МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.И. Инсарова, В.Г. Лещенко

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебно-методическое пособие

Минск 2003

УДК 519 (075.8)
ББК 22.171 я 73
И 69

А в т о р ы : доц. Н.И. Инсарова, доц. В.Г. Лещенко.

Р е ц е н з е н т ы : доц. каф. инженерной математики Белорусского национального технического университета В.Я. Анисимов; зав. каф. гистологии, цитологии и эмбриологии, проф. Б.А. Слука; доц. каф. общественного здоровья и здравоохранения М.В. Мальковец

Утверждено Научно-методическим советом университета
в качестве учебно-методического пособия 15.01.03., протокол № 4

Инсарова Н.И.

И 69 Элементы теории вероятностей и математической статистики: Учеб.-метод. пособие / Н.И. Инсарова, В.Г. Лещенко. – Мн.: БГМУ, 2003. – 66 с.

ISBN 985-462-236-3

Рассматриваются основные идеи и понятия теории вероятностей, математической статистики и статистического анализа опытных данных. Их использование в современной медицине и биологии иллюстрируется многочисленными профессионально ориентированными примерами.

Предназначается для студентов первого курса медицинских вузов.

УДК 519 (075.8)
ББК 22.171 я 73

ISBN 985-462-236-3

Чтобы переварить знания,

надо поглощать их с аппетитом.

Анатоль Франс

Введение

Пособие состоит из двух частей, логически связанных друг с другом.

В первой части (главы I и II) раскрывается суть основных понятий и теорем теории вероятностей, которая составляет основу математической статистики. Причем материал излагается не в строго формальной математической форме (это привлекательно только для математиков), а главным образом на общепонятийном уровне. Здесь обсуждаются такие понятия, как случайное событие и случайная величина, их вероятности, экспериментальная оценка этих вероятностей, основные числовые характеристики случайных величин, их законы распределения.

Во второй части (глава III) определены базовые понятия математической статистики, так как без них невозможно осмысленно применять методы статистического анализа данных. К таким понятиям относятся прежде всего генеральная совокупность, выборка, статистическая гипотеза. В этой части также рассматриваются стандартные приемы работы с выборкой, анализ нормальных выборок, исследование связи признаков, некоторые способы проверки согласия статистической гипотезы с данными опыта, т. е. собственно статистические методы анализа данных.

Более подробно и шире все эти вопросы отражены в источниках, указанных в списке литературы, приведенном в конце пособия.

Читателю это пособие, несмотря на старания авторов, может показаться сложным и чрезмерно математизированным. Однако сегодняшние тенденции, определяющие политику в области здоровья и здравоохранения, развитие доказательной медицины, суть которой состоит в установлении связей между результатами и технологиями, обеспечивающими качество медицинской помощи, требуют достаточно глубоких знаний в области статистики. Вот почему просто необходимо уже в самом начале получения медицинского образования осваивать «азы» теории вероятностей и математической статистики. Причем будущий врач должен понимать, что каждый из методов, разрабатываемых этими науками, имеет свои возможности и ограниченную область применения. Только цель исследования и характер полученных данных определяют выбор математического аппарата для их обработки.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность рецензентам — профессору Б.А. Слуке и доценту М.В. Мальковец — за поддержку идеи издания настоящей работы, доценту В.Я. Анисимову, чьи советы и пожелания оказались весьма полезными при написании отдельных разделов пособия.

Нам хочется поблагодарить также всех тех, чья техническая помощь была очень важна при подготовке рукописи к печати.

Глава I. Случайные события. Вероятность

1.1. Закономерность и случайность, случайная изменчивость в точных науках, в биологии и медицине

Теория вероятностей — область математики, изучающая закономерности в случайных явлениях. Случайное явление — это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта может протекать каждый раз несколько по-иному.

Очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности, но в различных ситуациях мы учитываем их по-разному. Так, в ряде практических задач ими можно пренебречь и рассматривать вместо реального явления его упрощенную схему — «модель», предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом выделяются самые главные, решающие факторы, характеризующие явление. Именно такая схема изучения явлений чаще всего применяется в физике, технике, механике. Именно так выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению и дающая возможность предсказать результат опыта по заданным исходным условиям. А влияние случайных, второстепенных, факторов на результат опыта учитывается здесь случайными ошибками измерений (методику их расчета рассмотрим далее).

Однако описанная классическая схема так называемых точных наук плохо приспособлена для решения многих задач, в которых многочисленные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную (часто определяющую) роль. Здесь на первый план выступает случайная природа явления, которой уже нельзя пренебречь. Это явление необходимо изучать именно с точки зрения закономерностей, присущих ему как случайному явлению. В физике примерами таких явлений служат броуновское движение, радиоактивный распад, ряд квантово-механических процессов и др.

Предмет изучения биологов и медиков — живой организм, зарождение, развитие и существование которого определяется очень многими и разнообразными, часто случайными внешними и внутренними факторами. Именно поэтому явления и события живого мира во многом тоже случайны по своей природе.

