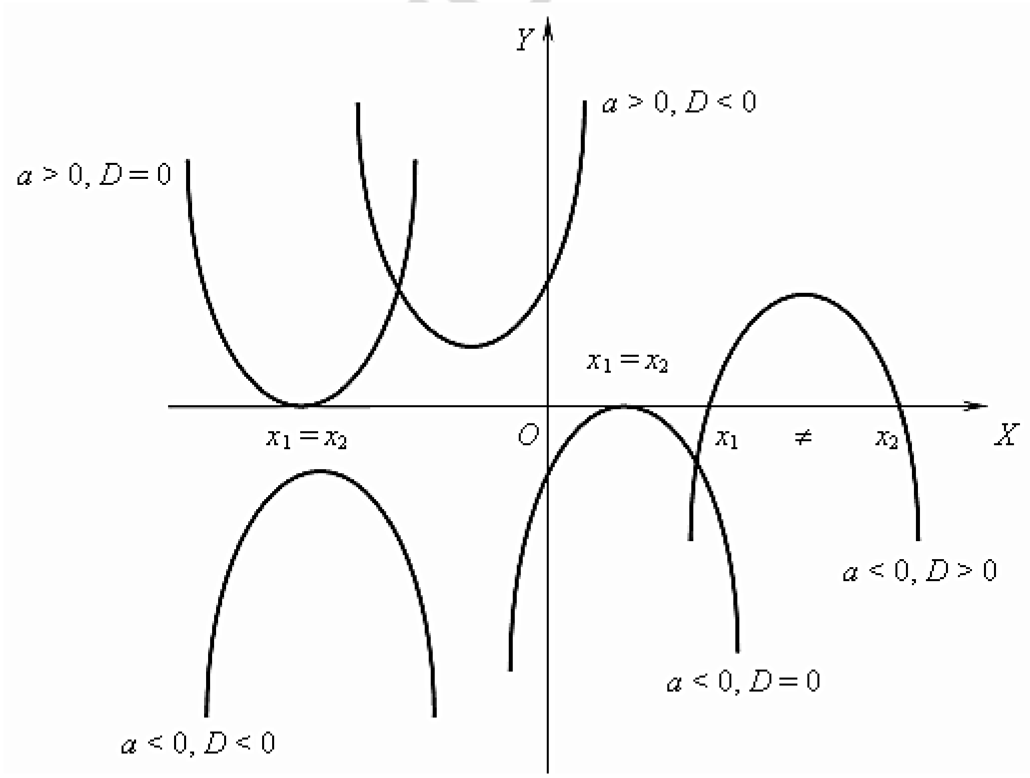
6. Найти координаты пересечения графиков двух функций:

$\begin{cases} y = -x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = -2x + 8 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$

7. График функции $y = kx$ составляет угол 45° с осью Оx. Найти значение k.

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — числа, причем $a \neq 0$, называется квадратичной. Графиком квадратичной функции является *парабола*.



Параметр *a* определяет направление ветвей параболы: если $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, то ветви направлены **вверх**, если $\boldsymbol{a} < \mathbf{0}$, то ветви направлены **вниз**.

Параметр ***c*** указывает, в какой точке парабола пересекает ось О*y* (рис. 7).

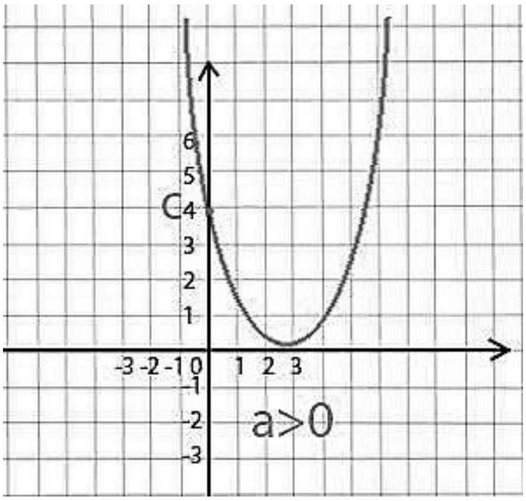


Рис. 7

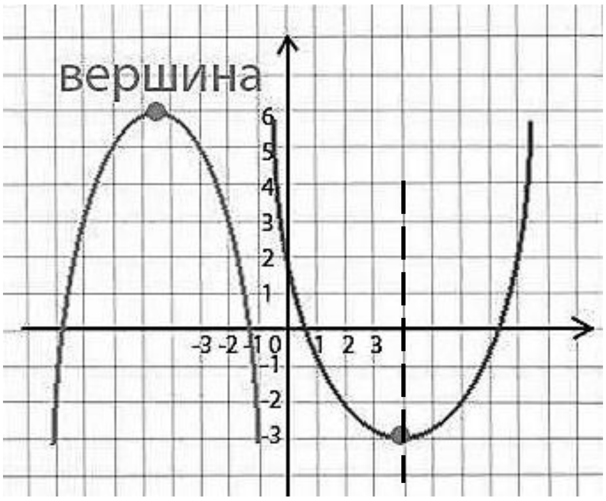


Рис. 8

Чтобы построить график квадратичной функции, необходимо:

1) вычислить координаты вершины параболы — $\boldsymbol{x_0 = -b/2a}$ и $\boldsymbol{y_0}$, которую находят, подставив значение $\boldsymbol{x_0}$ в формулу функции;

2) отметить вершину параболы на координатной плоскости, провести ось симметрии параболы (рис. 8);

3) определить направление ветвей параболы;

4) отметить точку пересечения параболы с осью О*y* (при $x = 0$);

5) составить таблицу значений, выбрав необходимые значения аргумента *x*.

Пример. Постройте график функции

$y = x^2 - 2x - 1$

1. Вычислим координаты вершины:

$x_0 = -b/2a = 2/2 = 1;$

$y_0 = 12 - 2\cdot 1 - 1 = -2.$

2. Точка с координатами (1; –2) — вершина параболы. Проведем через эту точку ось симметрии (рис. 9).

3. Ветви параболы направлены вверх, т. к. $a = 1 > 0$.

4. Парабола пересекает ось О*y* в точке (0; –1).

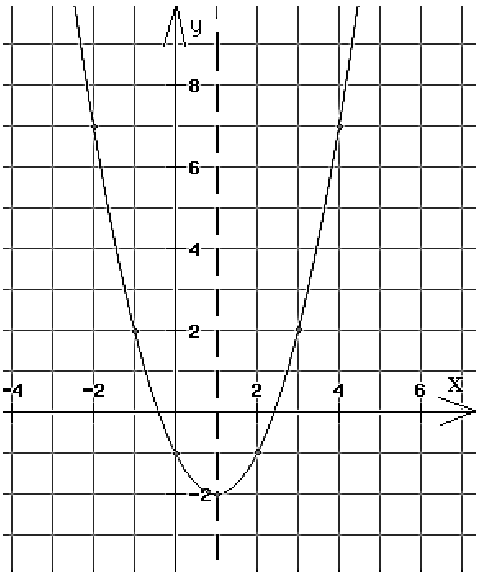


Рис. 9

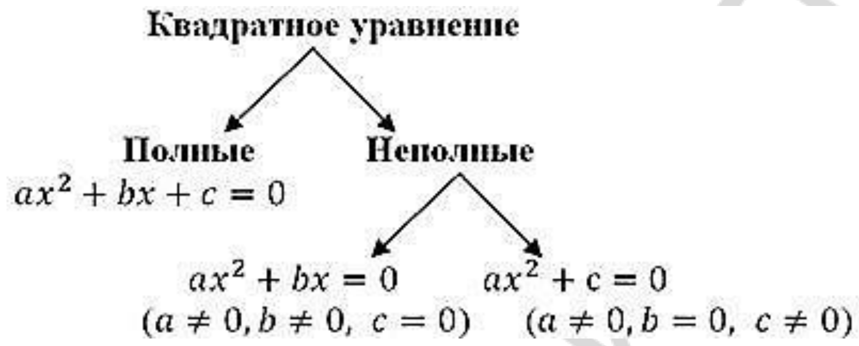
5. Составляем таблицу и строим правую часть параболы.

x	1	2	3	4
y	–2	–1	2	7

Далее симметрично строим левую часть параболы.

Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — неизвестная величина, a, b, c — данные числа ($a \neq 0$), называют *квадратным*.



Пример полного квадратного уравнения: $2x^2 + x – 1 = 0$.

Решение **полных квадратных уравнений** сводится к нахождению дискриминанта.

Квадратное уравнение может иметь:

а) два решения;

б) одно (в этом случае говорят, что оба решения совпадают);

в) ни одного решения (решения мнимые).

Формулы решения квадратных уравнений

$ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x_{1,\,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{Д}}{2a}$;

$Д = b^2 – 4ac$ — дискриминант.

Если $Д > 0$, то квадратное уравнение имеет два действительных различных решения (корни).

Пример 1.

$2x^2 + x – 1 = 0$, $\quad x_{1,\,2} = \dfrac{-1^2 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$;

$x_1 = \dfrac{1}{2}$; $\quad x_2 = –1$.

Если Д = 0, то квадратное уравнение имеет действительные одинаковые решения (два решения совпадают).

Пример 2.

$x^2 - 6x + 9 = 0$, $\quad x_{1,\,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3.$

Если Д = $b^2 - 4ac < 0$, то квадратное уравнение имеет два мнимых решения.

Пример 3.

$3x^2 - x + 5 = 0$, $\quad x_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-59}}{6}.$

Если $a = 1$, то уравнение в приведенной форме: $x^2 + px + q = 0$.

В случае приведенного квадратного уравнения ($a = 1$): $x^2 + px + q = 0$ решение можно найти по теореме Виета:

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = +q$.

Пример 4.

$x^2 - 7x - 8 = 0$. $\quad$ Д = $b^2 - 4ac = 49 + 4 \cdot 8 = 81 > 0$

$x_1 + x_2 = 7$;

$x_1 \cdot x_2 = -8$;

$x_1 = -1$; $x_2 = +8$.

Неполные квадратные уравнения проще решать, используя следующие методы.

Рассмотрим неполное квадратное уравнение $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$, где $\boldsymbol{c = 0}$.

Пример: $3x^2 + 6x = 0$. Чтобы решить такое уравнение, необходимо переменную $\boldsymbol{x}$ вынести за скобки. А потом каждый множитель приравнять к нулю и решить уже простые уравнения.

Решение. Выносим переменную x за скобку: $x(3x + 6) = 0$. Приравниваем каждый множитель к нулю: $x_1 = 0$ или $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6$. Делим все уравнение на 3, чтобы получить у переменной x коэффициент, равный 1. $x = (-6) / 3 \Rightarrow x_2 = -2$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.

