

**Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в системе корень – костная ткань с учетом изменения характеристик альвеолярной кости**

*Белорусский государственный университет,  
Белорусский государственный медицинский университет*

Приведены математические расчёты и формулы для определения проекции и координат приложения силы при перемещении зубов. Ключевые слова: зуб, костная ткань, ультразвук, жёсткость, координата, перемещение, момент силы.

В научной практике для удобства изучения явлений часто используют составление моделей, которые реально повторяют все их свойства. Математические модели находят всё большее и разнообразное применение в различных областях стоматологии.

Р.Еуkhoff [15] отмечал следующие приложения биомедицинских математических моделей, в которых существенную роль играет оценка числовых параметров:

- клиническая диагностика;
- клинические терапевтические приложения;
- медицинская реабилитация;
- биомедицинские научные исследования;
- планирование экспериментов;
- обучение врачей и медсестёр на модели, имитирующей пациента.

Работы многих отечественных и зарубежных учёных посвящены изучению вопросов математики и стоматологии. Это труды Г. П. Соснина [12], Ю. М. Климашина [6], А. Д. Шварца [13], Л. П. Бариновой [1] и многих других.

В ортодонтии применяются разные аппараты с различной силой действия: большой или слабой, механической или функциональной, постоянной или перемежающейся. В результате действия различных сил ответная реакция организма в виде тканевых преобразований бывает также различной. Перестройку костной ткани в процессе ортодонтического лечения определяет действующая на нее сила. Необходимо, чтобы процессы резорбции и аппозиции костной ткани были сбалансированными.

Изучением дозирования сил при ортодонтическом лечении занимались многие авторы. Сторонники аппаратов прерывистого действия отмечают, что сила ортодонтического аппарата, действующая прерывисто, способствует большей эффективности и закреплению достигнутых результатов лечения. Подвижность зубов наблюдается реже. Авторы считают, что при применении аппаратов прерывистого действия вначале периодонт сдавливается и кровообращение нарушается, но, поскольку действие силы, даже большой, непродолжительно, кровообращение быстро восстанавливается и тканевые изменения бывают незначительными.

Другие авторы высказывают противоположную точку зрения: они рекомендуют применять небольшие, но постоянно действующие силы. Д. А. Калвелис [4] считал, что разницы в применении прерывистой и непрерывной силы нет. Вопрос заключается в правильном применении аппаратов и величины силы. Он также

указывает, что при применении больших сил происходит резорбция цемента корня.

А. М. Шварц [16] оптимальной считал силу, не превышающую капиллярное давление (20 – 26 г/см<sup>2</sup>), а при корпусном перемещении – 40 – 50 г/см<sup>2</sup>. Он определил характер морфологических изменений и выделил четыре степени реакции периодонта в зависимости от величины силы. Он считал, что большие силы (60 – 70 г/см<sup>2</sup>) приводят к сдавливанию сосудов и нарушению кровообращения.

А. И. Позднякова [11] на основании экспериментальных данных установила, что применение слабых сил не вызывает изменения в цементе смещаемых зубов, рассасывание его может наступить при применении больших сил или в случае длительного смещения зубов.

А. И. Бетельман (цит. по Л. С. Величко [2]) рекомендует при перемещении зубов малые силы, которые не сдавливают капилляры и не нарушают трофику периодонта.

Имеется ряд работ, направленных на методы определения силы действующих элементов ортодонтических аппаратов и ее влияния на периодонт перемещаемых зубов.

В. Н. Володкин (цит. по А. В. Козел [7]) при помощи предложенного им аппарата механического типа исследовал силы, развиваемые эластичными резиновыми кольцами различного диаметра, а также расширяющими петлями типа петель Коффина из ортодонтической проволоки. Автор сообщает, что кольца одинакового диаметра, но из резины разной марки развивают неодинаковые силы. Величина силы расширяющих петель типа петель Коффина зависит от диаметра проволоки, из которой они изготовлены, и степени активации.

Л. С. Величко в соавторстве с Н. А. Пучко (А.с.№427707 «Устройство для определения силы действия ортодонтических аппаратов») измеряли силу действия ортодонтических аппаратов при помощи аппарата, работающего по принципу пружинного динамометра.

Также Л. С. Величко [2], используя методы сопротивления материалов и теоретической механики, изучил распределение напряжения в периодонте в зависимости от степени атрофии лунки и угла наклона зуба. Так, при действии на зуб горизонтальной нагрузки напряжение в периодонте возрастает при увеличении угла наклона зуба и степени атрофии его лунки.