Элементы неопределенности, сложности, многопричинности, присущие случайным явлениям, обусловливают необходимость создания специальных математических методов для изучения этих явлений. Разработка таких методов, установление специфических закономерностей, свойственных случайным явлениям, — главные задачи теории вероятностей. Характерно, что эти закономерности выполняются лишь при массовости случайных явлений. Причем индивидуальные особенности отдельных случаев как бы взаимно погашаются, а усредненный результат для массы случайных явлений оказывается уже не случайным, а вполне закономерным. В значительной мере данное обстоятельство послужило причиной широкого распространения вероятностных методов исследования в биологии и медицине.

Рассмотрим основные понятия теории вероятностей.

1.2. Вероятность случайного события

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, базируется на ряде основных понятий. Например, в геометрии — это понятия точки, прямой линии; в механике — понятия силы, массы, скорости и т. д. Основные понятия существуют и в теории вероятностей, одно из них — случайное событие.

Случайное событие — это всякое явление (факт), которое в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Случайные события обозначаются буквами А, В, С … и т. д. Приведем несколько примеров случайных событий:

А — выпадение орла (герба) при подбрасывании стандартной монеты;

В — рождение девочки в данной семье;

С — рождение ребенка с заранее заданной массой тела;

D — возникновение эпидемического заболевания в данном регионе в определенный период времени и т. д.

Основной количественной характеристикой случайного события является его вероятность. Пусть А — какое-то случайное событие. Вероятность случайного события А — это математическая величина, которая определяет возможность его появления. Она обозначается Р(А).

Рассмотрим два основных метода определения данной величины.

Классическое определение вероятности случайного события обычно базируется на результатах анализа умозрительных опытов (испытаний), суть которых определяется условием поставленной задачи. При этом вероятность случайного события Р(А)равна:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m — число случаев, благоприятствующих появлению события А; n — общее число равновозможных случаев.

Пример 1. Лабораторная крыса помещена в лабиринт, в котором лишь один из четырех возможных путей ведет к поощрению в виде пищи. Определите вероятность выбора крысой такого пути.

***Решение*: по условию задачи из четырех равновозможных случаев (*n*=4) событию *A* (крыса находит пищу) благоприятствует только один, т. е. *m* = 1. Тогда:**

$$P(A) = P\text{ (крыса находит пищу)} = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%.$$

Пример 2. В урне 20 черных и 80 белых шаров. Из нее наугад вынимается один шар. Определите вероятность того, что этот шар будет черным.

Решение: количество всех шаров в урне — это общее число равновозможных случаев n, т. е. $n = 20 + 80 = 100$, из них событие A (извлечение черного шара) возможно лишь в 20, т. е. $m = 20$. Тогда:

$$P(A) = P(\text{ч.ш.}) = \frac{m}{n} = \frac{20}{100} = 0{,}2 = 20\%.$$

Перечислим свойства вероятности, следующие из ее классического определения, — формула (1).

1. Вероятность случайного события — величина безразмерная.

2. Вероятность случайного события всегда положительна и меньше единицы, т. е. $0 < P(A) < 1$.

3. Вероятность достоверного события, т. е. события, которое в результате опыта обязательно произойдет ($m = n$), равна единице.

4. Вероятность невозможного события ($m = 0$) равна нулю.

5. Вероятность любого события — величина не отрицательная и не превышающая единицу: $0 \le P(A) \le 1$.

Статистическое определение вероятности случайного события применяется тогда, когда невозможно использовать классическое определение (1). Это часто имеет место в биологии и медицине. В таком случае вероятность $P(A)$ определяют путем обобщения результатов реально проведенных серий испытаний (опытов).

Введем понятие относительной частоты появления случайного события. Пусть была проведена серия испытаний, состоящая из N опытов (число N может быть выбрано заранее); интересующее нас событие A произошло в M из них ($M < N$). Отношение числа опытов M, в которых произошло это событие, к общему числу проведенных опытов N называют относительной частотой появления случайного события A в данной серии опытов — $P^*(A)$:

$$P^*(A) = \frac{M}{N}.$$

Экспериментально установлено, что если серии испытаний (опытов) проводятся в одинаковых условиях и в каждой из них число N достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости: от серии к серии она меняется мало, приближаясь с увеличением числа опытов к некоторой постоянной величине. Ее и принимают за статистическую вероятность случайного события A:

$$P(A) = \lim \frac{M}{N}, \text{ при } N \to \infty. \qquad (2)$$

Итак, статистической вероятностью $P(A)$ случайного события A называют предел, к которому стремится относительная частота появления этого события при неограниченном возрастании числа испытаний (при $N \to \infty$).

Приближенно статистическая вероятность случайного события равна относительной частоте появления этого события при большом числе испытаний:

$$P(A) \approx P^*(A) = \frac{M}{N} \text{ (при больших } N). \qquad (3)$$

Например, в опытах по бросанию монеты относительная частота выпадения герба при 12000 бросаний оказалась равной 0,5016, а при 24000 бросаний — 0,5005. В соответствии с формулой (1):

$$P(\text{герб}) = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%.$$

Пример. При врачебном обследовании 500 человек у 5 из них обнаружили опухоль в легких (о.л.). Определите относительную частоту и вероятность этого заболевания.