Рассмотрим неполное квадратное уравнение $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$, где $\boldsymbol{b = 0}$.

Пример 1: $x^2 + 5 = 0$; $x^2 = -5 \Rightarrow x_{1,\,2} = \pm\sqrt{-5}$.

Ответ: нет решения.

Пример 2: $3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 12/3 \Rightarrow x^2 = 4$;

$4 > 0 \Rightarrow$ есть: $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{4}$.

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$.

Упражнения

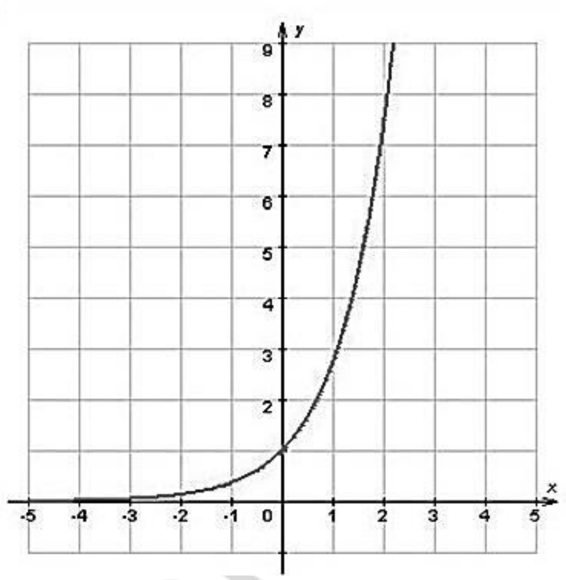
1. Построить графики функций $y = -2x^2 + 2$; $y = -3x^2$; $y = (x - 2)^2 + 1$.
2. Решить квадратные уравнения:

   $x^2 - x - 2 = 0$; $-3x^2 - 6x - 3 = 0$; $x^2 + 4x + 7 = 0$; $x^2 - 4x = 0$;

   $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$; $16x^2 + 40x + 32 = 0$; $y = (x - 3)^2$; $y = x^2 - 4$.

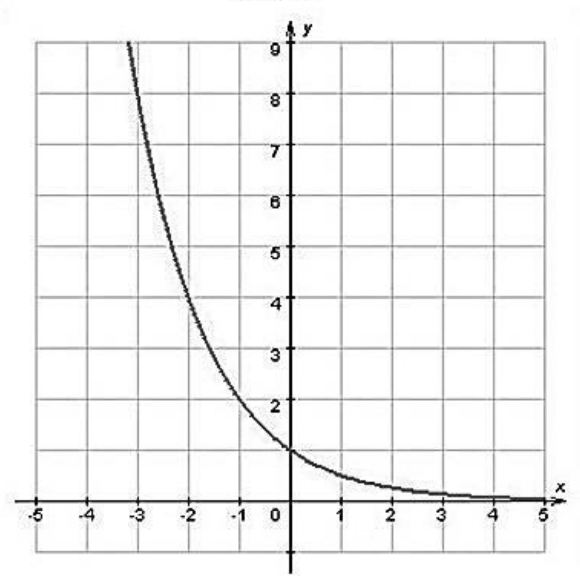
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ ГРАФИК. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ ГРАФИК

$a>1$



функция возрастает на всей области ее определения

$0<a<1$



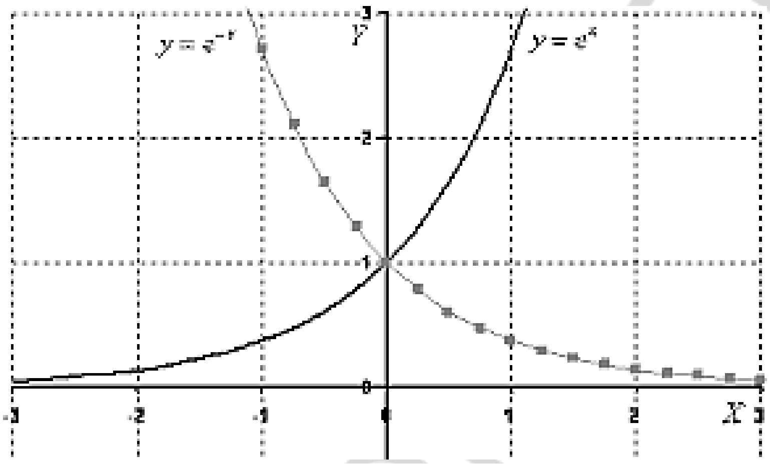
функция убывает на всей области ее определения

Функция $y = a^x$, где $a > 0$ — *показательная функция.*

Многие физические, химические, биологические, экономические, социологические процессы описываются с помощью показательных функций. Например, закон естественного роста (рост числа бактерий, увеличение денежного вклада при постоянном процентном приращении и т. д.), процессы образования и распада вещества, затухающие колебания, охлаждение тела, радиоактивный распад описываются с помощью показательной функции.

Пример: колония живых организмов — бактерий — растет в результате размножения. Число организмов N по истечении времени t определяется формулой $N = na^t$, где n — число бактерий в начальный момент времени, a — константа.

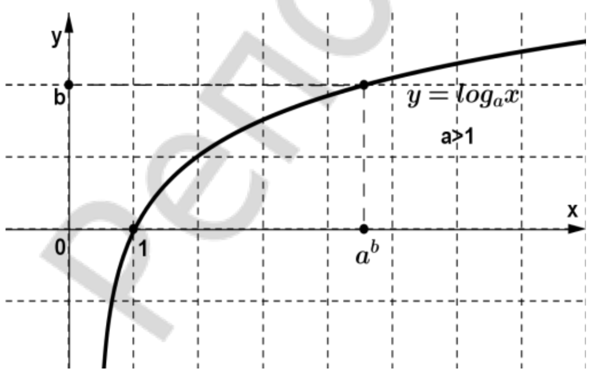
Показательная функция $y = a^x$, где $a = e$ (e = 2,71828 — число Непера), называется экспоненциальной функцией $y = e^x$. Функции вида $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ описывают многие биологические процессы.



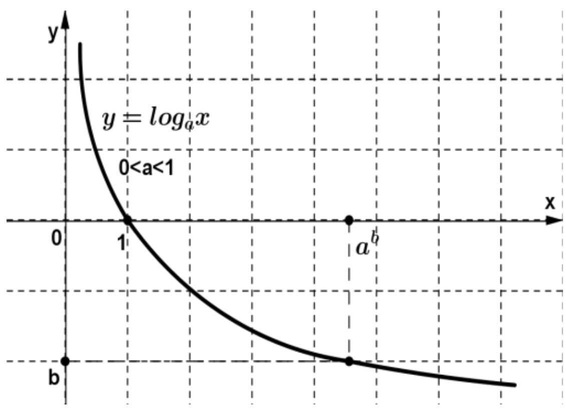
ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЕ ГРАФИК

Логарифмическая функция $y = \log_a x$

Если между величинами a, y, x имеет место соотношение $a^y = x$, то нахождение показателя степени y есть *логарифмирование*. y называют *логарифмом* числа x по основанию a. График функции $y = \log_a x$, $a > 1$ и $0 < a < 1$:



функция возрастает



функция убывает

а) если основание $a = 10$, то логарифм *десятичный*: $y = \lg x$;

б) если $a = e$ ($e = 2{,}71828$ — число Непера) — логарифм *натуральный*: $y = \ln x$.

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a b = c \\ a>0, \neq 1 \end{array}} \quad <=> \quad \boxed{\begin{array}{l} a^c = b \\ b > 0 \end{array}}$$

Основное логарифмическое тождество:

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{\log_a b} = b \\ a>0,\ a\neq 1,\ b > 0 \end{array}}$$

Основные свойства логарифмов

1) $\log_a 1 = 0$;

2) $\log_a a = 1$;

3) логарифм произведения $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$, где x_1, $x_2 > 0$;

4) логарифм частного $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2$, где x_1, $x_2 > 0$;

5) логарифм степени $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$, где $x > 0$;

6) логарифм по основанию в степени $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$, где $x > 0$;

7) $a^{\log_a x} = x$, где $x > 0$;

8) связь между натуральным и десятичным логарифмами одного и того же числа N

$$\ln N = \lg N \cdot \frac{1}{\lg e} = \lg N \cdot \frac{1}{0{,}4343} = \lg N \cdot 2{,}303.$$

Пример 1. Вычислите логарифм $\log_5 25$.

Решение. Несложно заметить, что $25 = 5^2$, это позволяет вычислять первый логарифм: $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$.

Пример 2. Вычислите логарифм $\log_7 \sqrt[3]{49}$.

Решение. Число $\sqrt[3]{49}$ можно представить в виде степени числа 7: $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$. Следовательно, $\log_7 \sqrt[3]{49} = \log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$.

Упражнения

1. Найти логарифмы:

$\log_6 2 + \log_6 18$; $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$; $64^{\log_8 \sqrt{3}}$;

$\lg 4 + \lg 25$; $\log_4 8$; $\log_4 32 + \log_4 14 - \log_4 7$;

$\lg 3000 - \lg 3$; $6 \cdot \log_7 \sqrt[3]{7}$; $2 \lg 0{,}1 + 3 \ln e^2$;

$\ln e^5$; $8^{2\log_8 3}$; $\ln\frac{1}{2e} + \ln 2e^2$.

2. Найти *x:*

$\log_3(2x + 1) = 2$; $\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3$; $\log_{(x-2)} 9 = 2$; $e^x = 2$.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Тригонометрические функции (от древнегреческих слов «треугольник» и «измеряю») — это математические функции угла. Они важны при изучении геометрии, а также при исследовании периодических процессов. Тригонометрические функции определяют как **отношения сторон прямоугольного треугольника** или длины определенных отрезков в единичной окружности.

Тригонометрия — это раздел математики, в котором изучаются зависимости между величинами углов и длинами сторон треугольников. С этой наукой мы сталкиваемся не только на уроках математики, но и в жизни. Тригонометрия встречается в таких науках, как физика, биология, медицина, огромное число процессов в реальной жизни обладают периодичностью или(и) гармоничностью. При описании процессов гармонических колебаний — качание маятника, акустика, оптика, электричество и магнетизм — мы имеем дело с тригонометрическими функциями.

Формулу $\boldsymbol{x = A \sin(\omega t + \alpha)}$ называют законом (или уравнением) гармонических колебаний. В этом уравнении все величины — A, ω, α — имеют определенный физический смысл: A (или –A, если A < 0) — амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия); ω — частота колебаний; α — начальная фаза колебаний.