Е. Л. Кириак [5] при лечении небнопрорезавшихся резцов и клыков для более точного дозирования силы ортодонтического аппарата предложил в готовый ортодонтический аппарат при помощи самотвердеющей пластмассы фиксировать градуированную в миллиметрах линейку длиной 1-1,5 см и шириной 0,5 см. В результате 980 измерений 240 ортодонтических аппаратов автор пришел к выводу, что сила действующих частей очень варьирует и зависит от количества изгибов, формы, ширины, величины активации и толщины ортодонтической проволоки. Автор считает, что наиболее целесообразно активировать действующие части ортодонтических аппаратов в среднем на 1 мм один раз в 2 недели.

Э. В. Щербакова [14] для перемещения верхних резцов с клинически здоровой десной рекомендует силу действия ортодонтического аппарата не более 45 г на каждый смещаемый зуб; перемещение верхних клыков целесообразно осуществлять пружиной, имеющей мягкую силовую характеристику (5 г на

каждый миллиметр активации). Автор считает, что ретракционные вестибулярные дуги из ортодонтической проволоки диаметром 0,8 мм в практике ортодонтии не применимы, т. к. не поддаются точной дозировке силы вследствие жесткой силовой характеристики и малой широты активации. Указанных недостатков лишены дуги из проволоки диаметром 0,6 мм.

А. П. Иванов с соавт. [3] подтвердили мнения В. Ю. Курляндского [9], Д. А. Калвелиса [4] о том, что больной сам может правильно дозировать силу действия аппарата, основываясь на болевом рефлексе. Решающую роль в выборе силы ортодонтического аппарата играет индивидуальная реактивная способность организма и состояние фиксирующей способности периодонта.

Материал и методы

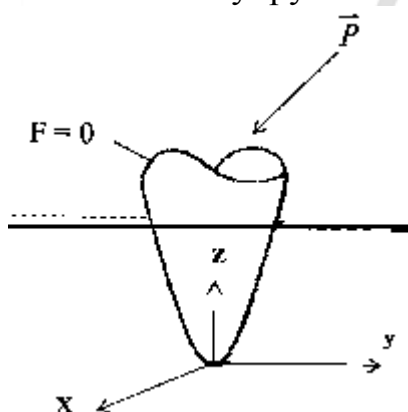
### 1. Постановка задачи

В практике ортопедической стоматологии возникают проблемы, связанные с необходимостью перемещения и поворота зубов при наличии тех или иных дефектов. В связи с этим требуется построение соответствующей модели работы корня зуба в нормальной и ослабленной костной ткани. В виду того, что в системе корень зуба – периодонт – костная ткань, периодонт не может обеспечить необходимые перемещения и повороты для устранения аномалии зубного ряда, то при построении модели будем отдельно учитывать упругость периодонта и упругие характеристики костной ткани.

Так как при устранении аномалии зубного ряда основную роль берет на себя костная ткань, то будем строить модель работы корня зуба непосредственно в костной ткани. Это означает, что общее перемещение зуба можно предположить состоящим из суммы перемещения, вызванного упругими свойствами периодонта, и перемещения, обусловленного упругостью костной ткани. Перемещения зуба с учетом только упругих свойств периодонта определены в ряде работ [10]. В данной работе рассматривается напряженно-деформированное состояние костной ткани в области соединения с корнем зуба.

### 2. Построение расчетной модели

Как и ранее [10], будем предполагать корень зуба абсолютно твердым телом по отношению к упругой костной ткани.



Пусть

$$\bar{U} = (F + 1)^{-1} [\bar{U}_0 + \bar{\varphi} \times (\bar{r} - \bar{r}_0)],$$

есть уравнение поверхности корня зуба в виде эллиптического двуполостного гиперboloида. Тогда упругие перемещения в области костной ткани, примыкающей к корню зуба, определяются по формуле

$$\bar{U} = (F + 1)^{-1} [\bar{U}_0 + \bar{\varphi} \times (\bar{r} - \bar{r}_0)], \quad (1)$$

учитывает, что при удалении от корня зуба перемещения и напряжения неограниченно уменьшаются.

В формуле (1)

$$\bar{U}_0 = iU_0 + jV_0 + kW_0$$

$\bar{r}_0$  – вектор поступательного перемещения корня зуба,

$\bar{r}$  – радиус – вектор полюса (центр сопротивления)

$\bar{\varphi} = i\varphi_x + j\varphi_y + k\varphi_z$  – радиус – вектор произвольной точки костной ткани,

– вектор поворота зуба. При  $F=0$  получаем перемещение и поворот корня зуба как абсолютно твердого тела, т.е. костная ткань в области контакта с корнем зуба ведет себя как одно целое вместе с корнем.