Решение: по условию задачи $M = 5$, $N = 500$, относительная частота $P^*(\text{о.л.}) =$

M/N = 5/500 = 0,01; поскольку N велико, можно с достаточной точностью считать, что вероятность наличия опухоли в легких равна относительной частоте этого события:

$$P(\text{о.л.}) = P^*(\text{о.л.}) = 0{,}01 = 1\%.$$

Перечисленные ранее свойства вероятности случайного события сохраняются и при статистическом определении данной величины.

1.3. Виды случайных событий. Основные теоремы теории вероятностей

Все случайные события можно разделить на:

– несовместные;
– независимые;
– зависимые.

Для каждого вида событий характерны свои особенности и теоремы теории вероятностей.

1.3.1. Несовместные случайные события. Теорема сложения вероятностей

Случайные события (A, B, C, D …) называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Подброшена монета. При ее падении появление «герба» исключает появление «решки» (надписи, определяющей цену монеты). События «выпал герб» и «выпала решка» несовместные.

Пример 2. Получение студентом на одном экзамене оценки «2», или «3», или «4», или «5» — события несовместные, так как одна из этих оценок исключает другую на том же экзамене.

Для несовместных случайных событий выполняется теорема сложения вероятностей: вероятность появления одного, но все равно какого, из нескольких несовместных событий A_1, A_2, A_3 … A_k равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 \text{или } A_2 \text{ … или } A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k). \quad (4)$$

Пример 3. В урне находится 50 шаров: 20 белых, 20 черных и 10 красных. Найдите вероятность появления белого (событие A) или красного шара (событие B), когда шар наугад достают из урны.

Решение: $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$;
$P(A) = 20/50 = 0{,}4$;
$P(B) = 10/50 = 0{,}2$;
$P(A$ или $B)$ = P(б.ш. или к.ш.) = $0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6 = 60\%$.

Пример 4. В классе 40 детей. Из них в возрасте от 7 до 7,5 лет 8 мальчиков (A) и 10 девочек (B). Найдите вероятность присутствия в классе детей такого возраста.

Решение: $P(A) = 8/40 = 0{,}2$; $P(B) = 10/40 = 0{,}25$;

$$P(A \text{ или } B) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45 = 45\%.$$

Следующее важное понятие — полная группа событий. *Несколько несовмест-*

ных событий образуют полную группу событий, если в результате каждого испытания может появляться только одно из событий этой группы и никакое другое.

П р и м е р 5. Стрелок произвел выстрел по мишени. Обязательно произойдет одно из следующих событий: попадание в «десятку», в «девятку», в «восьмерку»,.. ,в «единицу» или промах. Эти 11 несовместных событий образуют полную группу.

П р и м е р 6**.** На экзамене в вузе студент может получить одну из следующих четырех оценок: 2, 3, 4 или 5. Эти четыре несовместных события также образуют полную группу.

Если несовместные события A_1, A_2 ... A_k образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий всегда равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_k) = 1. \qquad (5)$$

Это утверждение часто используется при решении многих прикладных задач.

Если два события единственно возможны и несовместны, то их называют противоположными и обозначают A и **«**$\overline{A}$**».** Такие события составляют полную группу, поэтому сумма их вероятностей всегда равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (6)$$

П р и м е р 7. Пусть $P(A)$ — вероятность летального исхода при некотором заболевании; она известна и равна 2%. Тогда вероятность благополучного исхода при этом заболевании равна 98% ($P(\overline{A}) = 1 — P(A) = 0{,}98$), так как $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

1.3.2. Независимые случайные события. Теорема умножения вероятностей

Случайные события называются независимыми, если появление одного из них никак не влияет на вероятность появления других событий.

П р и м е р 1. Если есть две или более урны с цветными шарами, то извлечение какого-либо шара из одной урны никак не повлияет на вероятность извлечения других шаров из оставшихся урн.

Для независимых событий справедлива *теорема умножения вероятностей: вероятность совместного* (*одновременного*) *появления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей:*

$$P(A_1 \text{и } A_2 \text{ и } A_3 \ldots \text{ и } A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k). \qquad (7)$$

Совместное (одновременное) появление событий означает, что происходят события и A_1, и A_2, и A_3 … и A_k .

П р и м е р 2**.** Есть две урны. В одной находится 2 черных и 8 белых шаров, в другой — 6 черных и 4 белых. Пусть событие A — выбор наугад белого шара из первой урны, B — из второй. Какова вероятность выбора наугад одновременно из этих урн по белому шару, т. е. чему равна P (A и B)?

Решение: вероятность достать белый шар из первой урны $P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$, из второй — $P(B) = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Вероятность одновременно достать по белому шару из обеих урн — $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 = 0{,}32 = 32\%$.

П р и м е р 3. Рацион с пониженным содержанием йода вызывает увеличение щитовидной железы у 60% животных большой популяции. Для эксперимента нужны

4 увеличенных железы. Найдите вероятность того, что у 4 случайно выбранных животных будет увеличенная щитовидная железа.