К тригонометрическим относятся следующие 6 функций: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс и косеканс. Для каждой из них существует обратная тригонометрическая функция.

Геометрическое определение тригонометрических функций удобно ввести с помощью единичного круга. На рис. 10 изображена окружность с радиусом $r = 1$, называемая единичной окружностью. На окружности обозначена точка M(x, y). Угол между радиус-вектором OM и положительным направлением оси Ox равен α.

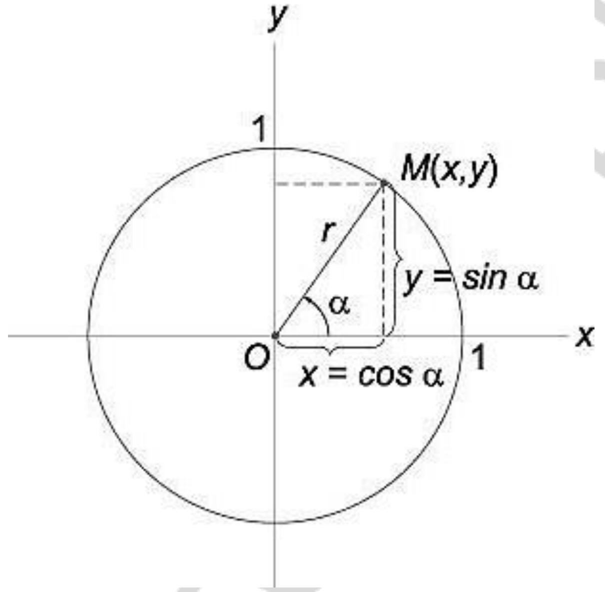


Рис. 10. Единичная окружность

Синусом угла α называется отношение ординаты y точки M(x, y) к радиусу r: $\sin\alpha = y/r$. Поскольку r = 1, то синус равен ординате точки M(x, y).

Косинусом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x, y) к радиусу r: $\cos\alpha = x/r$.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты y точки M(x, y) к ее абсциссе x: $\mathrm{tg}\alpha = y/x$, $x \neq 0$.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы x точки M(x, y) к ее ординате y: $\cot\alpha = x/y$, $y \neq 0$.

В единичном круге проекции x, y точки M(x, y) и радиус r образуют прямоугольный треугольник, в котором x, y являются катетами, а r — гипотенузой. Поэтому приведенные выше определения тригонометрических функций в приложении к прямоугольному треугольнику формулируются таким образом:

1) синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе;

2) косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе;

3) тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему;

4) котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Единица измерения плоских углов — градус (1°) или радиан (1 рад). Градус содержит в себе 60 минут, а минута — 60 секунд.

Радиан определяется как угловая величина дуги, длина которой равна ее радиусу. Один оборот имеет 360°. Таким образом, величина полного угла равна 2π радиан.

Величина угла, выраженного в радианах, определяется как отношение длины окружности к радиусу окружности. Радиан является безразмерной величиной, поэтому обозначение (рад) зачастую опускается.

Один радиан равен 180/π градусов. Зависимость между градусами и радианами выражается формулой:

$$1\ \mathrm{rad} = 1\cdot\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}2958^\circ \qquad 1^\circ = 1\cdot\frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}0175\ \mathrm{rad}.$$

Таким образом, чтобы преобразовать из радианов в градусы надо умножить на 180/π.

Определение тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника.

Возьмем произвольный прямоугольный треугольник, содержащий угол ***α*** для определения тригонометрических функций угла ***α***. Установим стороны этого треугольника следующим образом:

– гипотенуза — сторона, противоположная прямому углу (самая длинная сторона в треугольнике), сторона ***c*** в этом случае;

– противоположная сторона — это сторона, которая лежит напротив угла ***α***; например, сторона ***a*** противоположна углу ***α***;

– смежная сторона — это сторона, которая примыкает к углу стороной; например, сторона ***b*** примыкает к углу ***α*** (рис. 11).

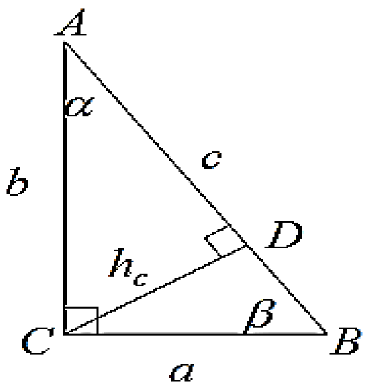


Рис. 11. Произвольный прямоугольный треугольник

Синус угла $\boldsymbol{\alpha}$ — отношение длины противоположной стороны $\boldsymbol{a}$ к длине гипотенузы $\boldsymbol{c}$: $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$.

Косинус угла $\boldsymbol{\alpha}$ — отношение длины смежной стороны $\boldsymbol{b}$ к длине гипотенузы $\boldsymbol{c}$: $\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$.

Синус одного острого угла в треугольнике равен косинусу второго: $\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\beta} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} = \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$.

Тангенс угла $\boldsymbol{\alpha}$ — отношение длины противоположной стороны $\boldsymbol{a}$ к длине смежной стороны $\boldsymbol{b}$: $\mathbf{tg}\ \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Котангенс угла $\boldsymbol{\alpha}$ — отношение длины смежной стороны $\boldsymbol{b}$ к длине противоположной стороны $\boldsymbol{a}$: $\mathbf{tg}\ \boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

Изучая данный правый прямоугольный треугольник и применяя теорему Пифагора, легко увидеть, что в тригонометрической форме теорема Пифагора может быть записана как тождество: **$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Данное равенство называется основным тригонометрическим тождеством.**

Соотношения между основными тригонометрическими функциями представлены в табл. 1.

Таблица 1

Соотношения между основными тригонометрическими функциями

Функция	Обозначение	Соотношение
Синус	sin	$\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
Косинус	cos	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
Тангенс	tg или tan	$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$
Котангенс	ctg или cot	$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

Тригонометрические функции основных углов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Тригонометрические функции основных углов

α (рад)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
α (°)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tg α	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	–1	$-\sqrt{3}$	–

Число 2π является наименьшим положительным периодом для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, т. е. $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$; $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$.

Функция синус и ее график: $y = \sin x$, область значений: $-1 \le \sin x \le 1$.

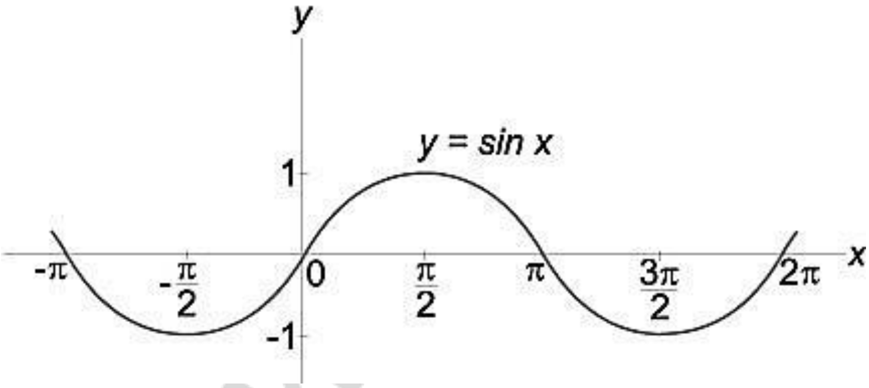


Рис. 12. График функции $y = \sin x$

Функция косинус и ее график: $y = \cos x$, область значений: $-1 \le \cos x \le 1$.

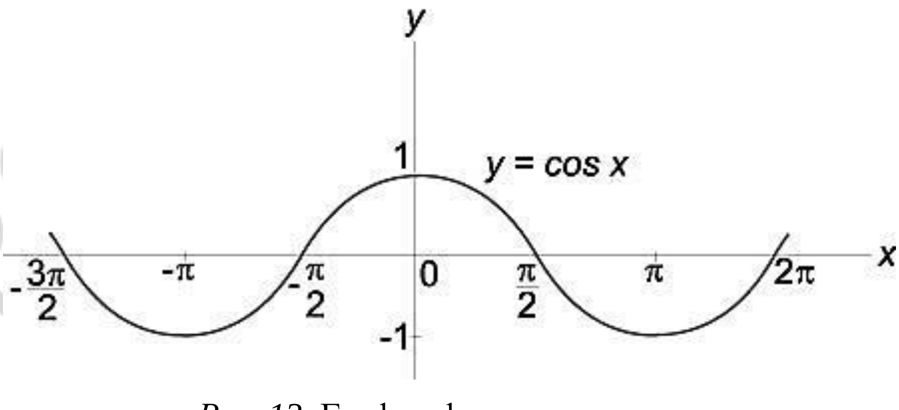


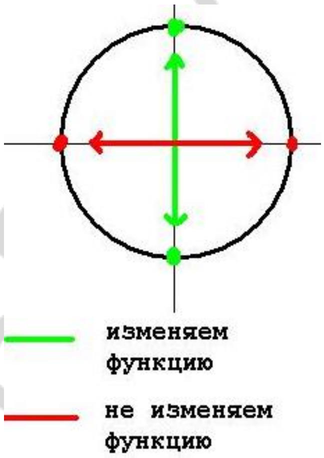
Рис. 13. График функции $y = \cos x$

Формулы приведения

Формулы приведения используются для того, чтобы значения тригонометрических функций от аргументов вида (90° ± α), (180° ± α) выразить через значения sin α, cos α, tg α и ctg α.

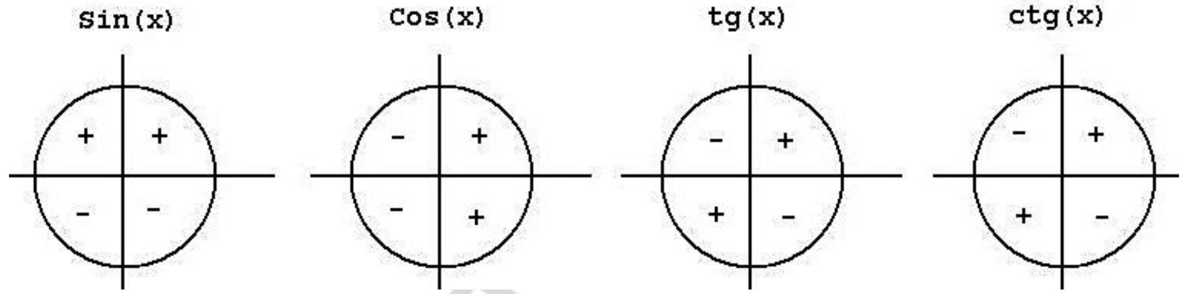
Для использования формул приведения существует два правила.