### 3. Составление уравнений равновесия

Для определения поступательных перемещений и углов поворота корня зуба составляем условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на зуб, в том числе и напряжений, возникающих на поверхности контакта корня зуба и костной ткани.

$$\int_S \bar{n} \cdot T ds - \bar{R} = 0, \quad \int_S (\bar{r} - \bar{r}_0) \times (\bar{n} \cdot T) ds - \bar{m} = 0, \quad \text{где}$$

$T$  – тензор напряжений,  $\bar{R}$  и  $\bar{m}$  – соответственно главный вектор и главный момент внешних сил.  $\bar{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности  $S$  корня зуба.

В проекциях на оси координат эти условия записываются в виде:

$$\int_S (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) ds - R_x = 0,$$

$$\int_S (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) ds - R_y = 0,$$

$$\int_S (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) ds - R_z = 0,$$

$$\int_S [y(\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) - (z - z_b)(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)] ds - m_x = 0,$$

$$\int_S [(z - z_a)(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) - (x - x_c)(\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z)] ds - m_y = 0,$$

$$\int_S [(x - x_b)(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) - y(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z)] ds - m_z = 0,$$

где  $x_b, x_c, z_a, z_b$  – координаты центров сопротивления,  $x, y, z, x_y, x_z, y_z$  – компоненты тензора напряжений,  $n_x, n_y, n_z$  – проекции единичной нормали к поверхности корня зуба.

Итак, имеем три центра сопротивления в точках  $A(0, 0, z_b)$ ,  $B(x_b, 0, z_b)$ ,  $C(x_c, 0, 0)$ . В точке  $A$  сила направлена вдоль оси  $x$ , в точке  $B$  сила направлена вдоль оси  $y$ , в точке  $C$  сила направлена вдоль оси  $z$ .

Напряжение вычисляется согласно закону Гука по формулам:

$$\sigma_x = -(F+1)^{-2} G \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot [U_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] \gamma + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial y} \cdot [V_0 + (x - x_b) \varphi_z - (z - z_b) \varphi_x] + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial z} [W_0 + y \varphi_x - (x - x_c) \varphi_y] \right\},$$

$$\sigma_y = -(F+1)^{-2} G \left\{ \gamma \frac{\partial F}{\partial y} \cdot [V_0 + (x - x_b) \varphi_z - (z - z_b) \varphi_x] \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial x} \cdot [U_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial z} [W_0 + y \varphi_x - (x - x_c) \varphi_y] \right\},$$

$$\sigma_z = -(F+1)^{-2} G \left\{ \gamma \frac{\partial F}{\partial z} \cdot [W_0 + y \varphi_x - (x - x_c) \varphi_y] + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial x} \cdot [U_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] + \gamma_2 \frac{\partial F}{\partial y} [V_0 + (x - x_b) \varphi_z - (z - z_b) \varphi_x] \right\},$$

$$\tau_{xy} = -(F+1)^{-2} G \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot [V_0 + (x - x_b) \varphi_z - (z - z_b) \varphi_x] + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot [U_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] \right\},$$

$$\tau_{xz} = -(F+1)^{-2} G \left\{ \frac{\partial F}{\partial x} \cdot [W_0 + y \varphi_x - (x - x_c) \varphi_y] + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot [U_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] \right\},$$

$$\tau_{yz} = -(F+1)^{-2} G \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot [W_0 + y \varphi_x - (x - x_c) \varphi_y] + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot [U_0 + (z - z_a) \varphi_y - y \varphi_z] \right\},$$

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} - \text{упругая постоянная,}$$

$\nu$  - коэффициент Пуассона,

$G$  - модуль сдвига.

4. Определение поступательных перемещений корня зуба в костной ткани под действием произвольной силы

Если на зуб действует произвольная сила, то корень зуба получает три поступательных перемещения вдоль осей координат и три поворота вокруг осей координат.

Определяем сначала поступательное перемещение вдоль оси симметрии корня зуба, т. е. вдоль оси  $x$ . Для этой цели нам понадобится первое уравнение системы (2).