Решение: случайное событие A — выбор наугад животного с увеличенной щитовидной железой; согласно условию задачи вероятность этого события $P(A) = 0,6 = 60\%$; тогда вероятность совместного появления четырех независимых событий — выбор наугад 4 животных с увеличенной щитовидной железой — будет равна:

$$P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3 \text{ и } A_4) = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = (0,6)^4 \approx 0,13 = 13\%.$$

1.3.3. Зависимые события. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

Случайные события A и B называются зависимыми, если появление одного из них, например, A изменяет вероятность появления другого события — B. Поэтому для зависимых событий используются два значения вероятности: безусловная и условная вероятности**.**

Если A и B — зависимые события, то вероятность наступления события B первым (т. е. до события A) называется *безусловной вероятностью* этого события и обозначается $P(B)$. Вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло, называется *условной вероятностью* события B и обозначается $P(B/A)$ или $P_A(B)$.

Аналогичный смысл имеют безусловная — $P(A)$ и условная — $P(A/B)$ вероятности для события A.

Теорема умножения вероятностей для двух зависимых событий: вероятность одновременного наступления двух зависимых событий (A и B) равна произведению безусловной вероятности первого события на условную вероятность второго:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A), \tag{8}$$

если первым наступает событие A, или

$$P(A \text{ и } B) = P(B) \cdot P(A/B), \tag{9}$$

если первым наступает событие B.

Пример 1. В урне 3 черных шара и 7 белых. Найдите вероятность того, что из этой урны один за другим (причем первый шар не возвращают в урну) будут вынуты 2 белых шара.

Решение: вероятность достать первый белый шар (событие A) равна 7/10; после того как он вынут, в урне остается 9 шаров, из них 6 белых; тогда вероятность появления второго белого шара (событие B) равна $P(B/A) = 6/9$, а вероятность достать подряд два белых шара равна:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0,47 = 47\%.$$

Приведенная теорема умножения вероятностей для зависимых событий допускает обобщение на любое количество событий. В частности, для 3 событий, связанных друг с другом:

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB). \tag{10}$$

Пример 2. В двух детских садах, каждый из которых посещает по 100 детей, произошла вспышка инфекционного заболевания. Доли заболевших составляют соответственно 1/5 и 1/4, причем в первом учреждении 70 %, а во втором — 60 % заболевших — дети младше 3 лет. Случайным образом выбирают одного ребенка. Определите, с какой вероятностью выбранный ребенок относится:

1) к первому детскому саду (событие A) и болен (событие B);

2) ко второму детскому саду (событие C), болен (событие D) и старше 3 лет (событие E).

Решение: 1) искомая вероятность —

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{100}{200} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1 = 10\%;$$

2) искомая вероятность —

$$P(C \text{ и } D \text{ и } E) = P(C) \cdot P(D/C) \cdot P(E/CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}05 = 5\%.$$

Формула Байеса

Если вероятность совместного появления зависимых событий A и B не зависит от того, в каком порядке они происходят, то $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$. В этом случае условную вероятность одного из событий можно найти, зная вероятности обоих событий и условную вероятность второго:

$$P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)} . \tag{11}$$

Обобщением данной формулы на случай многих событий является формула Байеса.

Пусть n несовместных случайных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий. Вероятности этих событий — $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ — известны и, так как они образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Некоторое случайное событие A связано с событиями $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Причем известны условные вероятности появления события A с каждым из событий H_i, т. е. известны $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$. При этом сумма условных вероятностей $P(A/H_i)$ может быть не равна единице, т. е. $\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \neq 1$. Тогда условная вероятность появления события H_i при реализации события A (т. е. при условии, что событие A произошло) определяется формулой Байеса:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)} . \tag{12}$$

Причем для этих условных вероятностей $\sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) = 1$.

Формула Байеса нашла широкое применение не только в математике, но и в медицине. Например, она используется для вычисления вероятностей тех или иных заболеваний. Так, если $H_1, \ldots, H_n$ — предполагаемые диагнозы для данного пациента, A — некоторый признак, имеющий отношение к ним (симптом, определенный показатель анализа крови или мочи, деталь рентгенограммы и т. д.), а условные вероятности $P(A/H_i)$ проявления этого признака при каждом диагнозе H_i ($i = 1,2,3,\ldots n$) заранее известны, то формула Байеса (12) позволяет вычислить условные вероятности заболеваний (диагнозов) $P(H_i/A)$ после того как установлено, что характерный признак A присутствует у пациента.

Пример 1. При первичном осмотре больного предполагаются 3 диагноза — H_1, H_2, H_3. Их вероятности, по мнению врача, распределяются так: $P(H_1) = 0{,}5$; $P(H_2) = 0{,}17$; $P(H_3) = 0{,}33$. Следовательно, предварительно наиболее вероятным кажется первый диагноз. Для его уточнения назначается, например, анализ крови, в котором ожидается увеличение СОЭ (событие A). Заранее известно (на основании результатов исследований), что вероятности увеличения СОЭ при предполагаемых заболеваниях равны:

$$P(A/H_1) = 0{,}1;\ P(A/H_2) = 0{,}2;\ P(A/H_3) = 0{,}9.$$

В полученном анализе зафиксировано увеличение СОЭ (событие A произошло). Тогда расчет по формуле Байеса (12) дает значения вероятностей предполагаемых заболеваний при увеличенном значении СОЭ: $P(H_1/A) = 0{,}13$; $P(H_2/A) = 0{,}09$; $P(H_3/A) = 0{,}78$. Эти цифры показывают, что с учетом лабораторных данных наиболее реален не первый, а третий диагноз, вероятность которого теперь оказалась достаточно большой.