1. Если угол можно представить в виде (90° ± α), то название функции меняется с sin на cos, cos на sin, tg на ctg, ctg на tg. Если же угол можно представить в виде (180° ± a), то название функции остается без изменений.



2. Знак приведенной функции остается прежним. Если исходная функция имела знак «плюс», то и приведенная функция имеет знак «плюс». Если исходная функция имела знак «минус», то и приведенная функция имеет знак «минус».

На рисунке ниже представлены знаки основных тригонометрических функций в зависимости от четверти.



Пример: вычислить sin 150°.

Воспользуемся формулами приведения. Sin 150° находится во второй четверти, по рисунку видно, что знак sin в этой четверти равен +. Значит, у приведенной функции тоже будет знак «плюс». Мы применили второе правило.

150° = 90° + 60°. 90° — это π/2. То есть имеем дело со случаем π/2 + 60, следовательно, по первому правилу меняем функцию с sin на cos. В итоге получаем: sin 150° = cos 60° = 0,5.

Упражнения

1. Построить графики функций:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \sin 3x$.

2. Вычислить:

а) cos 120°; б) cos 135°; в) sin 120.

ВЕКТОРЫ

Геометрический вектор (или просто вектор) — это геометрический объект, который имеет длину или величину и направление.

Таким образом, вектором можно назвать направленный отрезок, для которого указано его начало и конец (рис. 14). В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка — точка B. Сам вектор обозначен через $\overrightarrow{AB}$.

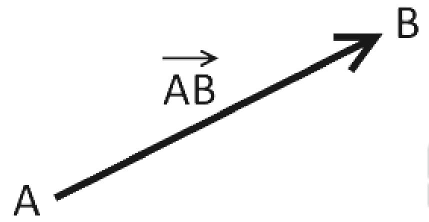


Рис. 14. Вектор $\overrightarrow{AB}$

Векторы играют важную роль в физике. Скорость и ускорение движущегося объекта, а также силы, действующие на него, описываются векторами. Хотя большинство других физических величин не представляют расстояния (за исключением, например, положения и перемещения), их величина и направление все еще могут быть представлены длиной и направлением стрелы. Математическое представление физического вектора зависит от системы координат, используемой для его описания.

Способы записи векторов:

1. Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ и т. д. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку — начало вектора, а вторая буква — точку — конец вектора.

2. Векторы также записывают маленькими латинскими буквами: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и т. д. В частности, наш вектор $\overrightarrow{AB}$ можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой $\vec{a}$.

Длиной или **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора обозначается знаком модуля: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\vec{a}\right|$.

Вектор можно отложить от любой точки (рис. 15):

Такие векторы мы привыкли называть равными (определение равных векторов будет дано ниже), но чисто с математической точки зрения это ОДИН И ТОТ ЖЕ ВЕКТОР.

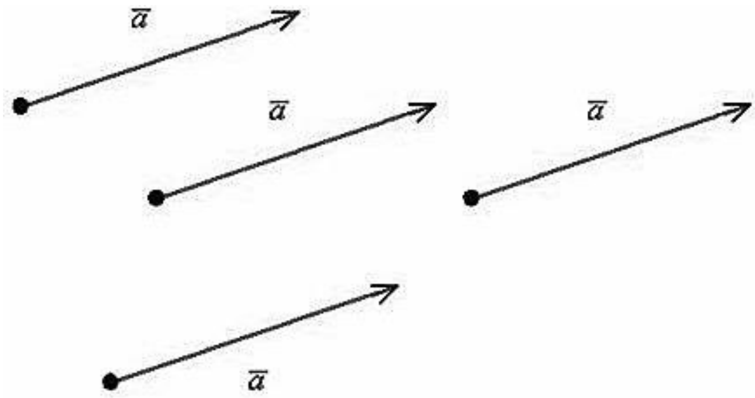


Рис. 15

ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРНОЕ СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ

Векторы можно складывать по правилу треугольника или параллелограмма.

1. *Сложение векторов по правилу треугольников*.

Рассмотрим два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

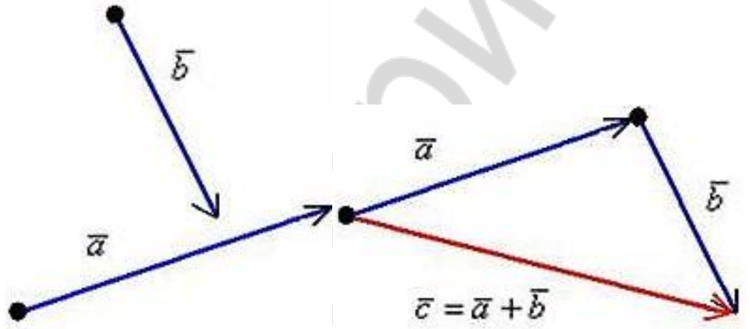


Рис. 16. Векторная сумма $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ по правилу треугольника

Требуется найти сумму данных векторов $\vec{a} + \vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ переносим параллельно так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Суммарный (результирующий) вектор $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}$ соединяет начало вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ с концом вектора $\vec{\boldsymbol{b}}$ (рис. 3).

2. *Сложение векторов по правилу параллелограмма*.

Вектор $\vec{\boldsymbol{b}}$ переносим параллельно себе так, чтобы его начало совпадало с началом вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ и на этих векторах, как на сторонах достраиваем параллелограмм. Диагональ этого параллелограмма является суммирующим или результирующим вектором $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}$ (рис. 17).

Правило параллелограмма особенно полезно, когда необходимо представить вектор сумм сил, которые приложены к одной и той же точке, который применяется к обоим терминам — то есть изобразить все три вектора, имеющих общее происхождение.

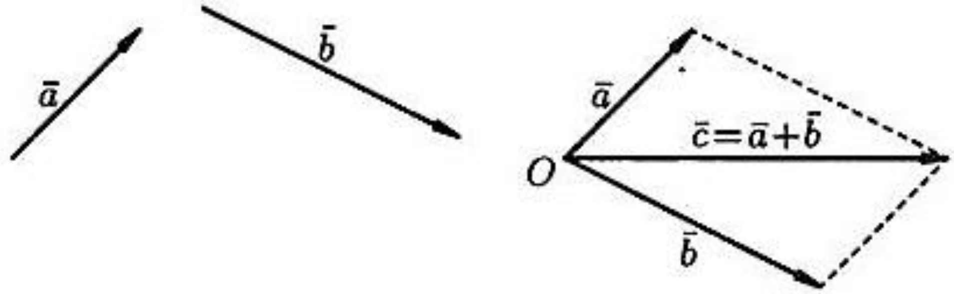


Рис. 17. Векторная сумма $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ по правилу параллелограмма

3. *Сложение векторов по правилу многоугольника.*

Требуется найти сумму нескольких векторов $(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4})$. Для этого вектор $\overrightarrow{a_2}$ переносим параллельно так, чтобы его начало совпадало с концом вектора $\overrightarrow{a_1}$, затем вектор $\overrightarrow{a_3}$ переносим параллельно так, чтобы его начало совпадало с концом вектора $\overrightarrow{a_2}$ и т. д. Суммарный (результирующий) вектор $\vec{c}=\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_4}$ соединяет начало вектора $\overrightarrow{a_1}$ с концом вектора $\overrightarrow{a_4}$ (рис. 18).

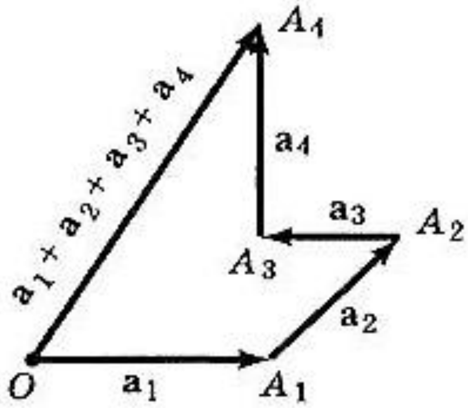


Рис. 18. Сумма *n* векторов $\vec{a}$ по правилу многоугольника

ВЕКТОРНОЕ ВЫЧИТАНИЕ

Вычитание двух векторов может быть геометрически определено следующим образом: чтобы вычесть $\vec{b}$ из $\vec{a}$, надо поместить начальные точки векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в одной точке, а затем нарисовать стрелку от начала вектора $\vec{b}$ до начала вектора $\vec{a}$. Эта новая стрелка представляет собой вектор $\vec{a}-\vec{b}$, как показано на рис. 19.

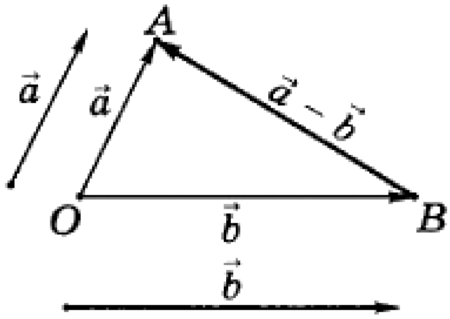


Рис. 19. Вычитание векторов

Вычитание двух векторов также может быть выполнено путем добавления противоположности второго вектора к первому вектору: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА КООРДИНАТНУЮ ОСЬ

Проекция вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ на ось *x* представляет собой число, равное размеру отрезка A1B1 оси *x*, где точки А*x* и В*x*, А*y* и В*y* — проекции точек А и В на оси О*X* и О*У* (рис. 20). Чтобы найти проекцию, надо опустить перпендикуляры с начала и конца вектора на оси О*X* и О*У*.

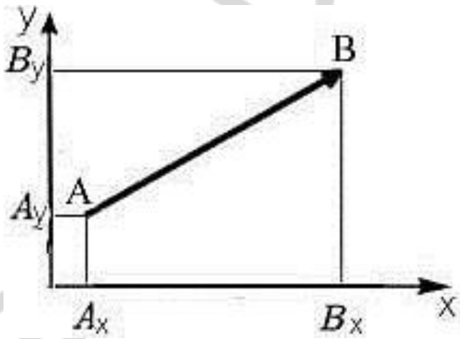


Рис. 20. Проекция вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ на ось *x*

Проекция вектора на координатную ось — это скалярная величина. Знак проекции зависит от направления вектора относительно координатной оси.