В результате вычисления интегралов, входящих в уравнение, имеем

$$R_x = \frac{\pi G H^2}{2} (a_1 + a_2) b \left\{ (U_0 - z_a \varphi_y) \left[ \left( \frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \frac{1-d^2}{H^2} \right] + \frac{H \varphi_y}{3} \left[ \left( \frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2}{H^2} + \frac{1}{b^2} \right) (1-3d^2 + 2d^3) + \frac{3(1-d^2)}{H^2} \right] \right\},$$

откуда находим поступательное перемещение вдоль оси  $x$

$$U_0 = \frac{2R_x}{\pi G (a_1 + a_2) b \left[ \left( \frac{\gamma H^2}{2a_1 a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1-d^2) + H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln d \right]}$$

и аппликату центра сопротивления

$$z_a = \frac{H \left[ 3(1-d^2) \frac{b^2}{H^2} + \left( \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right]}{3 \left[ (1-d^2) \left( \frac{\gamma b^2}{2a_1 a_2} + \frac{b^2}{H^2} + \frac{1}{2} \right) + \left( 1 + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln d \right]}$$

В этих формулах  $H$  – высота корня зуба,  $a_1, a_2, b$  – полуоси эллипса в сечении корня зуба  $d$ -параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба,  $g_2 = g - 2$ .

Анализ формулы для  $U_0$  показывает, что поступательное перемещение зуба вдоль оси симметрии зависит только от упругих характеристик костной ткани и параметров корня зуба.

Чтобы вычислить перемещение любой точки костной ткани в направлении оси  $x$ , нужно воспользоваться формулой

$$U = \frac{1}{1 + \frac{Z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}} [U_0 + (z - z_a)\varphi_y - y\varphi_x]$$

в которую входят углы поворота  $\varphi_y$  и  $\varphi_x$ .

Из формулы для « $u$ » видно, что с увеличением координаты « $x$ » поступательное перемещение вдоль оси « $x$ » неограниченно уменьшается.

Второе уравнение системы (2) позволяет определить поступательное перемещение  $V_0$  вдоль оси « $y$ », а также координаты сопротивления  $x_b$  и  $z_b$ .

$$U_0 = \frac{2P_y}{\pi G(a_1 + a_2)b \left[ \left( \frac{H^2}{2a_1a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{\gamma}{b^2} + \frac{1}{a_1a_2} \right) d^2 \ln d \right]},$$

$$x_b = \frac{4(a_1 - a_2) \left[ \frac{\gamma H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \sqrt{(1-d^2)^3} \right]}{3\pi \left[ \left( \frac{H^2}{a_1a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + 1 - d^2 \right]},$$

$$z_b = \frac{H \left[ \frac{3b^2}{h^2} (1-d^2) + (1-3d^2 + 2d^2) \left( \frac{b^2}{a_1a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + \gamma \right) \right]}{3 \left[ (1-d^2) \left( \frac{b^2}{2a_1a_2} + \frac{b^2}{H^2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \left( \gamma + \frac{b^2}{a_1a_2} \right) d^2 \ln d \right]},$$

Перемещение любой точки костной ткани в направлении оси « $y$ » вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{1 + \frac{Z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}} [V_0 + (x - x_b)\varphi_x - (z - z_b)\varphi_y]$$

откуда видно, что при неограниченном увеличении координаты « $y$ » « $V$ » стремится к нулю.

Отметим, что поступательное перемещение корня зуба вдоль оси « $y$ » также зависит только от упругих характеристик костной ткани и параметров корня зуба. Мы подчеркиваем, что общее поступательное перемещение складывается из перемещения, вызванного податливостью периодонта, и перемещения, вызванного податливостью костной ткани. В данной работе мы изучаем лишь влияние костной ткани на напряженно-деформированное состояние области контакта корня зуба с костной тканью.

Наконец третье уравнение равновесия системы (3) определяет поступательное перемещение  $W_0$  вдоль оси « $z$ ».

$$W_0 = \frac{2P_z}{\pi G(a_1 + a_2)b \left[ H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \gamma(1-d^2) \right]},$$

$$x_c = \frac{4(a_1 - a_2) \left[ \frac{H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \gamma \sqrt{(1-d^2)^3} \right]}{3\pi \left[ H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) + \gamma(1-d^2) \right]}.$$

Перемещение любой точки костной ткани в направлении оси «z» вычисляется по формуле:

$$W = \frac{1}{1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}} [W_0 + (x\varphi_x - (x-x_c)\varphi_y)]$$

С увеличением координаты «z» перемещение w стремится к нулю, что и должно быть в действительности.