Приведенный пример — простейшая иллюстрация того, как с помощью формулы Байеса можно формализовать логику врача при постановке диагноза и благодаря этому создать методы компьютерной диагностики.

Пример 2. Определите вероятность, оценивающую степень риска перинатальной* смертности ребенка у женщин с анатомически узким тазом.

Решение: пусть событие H_1 — благополучные роды; согласно клиническим отчетам, $P(H_1) = 0{,}975 = 97{,}5$ %, тогда, если H_2 — факт перинатальной смертности, то $P(H_2) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025 = 2{,}5$ %.

Обозначим A — факт наличия узкого таза у роженицы. Из проведенных исследований известны: а) $P(A/H_1)$ — вероятность узкого таза при благоприятных родах, $P(A/H_1) = 0{,}029$, б) $P(A/H_2)$ — вероятность узкого таза при перинатальной смертности, $P(A/H_2) = 0{,}051$. Тогда искомая вероятность перинатальной смертности при узком тазе у роженицы рассчитывается по формуле Байса (12) и равна:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}025\cdot 0{,}051}{0{,}975\cdot 0{,}029 + 0{,}025\cdot 0{,}051} = 0{,}044 = 4{,}4\%.$$

Таким образом, риск перинатальной смертности при анатомически узком тазе значительно выше (почти вдвое) среднего риска (4,4% против 2,5%).

Подобные расчеты, обычно выполняемые с помощью компьютера, лежат в основе методов формирования групп пациентов повышенного риска, связанного с наличием того или иного отягощающего фактора.

---

* Перинатальный период охватывает внутриутробное развитие плода, начиная с 28-й недели беременности, период родов и первые 7 суток жизни ребенка.

Формула Байеса очень полезна для оценки многих других медико-биологических ситуаций, что станет очевидным при решении приведенных в пособии задач.

О случайных событиях с вероятностями, близкими к 0 или к 1

При решении многих практических задач приходится иметь дело с событиями, вероятность которых очень мала, т. е. близка к нулю. На основании опыта в отношении таких событий принят следующий принцип. Если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании оно не наступит, иначе говоря, возможностью его появления можно пренебречь. Ответ на вопрос, насколько малой должна быть эта вероятность, определяется существом решаемых задач, тем, насколько важен для нас результат предсказания. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то применение таких парашютов недопустимо. Однако равная той же 0,01 вероятность того, что поезд дальнего следования прибудет с опозданием, делает нас практически уверенными в том, что он прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, при которой (в данной конкретной задаче) событие можно считать практически невозможным, называют *уровнем значимости.* На практике уровень значимости обычно принимают равным 0,01 (однопроцентный уровень значимости) или 0,05 (пятипроцентный уровень значимости), намного реже он берется равным 0,001.

Введение уровня значимости позволяет утверждать, что если некоторое событие A практически невозможно, то противоположное событие $\overline{A}$ — практически достоверно, т. е. для него $P(\overline{A}) \approx 1$.

Задачи

1. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна из них. Какова вероятность того, что число на этой карточке окажется кратным 5?

Ответ: 0,2.

2. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

Ответ: 0,1.

3. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные — к первому. Найдите относительную частоту появления изделий 1) первого сорта; 2) второго сорта?

Ответ: 1) 0,95; 2) 0,05.

4. В цехе работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 2 человека. Найдите вероятность того, что они окажутся мужчинами?

Ответ: 7/15.

5. Примерно 1 ребенок из 700 рождается с синдромом Дауна. В больнице большого города в год рождается 3500 детей. Каково ожидаемое число новорожденных с синдромом Дауна?

Ответ: 5.

6. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй — 0,3. Какова вероятность попадания в первый либо во второй сектор?

Ответ: 0,7.

7. В большой популяции плодовой мушки у 25% особей — мутация глаз, у остальных — мутация крыльев. Найдите вероятность того, что у особи, выбранной наудачу, из этой популяции, окажется хотя бы одна из мутаций.

Ответ: 1.

8. Лечение определенного заболевания дает эффект (выздоровление) в 75% случаев. Оно проводилось шести больным. Какова вероятность того, что: 1) выздоровят все шестеро; 2) не выздоровит ни один?

Ответ: 1) 18 %; 2) 0,025 %.

9. Операция пересадки кожи дает успех в 40 % всех случаев. Пациенту делают пересадку кожи несколько раз подряд до тех пор, пока она не удается. Какова вероятность того, что пересадка окажется успешной: 1) с первой попытки; 2) с третьей попытки?

Ответ: 1) 0,4; 2) 0,144.

10. Студент пришел на экзамен, зная ответы на 40 из 50 вопросов программы. В билете 3 вопроса. Найдите вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса билета.

Ответ: 0,5.