Проекция может быть положительной или отрицательной. Проекция вектора $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ на некоторую ось называется положительной, если направление проекции совпадает с направлением оси от начала проекции до ее конца.

$$\mathrm{AB}_x=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos(\overrightarrow{\mathrm{AB}},x)$$

Представим $\boldsymbol{C_x}$ как проекцию вектора $\vec{c}$ на ось x (рис. 21).

$$C_x = |\vec{c}|\cos(\vec{c}, x)$$

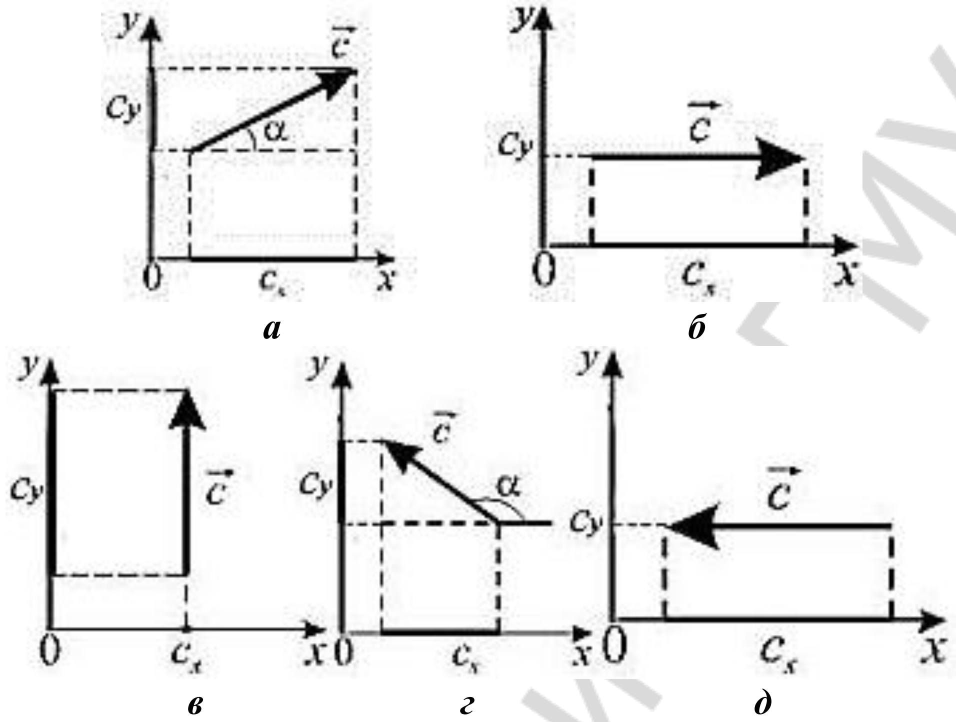


Рис. 21. Проекции вектора $\vec{c}$ на оси x и y

а) если $\mathbf{0° < \alpha < 90°}$, $\boldsymbol{c_x = c \cdot \cos\alpha}$, $\mathbf{0 < \cos\alpha < 1}$, $\boldsymbol{c_x > 0}$;

б) если $\boldsymbol{\alpha = 0°}$, $\vec{c}$ $\uparrow\uparrow$ **О*Х***, $\boldsymbol{c_x = c \cdot \cos 0°}$, $\boldsymbol{c_x = +c}$, проекция положительная;

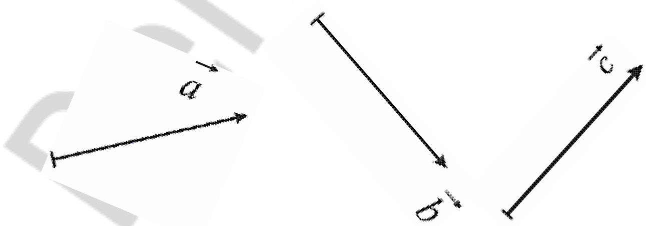
в) если $\boldsymbol{\alpha = 90°}$, $\vec{c}$ $\perp$ **О*Х***, $\boldsymbol{c_x = c \cdot \cos 90°}$, $\boldsymbol{c_x = 0}$;

г) если $\mathbf{180° > \alpha > 90°}$, $\mathbf{-1 < \cos\alpha < 0}$, $\boldsymbol{c_x < 0}$;

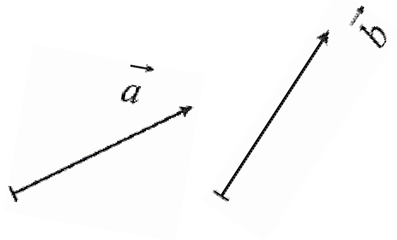
д) если $\boldsymbol{\alpha = 180°}$, $\vec{c}$ $\uparrow\downarrow$ **О*Х***, $\boldsymbol{c_x = c \cdot \cos 180°}$, $\boldsymbol{c_x = -c}$, проекция отрицательная.

Упражнения

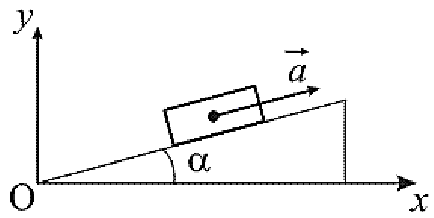
1. Сложить векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.



2. Вычесть вектор $\vec{b}$ из $\vec{a}$:



3. Найти проекцию вектора $\vec{a}$ на координатные оси x и y.



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА В МАТЕМАТИКЕ

Рассмотрим понятие предела функции. Есть некоторая переменная величина. Если эта величина в процессе изменения неограниченно приближается к определенному числу **a**, то **a** — предел этой величины.

Для определенной в некотором интервале функции ***f*(*x*) = *y*** пределом называется такое число **A**, к которому стремится функция при ***x***, стремящемся к определенной точке **a**. Точка **a** принадлежит интервалу, на котором определена функция:

$$\lim_{x \to \mathrm{a}} f(x) = \mathrm{A}$$

Lim — от английского *limit* — предел.

Выражение «***x*** стремится к какому-то значению» указывает, что переменная не принимает значение числа, но бесконечно близко к нему приближается.

Пример. Найти предел функции: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{1 + x}$.

Решение: подставим значение ***x* = 3** в функцию:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + 3x - 5}{1 + x} = \lim_{x \to 3} \frac{18 - 9 - 5}{4} = 1$$

Упражнения

Найти пределы следующих функций:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^3-4x+1)$

2. $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3+7x)$

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

Геометрический и физический смысл производной

Пусть есть функция ***f*(*x*)**, заданная в некотором интервале **(*a, b*)**. Точки x и x_0 принадлежат этому интервалу. При изменении x меняется и сама функция. Изменение аргумента — разность его значений $\boldsymbol{x-x_0}$. Эта разность записывается как Δx ***(дельта икс)*** и называется приращением аргумента. Изменением или приращением функции называется разность значений функции в двух точках ($\Delta y = y - y_0$).

Определение производной: **производная функции в точке — предел отношения приращения функции в данной точке к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.**

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Иначе это можно записать так:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной: производная от функции в точке равна тангенсу угла между осью ОX и касательной к графику функции в данной точке (tgα = y').

Физический смысл производной: производная пути по времени равна скорости прямолинейного движения. Из школьного курса физики известно, что скорость — это частное пути $\boldsymbol{S = f(t)}$ и времени $\boldsymbol{t}$. Средняя скорость за некоторый промежуток времени: $\mathrm{v}_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Чтобы узнать скорость движения в момент времени $\boldsymbol{t_0}$, нужно вычислить предел: $\mathrm{v}_{t=t_0} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

Приведем пример, иллюстрирующий практическое применение производной. Пусть тело движется по закону: $s(t) = 4t + 5t^2$. Нужно найти скорость в момент времени $t = 2$ с. Вычислим производную:

$s'(t) = \mathrm{v} = 4 + 10t$, $\mathrm{v}_{t=2} = s'(t) = 4 + 20 = 24$ м/с.

Правила нахождения производных

Нахождение производной называется дифференцированием. Функция, которая имеет производную в данной точке, называется дифференцируемой.

Приведем таблицу с производными элементарных функций, а затем рассмотрим правила вычисления производных, в том числе и производных сложных функций с подробными примерами.

1. $c' = 0$, $c = \text{const}$	7. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	8. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	9. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $(e^x)' = e^x$	10. $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	11. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	

1. Вынесение константы.

Постоянное число можно (и нужно) вынести за знак производной: **(C*u*)′ = C*u*′**, где С — постоянное число (константа). Константу можно вынести за знак производной. Более того, это нужно делать. При решении примеров по математике возьмите за правило: ***если можете упростить выражение, обязательно упрощайте***.

Пример. Найти производную функции $y = 3\cos x$, 3 — это С.

Используем правило и выносим постоянный множитель за знак производной, преобразуем косинус по таблице, ставим минус на первое место и избавляемся от скобок:

$y' = (3\cos x)' = 3(\cos x)' = 3\,(-\sin x) = -3\sin x.$

2. Производная суммы и разности функций.

Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций. То же самое справедливо и для производной разности функций.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Пример 1. Найти производную функции

$$y = 6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$$

Обратите внимание, что для дифференцирования все корни, степени нужно представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$, а если они находятся в знаменателе, то переместить их вверх. Используем первое правило дифференцирования: постоянные множители (числа) выносим за знак производной:

$y' = (6 + x + 3x^2 - \sin x - 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2})' = (6)' + (x)' + (3x^2)' - (\sin x)' - (2x^{\frac{1}{3}})' + (x^{-2})' = 0 + 1 + 3\cdot 2x - \cos x - 2\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + (-2)\cdot x^{-3} = 1 + 6x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3}.$

Все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ желательно снова представить в виде корней, степени с отрицательными показателями переместить в знаменатель.

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4$

Решение:

$y' = (\frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4)' = (\frac{9}{x^3})' + (\sqrt[3]{x^4})' - (\frac{2}{x})' + (5x^4)' =$

$= \frac{27}{x^4} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x^2} + 20x^3$

3. Производная произведения функций.

Производная произведения двух дифференцируемых функций вычисляется по формуле:

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = (x^2 + 7x - 1)\ln x$.

$x^2 + 7x - 1 = \boldsymbol{u}$, $\ln x = \boldsymbol{v}$

Используем правило дифференцирования произведения:

$y' = ((x^2 + 7x - 1)\ln x)' = (x^2 + 7x - 1)'\ln x + (x^2 + 7x - 1)(\ln x)' = ((x^2)' + (7x)' - (1)')\ln x) + (x^2 + 7x - 1)(\ln x)' = (2x + 7\cdot 1 - 0)\ln x + (x^2 + 7x - 1)\cdot \frac{1}{x} =$

$= (2x + 7)\ln x + \dfrac{x^2 + 7x - 1}{x}$

4. Производная частного двух функций.

Формула для определения производной от частного двух функций:

$$\left(\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}\right)' = \frac{\boldsymbol{u'v} - \boldsymbol{uv'}}{\boldsymbol{v}^2}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \dfrac{(3x-4)}{x^2+1}$.