5. Определение углов поворота корня зуба в костной ткани под действием произвольной силы

Последние три уравнения системы (2) определяют углы поворота корня зуба вокруг осей координат, причем вследствие наличия плоскости симметрии XOZ угол поворота  $\varphi_y$  вокруг оси «y» определяется независимо от других из пятого уравнения системы (2).

$$m_x m_x + m_x z m_z = m_x,$$

$$m_y m_y = m_y,$$

$f_x z f_x + f_z f_z = m_z$ , где  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$ ,  $f_x z$  – жесткости зуба при вращении вокруг осей координат.

$m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  – моменты внешних сил относительно соответствующих осей координат.

Жесткость  $f_x$  характеризует момент сил, который нужно приложить к зубу, чтобы повернуть на угол, который нужно приложить к зубу, чтобы повороты на угол  $f_x = 1$ .

Аналогично  $f_y$  и  $f_z$ , а вот  $f_x z$  характеризует момент сил, который нужно приложить вокруг оси «x», чтобы повернуть зуб вокруг оси «z» на угол  $f_z = 1$ .

Формулы для жесткостей  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ ,  $a_x z$  достаточно сложны и зависят от всех параметров зуба  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b$ ,  $H$ ,  $d$  и упругих характеристик костной ткани.

$$\mu_x = \frac{\pi G(a_1 + a_2)bH^2}{8} \left\{ (1-d^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a_1a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \frac{(1-d^2)}{2} \left( 5 - \frac{b^2}{a_1a_2} \right) - d^4 \left( 3 + \frac{b^2}{a_1a_2} \right) \ln d - \frac{4z_b}{3H} \left[ 2(1-d^2) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right] \right\},$$

$$\mu_y = \frac{\pi G(a_1 + a_2)bH^2}{8} \left\{ \left[ 1-d^2 \right]^2 \left( \frac{H^2}{b^2} + \frac{\gamma H^2}{a_1a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} + \left( \frac{\gamma}{H^2} + \frac{3}{4b^2} \right) (a_1^2 - a_1a_2 - a_2^2) \right) - \left( \frac{1-d^2}{2} \right) \left[ \frac{a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2}{b^2} - 5 \right] - \left( \frac{a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2}{b^2} + 3 \right) d^4 \ln d - \frac{8(1-d^2)z_a}{3H} - \frac{4z_a}{3H} \left( \frac{H^2}{b^2} + \frac{\gamma H^2}{a_1a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) - \frac{16(a_1 - a_2)x_c}{3\pi b^2} \left[ \frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{\gamma b^2}{H^2} (1-d^2)^{3/2} \right] \right\},$$

$$\mu_z = \frac{\pi G(a_1 + a_2)bH^2}{8} \left\{ \left[ \frac{\gamma(a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2)}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a_1a_2} - 2\gamma + 8 \right] \left[ \frac{(1-d^2)^2}{4} - d^2 \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln d \right) \right] + \frac{(1-d^2)^2}{H^2} (a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2 + b^2) - \frac{16\gamma x_b(a_1 - a_2)}{3\pi b^2} \left[ \frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{b^2}{\gamma H^2} (1-d^2)^{3/2} \right] \right\},$$

$$\mu_{xz} = -\frac{2GH(a_1^2 - a_2^2)b}{3} \left\{ \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \gamma_2 \right) \left[ \frac{(1-d^2)^{3/2}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3}{8} d^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d} \right] + (1-d^2)^{3/2} + \frac{\gamma H_{z0}}{b^2(a_1 + a_2)} \left[ \frac{(1-d^2)^{3/2}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{b^2}{\gamma H^2} (1-d^2)^{3/2} \right] \right\}.$$

### Результаты и обсуждение

Полученные формулы для поступательных перемещений зуба показывают прежде всего зависимость от модуля сдвига костной ткани. Чем больше модуль сдвига, тем меньше перемещения. Следовательно, если при ультразвуковом воздействии уменьшается модуль сдвига в два раза, то все поступательные перемещения зуба (зубного ряда) соответственно увеличиваются в два раза [8]. Что касается влияния коэффициента Пуассона «I», то следует отметить незначительное увеличение перемещений зуба с уменьшением коэффициента Пуассона.

Следует отметить также влияние геометрии корня зуба на поступательные перемещения. Характер этого влияния достаточно сложен, как видно из вышеперечисленных формул, в которых участвуют как высота корня зуба «H», размеры поперечного сечения корня «a1», «a2» и «b», а также параметр закругления «d».