11. На двух фермах A и B, насчитывающих по 1000 голов крупного рогатого скота, произошла вспышка заболевания ящуром. Доли зараженного скота составляют соответственно 1/5 и 1/4. Если на каждой ферме 70% зараженного скота младше одного года, то какова вероятность того, что выбранная случайным образом корова: 1) принадлежит ферме A и болеет; 2) принадлежит ферме B, болеет и старше одного года?

Ответ: 1) 1/10; 2) 3/80.

12. [*]Одна вакцина формирует иммунитет по отношению к краснухе в 95% случаев. Предположим, что вакцинировалось 30% популяции и что вероятность заболеть краснухой у вакцинированного человека без иммунитета такая же, как и у невакцинированного. Какова вероятность того, что человек, заболевший краснухой, был вакцинирован?

Ответ: 3/143.

[*] Задача решается с применением формулы Байеса.

13. *Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддается диагностике. Один грубый тест на это заболевание дает положительный результат (указывает на наличие заболевания) в 60% случаев, когда пациент действительно болен, и в 30 % случаев, когда у пациента этого заболевания нет. Пусть для конкретного пациента этот тест дает положительные результат. Какова вероятность того, что у него есть данное заболевание?

Ответ: 0,095.

14. *На одном производстве было установлено, что 3% рабочих являются алкоголиками с показателем прогулов втрое выше, чем у остальных. Если случайно выбранный рабочий отсутствует на работе, то какова вероятность того, что он алкоголик?

Ответ: 0,085.

15. *Большая популяция разбита на две группы одинаковой численности. Одна группа придерживалась специальной диеты с высоким содержанием ненасыщенных жиров, а контрольная группа питалась по обычной диете, богатой насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно-сосудистых заболеваний в группах составило соответственно 31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек страдает сердечно-сосудистым заболеванием. Какова вероятность того, что он принадлежит к контрольной группе?

Ответ: $48/79 \approx 0{,}61$.

16. *Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие. Предположим, 60% мужской популяции курит. Найдите вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, был курящим?

Ответ: $15/16 \approx 0{,}9375$.

17. *Установлено, что в среднем один из 700 детей мужского пола рождается с лишней Y-хромосомой и что среди таких детей крайне агрессивное поведение встречается в 20 раз чаще. Опираясь на эти данные, представьте, что у мальчика крайне агрессивное поведение. Какова вероятность того, что ребенок имеет лишнюю Y-хромосому?

Ответ: $20/719 \approx 0{,}028$.

---

* Задача решается с применением формулы Байеса.

Глава II. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Виды случайных величин

В математике величина — это общее название различных количественных характеристик предметов и явлений. Длина, площадь, температура, давление и т. д. — примеры разных величин.

Величина, которая принимает различные числовые значения под влиянием случайных обстоятельств, называется случайной величиной. Примеры случайных величин: число больных на приеме у врача; точные размеры внутренних органов людей и т. д.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины**.**

Случайная величина называется дискретной, если она принимает только определенные, отделенные друг от друга значения, которые можно установить и перечислить.

Примерами дискретной случайной величины являются:

– число студентов в аудитории — может быть только целым положительным числом: 0, 1, 2, 3, 4….. 20…..;

– цифра, которая появляется на верхней грани при бросании игральной кости, — может принимать лишь целые значения от 1 до 6;

– относительная частота попадания в цель при 10 выстрелах — ее значения: 0; 0,1; 0,2; 0,3 …1;

– число событий, происходящих за одинаковые промежутки времени: частота пульса, число вызовов скорой помощи за 1 час, количество операций в месяц с летальным исходом и т. д.

Случайная величина называется непрерывной, если она может принимать любые значения внутри определенного интервала, который иногда имеет резко выраженные границы, а иногда — нет[*]. К непрерывным случайным величинам относятся, например, масса тела и рост взрослых людей, масса тела и объем мозга, количественное содержание ферментов у здоровых людей, размеры форменных элементов крови, *p*H крови и т. п.

Понятие случайной величины играет определяющую роль в современной теории вероятностей, разработавшей специальные приемы перехода от случайных событий к случайным величинам.

Если случайная величина зависит от времени, то можно говорить о случайном процессе.

2.2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Чтобы дать полную характеристику дискретной случайной величины, необходимо указать все ее возможные значения и их вероятности.

Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется законом распределения этой величины.

---

[*] В этом случае считают, что значения некоторой случайной величины X могут лежать в интервале $(-\infty; \infty)$, т. е. на всей числовой оси.

Обозначим возможные значения случайной величины X через x_i, а соответствующие им вероятности — через p_i *. Тогда закон распределения дискретной случайной величины можно задать тремя способами: в виде таблицы, графика или формулы.