$3x - 4 = \boldsymbol{u}$, $x^2 + 1 = \boldsymbol{v}$

$$y' = \left(\frac{(3x-4)}{x^2+1}\right)' = \left(\frac{(3x-4)'(x^2+1) - (3x-4)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3\cdot(x^2+1) - (3x-4)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right)$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2-3}{x}$.

Решение. Перед тем как использовать правило дифференцирования частного, нужно рассмотреть возможность упростить саму дробь или вообще избавиться от нее.

Формула $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ громоздкая, и применять ее не следует.

В данном случае можно почленно поделить числитель на знаменатель. $y=\frac{x^2-3}{x}=x-\frac{3}{x}$

Теперь дифференцировать проще:

$$y'=(x-\frac{3}{x})'=(x)'-(\frac{3}{x})'=1-3(-1)x^{-2}=1+\frac{3}{x^2}$$

5. Производная сложной функции.

Правило дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))'=u'(v)\cdot v'$$

Имеются две функции — u и v, причем функция v вложена в функцию u. Функция такого вида называется сложной функцией.

Функцию u будем называть **внешней функцией**, а функцию v — **внутренней (или вложенной) функцией**.

Названия «внешняя функция» и «внутренняя функция» используют для того, чтобы легче было понять материал.

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$.

Под знаком синуса находится не просто «икс», а выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице невозможно.

Функция $y = \sin(3x - 5)$ — сложная функция, многочлен $3x - 5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x - 5)$ — внешней функцией.

Первый шаг при нахождении производной сложной функции — **определить, какая функция является внутренней, а какая — внешней**. Затем можно применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Решение. Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), по таблице производных элементарных функций отмечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. **Все табличные формулы применимы также в случае, если «икс» заменить сложным выражением**, в данном случае — $u'(v) = \cos(3x - 5)$.

Внутренняя функция $v = 3x - 5$ *не изменилась*. Очевидно, что $v' = (3x - 5)'$.

Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ следующий:

$y' = (\sin(3x - 5))' = \cos(3x - 5)\cdot(3x - 5)' = \cos(3x - 5)\cdot(3– 0) = 3\cos(3x - 5)$.

Пример 2. Найти производную функции $s = (\sin x - 2\cos x)^3$

Вначале определим внутреннюю и внешнюю функции. Возведение в степень — функция внешняя, а выражение в скобках (разность двух тригонометрических функций) — внутренняя.

Тогда $s' = ((\sin x - 2\cos x)^3)' = 3(\sin x - 2\cos x)^2 \cdot (\sin x - 2\cos x)'$.

Далее по таблице производных (производная суммы или разности, производные синуса и косинуса) находим:

$(\sin x - 2\cos x)' = (\sin x)' - (2\cos x)' = \cos x - (-2\sin x) = \cos x + 2\sin x$.

Требуемая в условии задачи производная y найдена:

$3(\sin x - 2\cos x)^2 \cdot (\cos x + 2\sin x)$.

Пример 3. Найти производную функции $y = \ln(ax^2 + c)$.

Определяем внутреннюю и внешнюю функции. Натуральный логарифм от выражения в скобках — это внешняя функция, а выражение в скобках — внутренняя.

Тогда $y' = (\ln(ax^2 + c))' = \dfrac{1}{ax^2 + c} \cdot (ax^2 + c)' = \dfrac{1}{ax^2 + c} \cdot 2ax = \dfrac{2ax}{ax^2 + c}$.

Пример 4. Найти производную функции $y = \cos(x^3 - 3)$.

Определяем внутреннюю и внешнюю функции. Косинус от выражения в скобках — внешняя функция, а выражение в скобках — внутренняя функция. Соединяем две производные знаком произведения:

$y' = (\cos(x^3 - 3))' = -\sin(x^3 - 3) \cdot (x^3 - 3)' = -\sin(x^3 - 3) \cdot 3x^2 =$
$= -3x^2 \sin(x^3 - 3)$.

Упражнения

1. $y = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}$
2. $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x - 5$
3. $y = x^2 \cos x$
4. $y = \dfrac{x^5}{e^x}$
5. $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5}$
6. $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$
7. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
8. $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Функция $f(x)$ имеет относительное максимальное значение в точке a, если $f(a)$ больше, чем любое значение в ее непосредственной близости. Функция $f(x)$ имеет относительное минимальное значение в точке b, если $f(b)$ меньше любого значения в ее непосредственной окрестности.

В каждой из этих точек касательная к кривой параллельна оси x, а значение производной функции равно нулю: $f'(x) = 0$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет локальный максимум или минимум в точках a и b и если $f'(x)$ существует, то $f'(a) = f'(b) = 0$. Здесь используется термин «локальный», поскольку эти точки являются максимальными и минимальными в данной конкретной области и могут быть другими за пределами этой области.

В точках, расположенных непосредственно слева от максимума, наклон касательной является положительным: $f'(x) > 0$. В то время как в точках, непосредственно расположенных вправо, наклон является отрицательным: $f'(x) < 0$. Другими словами, при максимуме $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Как минимум $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» (рис. 1.22). Точка x, в которой функция имеет максимум или минимум, называется критической точкой.

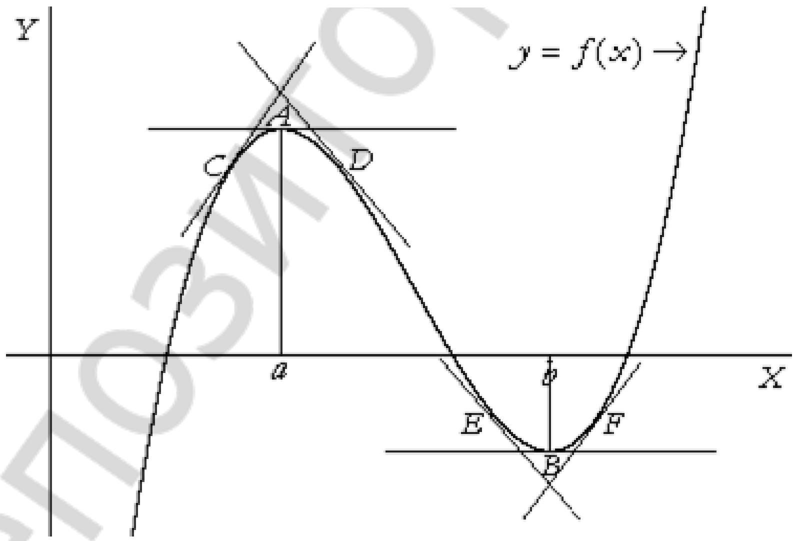


Рис. 22

Алгоритм исследования функции на экстремум с помощью второй производной.

1. Находим область определения функции $f(x)$.

2. Находим производную $f'(x)$ и критические точки (точки экстремума).

3. Находим вторую производную $f''(x)$ и определяем знак $f''(x)$ в каждой точке.

4. Делаем выводы о характере экстремумов в этих точках.

5. Вычисляем экстремальные значения функции.

Таким образом, чтобы найти максимальное и минимальное значения функции, нам нужно:

1. Решить алгебраическое уравнение: $f'(x) = 0$. Корни x_1, x_2, x_3 … этого уравнения являются точками экстремума.

2. Вычислить вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в точках.

Если вторая производная положительна в точке экстремума ($f''(x_1) > 0$), то точка x_1 является минимумом; если она отрицательна ($f''(x_2) < 0$), то точка x_2 является максимумом; если равна нулю ($f''(x_3) = 0$), то необходимо найти знак первой производной слева ($x < x_3$) и справа ($x > x_3$) от x_3. Если знак на левой стороне «–», а на правой «+», то в точке x_3 — минимум. Если знак слева «+», а справа «–», то в точке x_3 — максимум. Если знак не меняется, то экстрима в этот момент нет.

3. Определить значение функции в точках максимума и минимума.

Пример 1. Исследовать функцию $f(x) = 2x^3 – 9x^2 + 12x – 3$ на экстремумы.

Решение: $f'(x) = 6x^2 – 18x + 12 = 6(x^2 – 3x + 2) = 6(x – 1)(x – 2) = 0$.

Точки $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ являются точками экстремума. Для определения максимума или минимума в них надо найти вторую производную по каждому значению и оценить ее:

$f'(x) = 6x^2 – 18x + 12$; $f''(x) = 12x – 18f''(1) = 12 – 18 = –6$.

Вторая производная отрицательная. Следовательно, функция имеет максимум при $x_1 = 1$. Чтобы найти координату y — экстремальное значение — на этом максимуме, мы оцениваем $f(1)$: $f(x) = 2x^3 – 9x^2 + 12x – 3$; $f(1) = 2 – 9 + 12 – 3 = 2$.

Максимум наблюдается в точке (1, 2).

$f''(x) = 12x – 18$; $f''(2) = 24 – 18 = 6$. Вторая производная положительна. Поэтому функция имеет минимум при $x_2 = 2$.

Пример 2. Найти экстремумы функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 – 12x + 5$.

1. Область определения: (-¥, +¥).

2. $f'(x) = 6x^2 + 6x – 12$. $f'(x) = 0$; $6(x^2 + x – 2) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = –2$.

3. $f''(x) = 12x + 6$. $f''(1) = 18 > 0$, $f''(–2) = –18 < 0$.

4. $x_1 = 1$ — точка минимума, $x_2 = –2$ — точка максимума.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Нахождение производных и нахождение неопределенных интегралов (дифференцирование и интегрирование) — это два взаимно обратных действия, например, как сложение/вычитание или умножение/деление.

Рассмотрим таблицу интегралов:

$\int 0 \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{C}$	$\int \sin x\, \mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$
$\int 1 \cdot \mathrm{d}x = x + \mathrm{C}$	$\int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x + \mathrm{C}$
$\int x^{\alpha} \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathrm{C} \quad (\alpha \neq -1)$	$\int \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + \mathrm{C}$
$\int \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + \mathrm{C}$	$\int \mathrm{ctg}\, x\, \mathrm{d}x = \ln\lvert\sin x\rvert + \mathrm{C}$
$\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln x} + \mathrm{C}$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{C}$
	$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}\, x + \mathrm{C}$

Как и в производных, существуют несколько правил интегрирования и таблица интегралов от некоторых элементарных функций. Любой табличный интеграл (да и неопределенный интеграл) имеет вид:

$$\int \boldsymbol{f(x)}\mathbf{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{F}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{C},$$

где C = const; $\int$ — знак интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция, dx — знак дифференциала, $f(x)$dx — подынтегральное выражение; F(x) — **первообразная функция**; F(x) + C — множество первообразных функций.