Полученные формулы для поступательных перемещений и углов поворота позволяют решать и обратную задачу, что особенно важно для стоматологической практики. Речь идет об определении величины силы и точки приложения ее при заданных поступательных перемещениях и поворотах зуба (зубного ряда). При устранении дефекта зубного ряда мы знаем, насколько нужно переместить ряд в том или ином направлении и повернуть его вокруг той или иной оси. Формулы для поступательных перемещений при этом дают возможность определить



проекция силы, а формулы для углов поворота позволяют определить координаты точки приложения искомой силы, что в свою очередь дает теоретическое обоснование различных устройств и аппаратов, необходимых для осуществления устранения дефектов.

Исследование формул для жесткости при повороте зуба вокруг осей координат показывает их прямую пропорциональность от модуля сдвига  $G$ . Это означает, что при уменьшении модуля сдвига в несколько раз, что возможно при ультразвуковом воздействии, во столько раз уменьшается жесткость, а это обстоятельство позволяет осуществить поворот зуба (зубного ряда) на нужный угол.

#### Выводы

1. При уменьшении модуля сдвига костной ткани происходит соответственно увеличение поступательных перемещений зуба (зубного ряда).
2. Полученные формулы позволяют теоретически обосновать проекцию и координату приложения силы, а также выбор ортодонтического аппарата для исправления зубочелюстных аномалий.

#### Литература

1. Барина, Л. П. Характеристика действия пружинящих расширяющих дуг в съёмных ортодонтических аппаратах // *Стоматология*. 1970. № 1. С. 39-42.
2. Величко, Л. С. Ортодонтическое лечение и протезирование при недоразвитии верхней челюсти в сформированном прикусе: Автореф. дис.... канд. мед. наук: 14.00.21 / Моск. мед. стоматол. ин-т. М., 1965. 15 с.
3. Иванов, А. П., Щербакова, Э. В., Щербаков, В. И. Динамика подвижности зубов в процессе перемещения дозированной нагрузкой / *Волгогр. мед. ин-т*. Волгоград, 1990. Утв. 29.05.90. 9 с.
4. Калвелис, Д. А. Биоморфологические изменения при ортодонтическом лечении зубочелюстных аномалий // *Руководство по ортопедической стоматологии* / Под ред. А.И.Евдокимова. М.: Медицина, 1974. Гл. 7. С. 454-455.
5. Кириак, Е. Л. Лечение небного положения зубов и медиально-смещенных клыков дозированным методом // *Науч. труд Центр. ин-та усовершенствования врачей*. 1973. Т. 175. С. 136-139.
6. Климашин, Ю. М. Использование метода математического моделирования для оценки состояния парадонта // *Стоматология*. 1977. № 2. С.57-63.
7. Козел, А. В. Пути оптимизации ортодонтического лечения при сформированном прикусе: Автореф. дис.... канд.мед.наук: 14.00.21 / Моск.мед.стоматол. ин-т им. Н. А. Семашко. М., 1985. 23с.
8. Крушевский, А. Е., Ивашенко, С. В. Определение перемещений зуба с учётом изменений характеристик костной ткани альвеолярного отростка // *Медицинский журнал*. 2007. № 3. С. 62-65.
9. Курляндский, В. Ю. Ортопедическая стоматология. М.: Медицина, 1977. 488 с.
10. Наумович, С. А., Крушевский, А. Е. «Биомеханика системы зуб-периодонт». Изд. Экономические технологии. Минск. 2000. 186 с.
11. Позднякова, А. И., Куриленко, В. С. К вопросу о рациональном применении ортодонтической аппаратуры // *Проблемы ортопедической стоматологии: Респ. межвед. сб.* Киев, 1968. Вып. 2. С. 110-115.
12. Соснин, Г. П. Бюгельные протезы. Минск: Наука и техника, 1981. 344с.

13. Шварц, А. Д. Направление сил-важнейший фактор диагностики и лечения зубов // Новое в стоматологии. 1977. № 2.
14. Э. В. Щербакова [198] А мнения Щербакова, Э. В. Обоснование силового режима ортодонтического лечения прогнатического прикуса с учетом функционального состояния пародонта у детей в возрасте 12-15 лет: Автореф. дис.... канд. мед. наук: 14.00.21 / Калинин. гос. мед. ин-т. Калинин, 1989. 19 с.
15. Eykhoff, P. // Identif and Syst.Parametr Esttimat. 1985.
16. Schwarz, A. M. Tissue Changes Incidental to Ortodontic Toothmovement // Int. J. Orthod. 1932. Vol. 18. P. 331.