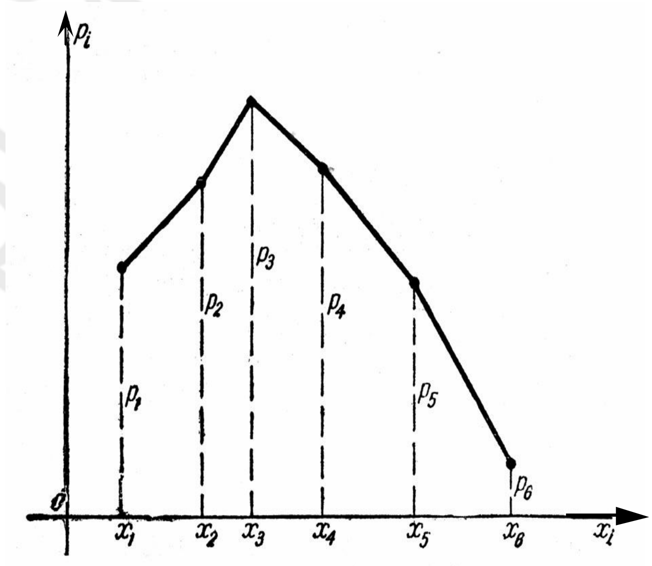
В таблице, которая называется рядом распределения, перечисляются все возможные значения дискретной случайной величины X и соответствующие этим значениям вероятности $P(X)$:

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

При этом сумма всех вероятностей p_i должна быть равна единице (условие нормировки):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{13}$$

Графически закон представ-ляется ломаной линией, которую принято называть многоуголь-ником распределения (рис.1). Здесь по горизонтальной оси откладывают все возможные значения случайной величины x_i, а по вертикальной оси — соответствующие им вероятности p_i.



Аналитически закон выра-жается формулой. Например, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, то вероятность поражения цели 1 раз при n выстрелах выражается формулой:

$P(n) = n\, q^{n-1} \cdot p$,

где $q = 1 - p$ — вероятность промаха при одном выстреле.

2.3. Закон распределения непрерывной случайной величины. Плотность распределения вероятностЕЙ

Для непрерывных случайных величин невозможно применить закон распределения в формах, приведенных выше, поскольку такая величина имеет бесчисленное («несчетное») множество возможных значений, сплошь заполняющих некоторый интервал. Поэтому составить таблицу, где были бы перечислены все ее возможные значения, или построить многоугольник распределения нельзя. Кроме того, вероятность какого-либо ее конкретного значения очень мала (близка к 0)*.

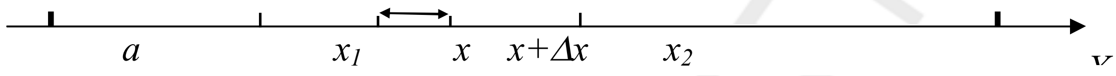
---

* Обычно случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита, а их возможное значение и вероятности этих значений — строчными.

* Приведем пример, поясняющий этот факт. Пусть случайная величина — уровень осадков, выпавших за год. Она может принимать любые значения из некоторого

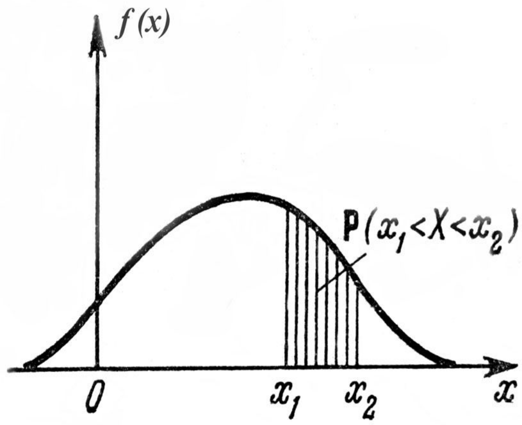
Вместе с тем различные области (интервалы) возможных значений непрерывной случайной величины не равновероятны. Таким образом, и в данном случае действует некий закон распределения, хотя и не в прежнем смысле.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют некий интервал (a, b)**. Закон распределения вероятностей такой величины должен позволить найти вероятность попадания ее значения в любой заданный интервал (x_1, x_2), лежащий внутри (a,b) — рис. 2.



I

Эту вероятность обозначают $P(x_1 < X < x_2)$, или $P(x_1 \leq X \leq x_2)$.



P

Рассмотрим сначала очень малый интервал значений X — от x до $(x + \Delta x)$ (см. рис. 2). Малая вероятность dP того, что случайная величина X примет какое-то значение из интервала $(x,\ x + \Delta x)$, будет пропорциональна величине данного интервала Δx: $dP \sim \Delta x$. Тогда после введения коэффициента пропорциональности f, который сам может зависеть от x, получим:

$$dP = f(x) \cdot \Delta x = f(x) \cdot dx. \tag{14}$$

Введенная здесь функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* случайной величины X или *плотностью вероятности*, *плотностью распределения*. Уравнение (14) — дифференциальное уравнение, решение которого дает вероятность попадания величины X в интервал (x_1, x_2):

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx. \tag{15}$$

Графически вероятность $P(x_1 < X < x_2)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, кривой $f(x)$ и прямыми $X = x_1$ *и* $X = x_2$ (рис. 3). Это следует из геометрического смысла определенного интеграла (15). Кривая $f(x)$ при этом называется кривой распределения.

Из (15) следует, что если известна функция $f(x)$, то, изменяя

интервала. Однако вероятность того, что в заданный год этот уровень окажется точно равен 40 см, фактически равна 0.

** Иногда рассматривают интервал $(-\infty; +\infty)$.

пределы интегрирования, можно найти вероятность для любых интересующих нас интервалов. Поэтому именно задание функции $f(x)$ полностью определяет закон распределения для непрерывных случайных величин.