Важно, что в любом неопределенном интеграле к ответу приплюсовывается константа C.

Рассмотрим формулу $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ и таблицу интегралов. Отметим, что левые части $\int f(x)\mathrm{d}x$ **превращаются** в другие функции — F(x) + C.

Решить неопределенный интеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$ — это значит ПРЕВРАТИТЬ его в определенную функцию F(x) + C, пользуясь некоторыми правилами, приемами и таблицей.

Рассмотрим табличный интеграл $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$. $\int \sin x \mathrm{d}x$ превратился в функцию $-\cos x + \mathrm{C}$.

Так как дифференцирование и интегрирование — противоположные операции, то для любой первообразной, которая найдена правильно, справедливо следующее:

$$\mathbf{(F(}\boldsymbol{x}\mathbf{) + C)' = F'(}\boldsymbol{x}\mathbf{) + 0 =}\ \boldsymbol{f(x)}\mathbf{.}$$

Если продифференцировать правильный ответ, то обязательно должна получиться исходная подынтегральная функция.

Вернемся к табличному интегралу $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$.

Убедимся в справедливости данной формулы. Берем производную от правой части: (–cos x + C)′ = –(cos x)′ + (C)′ = –(–sin x) + 0 — исходная подынтегральная функция.

К функции F(x) всегда приписывается константа С, так как при дифференцировании константа всегда превращается в ноль.

Решить неопределенный интеграл — это значит найти множество всех первообразных, а не какую-либо одну функцию. В рассматриваемом табличном примере $-\cos x + 5,\ -\cos x - \frac{4}{7}$ и т. д. все эти функции являются решением интеграла $\int \sin x\mathrm{d}x$. Решений бесконечно много, поэтому записывают коротко: $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C},$ где С = const.

Правила интегрирования, которые также называют ***свойствами линейности*** неопределенного интеграла:

– $\boldsymbol{\int \mathrm{k}u\mathrm{d}x = \mathrm{k}\int u\mathrm{d}x}$ — постоянный множитель можно (и нужно) вынести за знак интеграла;

– $\boldsymbol{\int (u \pm v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x \pm \int v\mathrm{d}x}$ — интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от каждой функции в отдельности. Данное свойство справедливо для любого количества слагаемых.

Правила такие же, как и для производных.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. $\int (x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3})\ \mathrm{d}x$

Решение:

$$\int (x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3})\ \mathrm{d}x^{(1)} = \int x\mathrm{d}x - \int \sqrt{x}\mathrm{d}x - \int 3x^5\mathrm{d}x + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x^3}^{(2)} =$$

$$= \int x\mathrm{d}x - \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x - \int 3x^5\mathrm{d}x + 2\int x^{-3}\mathrm{d}x^{(3)} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} - 3\frac{1}{6}x^6 + 2\frac{1}{(-2)}x^{-2} + \mathrm{C}^{(4)} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + \mathrm{C},\ \text{где C = const.}$$

Применяем правило $\int(u \pm v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x \pm \int v\mathrm{d}x$. Не забываем записать знак дифференциала dx под каждым интегралом. **dx — это полноценный множитель**.

Согласно правилу $\int \mathrm{k}u\mathrm{d}x = \mathrm{k}\int u\mathrm{d}x$ выносим все константы за знаки интегралов. Кроме того, на данном этапе готовим корни и степени для интегрирования. **Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе, перенести в числитель.**

Константу С достаточно приплюсовать один раз в конце выражения (а не ставить после каждого интеграла).

Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем переносим обратно в знаменатель.

Проверка. Для того чтобы выполнить проверку, нужно продифференцировать полученный ответ:

$$(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2}\mathrm{C})' = \frac{1}{2}(x^2)' + \frac{2}{3}(x^{\frac{2}{3}})' - \frac{1}{2}(x^6)' - (x^{-2})' + (\mathrm{C})' =$$

$$= \frac{1}{2}2x + \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}6x^5)' - (-2)(x^{-3})' + 0 = x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3}.$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Пример 2. Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. $\int x^2(3+4x)\mathrm{d}x$.

Решение. Под знаком интеграла — произведение двух функций. Если дано произведение или частное, всегда необходимо проверять, можно ли преобразовать подынтегральную функцию в сумму. В данном случае можно:

$$\int x^2(3+4x)\,\mathrm{d}x^{(1)} = \int(3x^2 + 4x^3)\mathrm{d}x^{(2)} = 3\int x^2\mathrm{d}x + 4\int x^3\mathrm{d}x^{(3)} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{4}x^4 + \mathrm{C}^{(5)} = x^3 + x^4 + \mathrm{C}.$$

Проверка:

$(x^3 + x^4 + \mathrm{C})' = (x^3)' + (x^4)' + \mathrm{C}' = 3x^2 + 4x^3 + 0 = x^2(3 + 4x)$.

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Упражнения

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

1. $\int x(1-2x)dx.$ 2. $\int \dfrac{2x^2-1}{2x}dx.$

Метод замены переменной в неопределенном интеграле

Один из самых важных и наиболее распространенных приемов, который применяется в ходе решения неопределенных интегралов, — ***метод замены переменной***.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x.$

Метод замены состоит в том, чтобы **сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой**. В данном случае $t = 3x + 1$. Можно использовать любые буквы. Но при замене у нас остается dx! Если осуществляется переход к новой переменной t, то в новом интеграле все должно быть выражено через букву t, и поэтому дифференциал dx нужно **превратить в некоторое выражение, которое зависит только от *t***.

Действие следующее. После того, как мы подобрали замену $t = 3x + 1$, нужно найти дифференциал dt. Так как $t = 3x + 1$, то $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(3x + 1) = (3x + 1)'\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}x$.

После этого окончательный результат лучше переписать максимально коротко: $\mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x$. По правилам пропорции выражаем нужный нам dx: $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{3}.$ В итоге: $\int \sin(\underline{3x+1})^{=t}\,\underline{\mathrm{d}x}\,{\scriptstyle =\frac{\mathrm{d}t}{3}}.$ Таким образом, $\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int \sin t\mathrm{d}x$ — это табличный интеграл $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + \mathrm{C}$ (таблица интегралов справедлива и для переменной t).

$$\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos t + \mathrm{C}.$$

В заключение осталось провести обратную замену. Вспоминаем, что $t = 3x + 1$.

$$\int \sin(3x+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin t\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cos t + \mathrm{C} = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + \mathrm{C}.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$.

$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = (*)$ (знак (*) обозначает, что мы прервали решение для промежуточных объяснений).

Проведем замену $t = 3 - 4x$ (другую замену здесь трудно придумать)

$\mathrm{d}t = -4\mathrm{d}x \to \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{4}$.

$$(*) = -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{\sqrt{t^2}}} = -\frac{1}{4}\int t^{\frac{-2}{3}}\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + \mathrm{C} = -\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{3-4x} + \mathrm{C}.$$

В результате замены исходный интеграл упростился — свелся к обычной степенной функции. **Это и есть цель замены — упростить интеграл**.

Упражнения

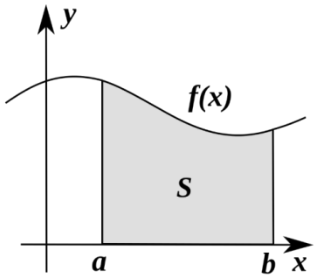
Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

1. $\int \sqrt[5]{(1+x)^4}\mathrm{d}x$
2. $\int x(1-x)^5\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{4x^2+1}$
4. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{9-8x^2}}$
5. $\int \frac{x^3}{9+16x^4}\mathrm{d}x$
6. $\int e^{5+2\cos x}\sin x\mathrm{d}x$
7. $\int (7-\sin 4x)^{\frac{1}{4}}\cos 4x\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{e^{4x}}{3+5e^{4x}}\mathrm{d}x$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Имея дело с понятием интеграла, мы имеем дело с бесконечно малыми величинами. Интеграл поможет вычислить площадь фигуры, массу неоднородного тела, пройденный при неравномерном движении путь и многое другое. Следует помнить, что интеграл — это сумма бесконечно большого количества бесконечно малых слагаемых.

В качестве примера представим график какой-нибудь функции. Как найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции?



С помощью интеграла! Разобьем криволинейную трапецию, ограниченную осями координат и графиком функции, на бесконечно малые отрезки. Таким образом, фигура окажется разделена на тонкие столбики. Сумма площадей столбиков и будет составлять площадь трапеции. Но такое вычисление даст примерный результат. Чем меньше и уже будут отрезки, тем точнее будет вычисление. Если мы уменьшим их до такой степени, что их длина будет стремиться к нулю, то сумма площадей отрезков будет стремиться к площади фигуры. Это и есть определенный интеграл, который записывается следующим образом: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ Точки a и b называются **пределами интегрирования**.

Для того чтобы научиться решать определенные интегралы, необходимо:

1) уметь *находить* неопределенные интегралы.

2) уметь *вычислить* определенный интеграл.

По сравнению с неопределенным интегралом прибавились **пределы интегрирования**.

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой a. Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой b. Отрезок $[a, b]$ называется **отрезком интегрирования**.

Определенный интеграл — это **ЧИСЛО**. Решить определенный интеграл — это значит найти число.

Решают определенный интеграл с помощью формулы Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^d f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(X)\Big|_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1. Сначала находим первообразную функцию F(X) (неопределенный интеграл). Константа С в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение $\Big|_a^b$ является чисто техническим, вертикальная черта не несет ни-

какого математического смысла. Запись $\mathbf{F(X)}\Big|_{a}^{b}$ нужна для применения формулы Ньютона–Лейбница.

2. Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию F(b).

3. Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию F(a).

4. Рассчитываем разность F(b) – F(a), то есть находим число.

Рассмотрим некоторые **свойства определенного интеграла**.

В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x.$

Например, в определенном интеграле перед интегрированием $\int\limits_6^0 (1-x)\mathrm{d}x$ целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок: $\int\limits_6^0 (1-x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^6 (1-x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^6 (x-1)\mathrm{d}x$ — в таком виде интегрировать значительно удобнее.

Как и для неопределенного интеграла, для определенного интеграла справедливы **свойства линейности**:

$\int\limits_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x,$ где k = const;

$\int\limits_a^b (f(x)\mathrm{d}x \pm g(x))\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$ — это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

В определенном интеграле можно проводить **замену переменной интегрирования**.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 2x^2\mathrm{d}x.$

Решение:

$$\int\limits_1^2 2x^2\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} 2\int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3-1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице по формуле $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$. Константу $\frac{1}{3}$ выносим за скобку.

(3) Используем формулу Ньютона–Лейбница $\int\limits_a^d f(x)\mathrm{d}x = F(X)\Big|_a^b =$ $= F(b) - F(a)$. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем — нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем ответ.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-2}^{4} (8+2x-x^2)\mathrm{d}x$.

Решение:

$$\int\limits_{-2}^{4} (8+2x-x^2)\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} 8\int\limits_{-2}^{4} \mathrm{d}x + \int\limits_{-2}^{4} x\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^{4} x^2\mathrm{d}x \overset{(2)}{=} 8x\Big|_{-2}^{4} - \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-2}^{4} \overset{(3)}{=}$$
$$= 8(4-(-2)) + (4^2-(-2^2)) - \frac{1}{3}(4^3-(-2)^3) = 8\cdot 6 + (16-4) - \frac{1}{3}(64+8) =$$
$$= 48 + 12 - 24 = 36.$$

(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим — они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трех слагаемых применяем формулу Ньютона–Лейбница: $F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

В определенном интеграле часто делают ошибки в вычислениях и **В ЗНАКАХ**.

Решение можно сократить:

$$\int\limits_{-2}^{4} (8+2x-x^2)\mathrm{d}x = (8x + x^2 + \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{4} = (32+16-\frac{64}{3}) - (-16+4+\frac{8}{3}) =$$
$$= \frac{80}{3} + \frac{28}{3} = 36.$$

Преимуществами второго способа является быстрота решения, и то, что первообразная $8x + x^2 + \frac{x^3}{3}$ находится в одной скобке.

Замена переменной в определенном интеграле

Для определенного интеграла справедливы те же типы замен, что и для неопределенного интеграла. Новизна состоит в том, **как поменять пределы интегрирования при замене**.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+16}}$.

Главный вопрос здесь в том, как правильно провести замену. Смотрим по **таблице интегралов**, на что больше всего похожа подынтегральная функция. Очевидно, что на данный логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln(x+\sqrt{x^2+\mathrm{A}}) + \mathrm{C}$.

Готовим интеграл к замене: $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+16}} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2)^2+16} = (*)$

Делаем замену $t = x^2$. Находим дифференциал $\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

По сравнению с заменой в неопределенном интеграле добавляется дополнительный этап. **Находим новые пределы интегрирования**.

Рассмотрим замену $t = x^2$ и старые пределы интегрирования $a = 0$, $b = \sqrt{3}$. Сначала подставляем в выражение замены $t = x^2$ нижний предел интегрирования — 0: $t_1 = 0^2 = 0$. Потом подставляем в выражение замены $t = x^2$ верхний предел интегрирования — $\sqrt{3}$: $t_2 = (\sqrt{3})^2 = 3$.

Продолжаем решение.

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+16}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(t+\sqrt{t^2+16})\right)\Big|_0^3 \overset{(3)}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(3+\sqrt{25}) - \ln(0+\sqrt{0+16})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0{,}35.$$

(1) В соответствии с заменой **записываем новый интеграл с новыми пределами интегрирования**.

(2) Это простейший табличный интеграл, интегрируем по таблице. Константу $\frac{1}{2}$ лучше оставить за скобками. Справа — линия с новыми

пределами интегрирования — $\Big|_0^3$ — это подготовка для применения формулы Ньютона–Лейбница.

(3) Используем формулу Ньютона–Лейбница $\mathrm{F}(X)\Big|_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$.

Еще одно отличие от неопределенного интеграла состоит в следующем: после того как мы провели замену, **обратных замен проводить не нужно**.

Примеры и решения

1. $\int\limits_1^5 \frac{7\mathrm{d}x}{x} = 7\int\limits_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x} = 7(\ln x)\Big|_1^5 = 7(\ln 5 - \ln 1) = 7(\ln 5 - 0) = 7\ln 5$

2. $\int\limits_{-3}^{1} (2x^2 + 3x - 1)\mathrm{d}x = (\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x)\Big|_{-3}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1 - (-18 +$

$+\frac{27}{2} + 3) = \frac{7}{6} + \frac{3}{2} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

3. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x \mathrm{d}x}{\cos^2 x + 1} = (*)$

Проведем замену переменной: $t = \cos x \to \mathrm{d}t = -\sin x\ \mathrm{d}x \to \sin x\ \mathrm{d}x =$ $= -\mathrm{d}t$. Новые переделы интегрирования: $t_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ t_2 = \cos\pi = -1.$

$(*) = -\int\limits_0^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = (\mathrm{arctg}\ t)\Big|_{-1}^{0} = (\mathrm{arctg}0 - \mathrm{arctg}(-1)) = 0 + \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$

4. $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{2}}}{x^2}\mathrm{d}x$

Замена: $t = \frac{1}{x} \to \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \to \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\mathrm{d}t.$

Новые пределы интегрирования: $t_1 = \frac{1}{1} = 1,\ t_2 = \frac{1}{2}.$

$(*) = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} e^t \mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} e^t \mathrm{d}t = (e^t)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = e - \sqrt{e}$

Упражнения

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_0^{\pi}(2x+\sin 2x)\mathrm{d}x$

2. $\int\limits_1^{5}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

1. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{4x-2}\,\mathrm{d}x$

2. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\mathrm{d}x$

ДОПОЛНЕНИЕ

АЛГЕБРА

Формулы сокращенного умножения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Возведение в степень:

a^2 — квадрат числа а («а квадрат»);

a^3 — куб числа а («а куб»).

Извлечение корня:

$\sqrt[2]{a}$ — квадратный корень из a;

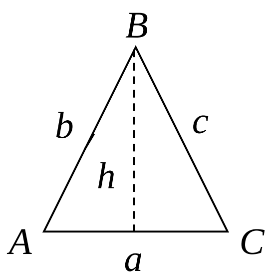
$\sqrt{}$ — знак корня или радикал.

ГЕОМЕТРИЯ

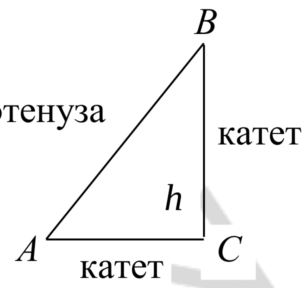
1. Треугольник.

A, B, C — вершины,
h — высота,
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — углы треугольника.

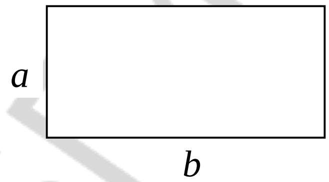
Площадь треугольника: $\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot h}$



Прямоугольный треугольник:



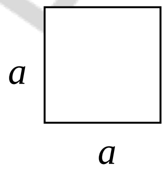
2. Прямоугольник:



Все углы прямые (равны 90°)

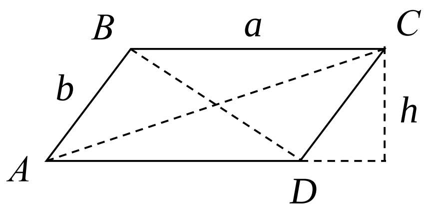
Площадь прямоугольника: $\boxed{S = a \cdot b}$

Квадрат:



Площадь квадрата: $\boxed{S = a^2}$

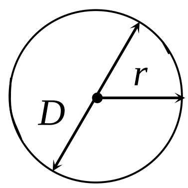
3. Параллелограмм:



AC, *BD* — диагонали

Площадь параллелограмма: $\boxed{S = a \cdot h}$

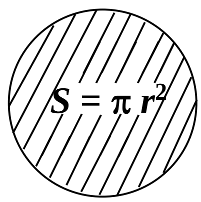
4. Окружность:



Длина окружности $l = 2\pi r$;
r — радиус окружности;
D — диаметр.

Число «π» — $\pi = \dfrac{l}{D} \approx 3{,}14$.

Круг



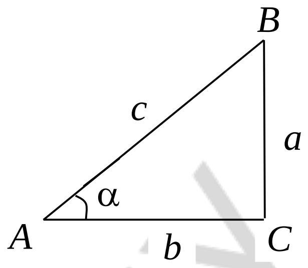
Площадь круга: $\boxed{S = \pi r^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}}$

Тригонометрические функции угла:

Синус: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$

Косинус: $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$

Тангенс: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$



ПРИСТАВКИ СИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ

Наименование	Обозначение приставки		Множитель
	русское	международное	
экса	Э	E	10^{18}
пета	П	P	10^{15}
тера	Т	T	10^{12}
гига	Г	G	10^{9}
мега	М	M	10^{6}
кило	к	k	10^{3}
гекто	г	h	10^{2}
дека	да	da	10^{1}
деци	д	d	10^{-1}
санти	с	c	10^{-2}
милли	м	m	10^{-3}
микро	мк	μ	10^{-6}
нано	н	n	10^{-9}
пико	п	p	10^{-12}
фемто	ф	f	10^{-15}
атто	а	a	10^{-18}

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Герасимов, В. Д.* Математика : учеб. пособие для 6-го кл. / В. Д. Герасимов, О. Н. Пирютко. Минск : Адукацыя і выхаванне, 2018. 320 с.

2. *Арефьева, И. Г.* Алгебра : учеб. пособие для 8-го кл. / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. Минск : Народная асвета, 2018. 269 с.

3. *Седых, И. Ю.* Высшая математика для гуманитарных направлений : учеб. и практикум для академического бакалавриата / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев. Люберцы : Юрайт, 2016. 443 с.

4. *Баврин, И. И.* Высшая математика для химиков, биологов и медиков : учеб. и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. Люберцы : Юрайт, 2016. 329 с.

5. *Выгодский, М. Я.* Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. Москва : АСТ: Астрель, 2010. 703 с.

6. *Физика* для иностранных учащихся подготовительных отделений : учеб. пособие / З. В. Межевич [и др.]. Минск : БГМУ, 2014. 239 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Числа и вычисления 3
Основные математические действия 3
Действия над целыми числами 3
Дроби и действия над ними 5
Пропорции 10
Возведение в степень 11
Функции и их графики 13
Координатная плоскость 13
Функциональная зависимость 14
Линейная функция. Ее свойства и график 15
Линейные уравнения 17
Квадратичная функция. Квадратные уравнения 18
Показательная функция, ее график. Экспоненциальная функция, ее график 22
Логарифмическая функция, ее график 23
Тригонометрические функции, их свойства и графики 25
Векторы 31
Операции с векторами. Векторное сложение и вычитание 32
Проекция вектора на координатную ось 34
Дифференциальное исчисление 36
Понятие предела в математике 36
Понятие о производной функции 37
Исследование функции на максимум и минимум с помощью производной 43
Неопределенный интеграл 45
Определенный интеграл 49
Дополнение 56
Список использованной литературы 59