Для плотности вероятности $f(x)$ должно выполняться условие нормировки в виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \qquad (16)$$

если известно, что все значения X лежат в интервале (a, b), или в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \qquad (17)$$

если границы интервала для значений X точно неопределены. Условия нормировки плотности вероятности (16) или (17) являются следствием того, что значения случайной величины X достоверно лежат в пределах (a, b) или $(-\infty, +\infty)$. Из (16) и (17) следует, что площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, всегда равна 1.

2.4. Основные числовые характеристики случайных величин

Результаты, изложенные в параграфах 2.2 и 2.3, показывают, что полную характеристику дискретной и непрерывной случайных величин можно получить, зная законы их распределения. Однако во многих практически значимых ситуациях пользуются так называемыми числовыми характеристиками случайных величин. Главное назначение этих характеристик — выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности распределения случайных величин. Важно, что данные параметры представляют собой конкретные (постоянные) значения, которые можно оценивать с помощью полученных в опытах данных. Этими оценками занимается «Описательная статистика».

В теории вероятностей и математической статистике используется достаточно много различных характеристик, но мы рассмотрим только наиболее употребляемые. Причем лишь для части из них приведем формулы, по которым рассчитываются их значения, в остальных случаях вычисления оставим компьютеру.

Рассмотрим **характеристики положения —** математическое ожидание, моду, медиану. Они характеризуют положение случайной величины на числовой оси, т. е. указывают некоторое ее ориентировочное значение, около которого группируются все другие возможные значения случайной величины. Среди них важнейшую роль играет математическое ожидание $M(X)$.

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины X является вероятностным аналогом ее среднего арифметического $\overline{X}$ ($M(X)=\overline{X}$ или $M(X) \approx \overline{X}$).

Для дискретной случайной величины $M(X)$ вычисляется по формуле:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (18)$$

Для непрерывной случайной величины $M(X)$ определяют по формулам:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx, \text{ или } M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \qquad (19)$$

где $f(x)$ — плотность вероятности; $dP = f(x)dx$ — элемент вероятности (аналог p_i для малого интервала Δx (dx)).

П р и м е р: Вычислите среднее значение непрерывной случайной величины, имеющей на отрезке (a, b) равномерное распределение.

Решение: при равномерном распределении плотность вероятности на интервале (a, b) постоянна, т. е. $f(x) = f_o = const$, а вне (a, b) равна нулю; из условия нормировки (15) найдем значение f_0:

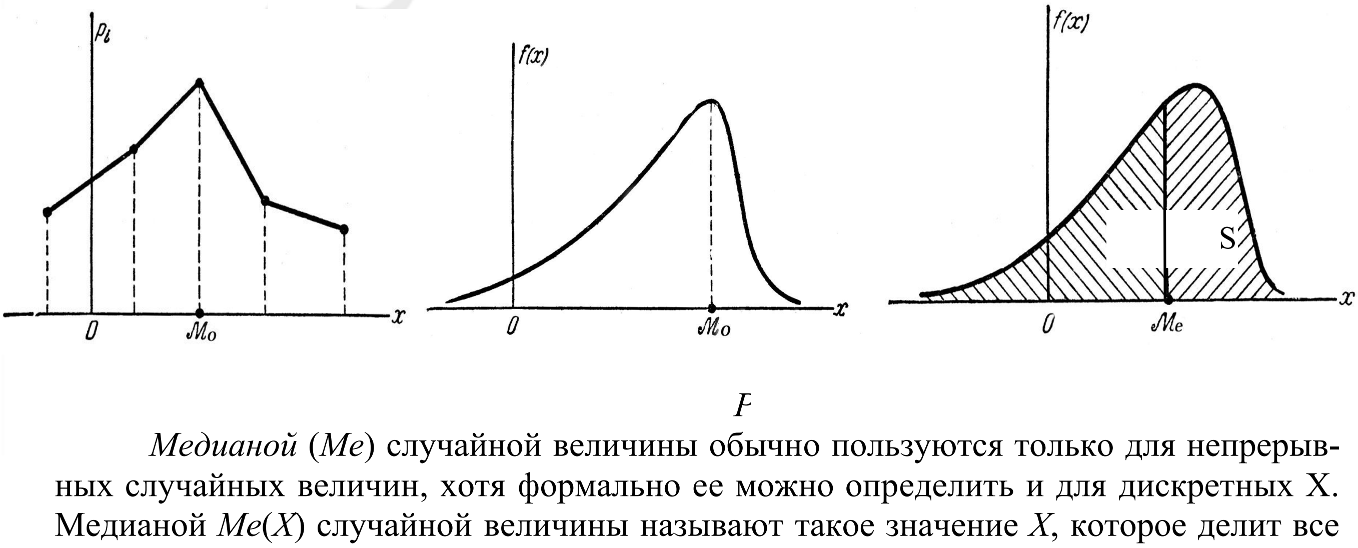
$$1 = \int_a^b f_0 dx = f_0 \int_a^b dx = f_0 \cdot x \Big|_a^b = (b-a)f_0 \text{, откуда } f_o = \frac{1}{b-a}.$$

Поэтому:

$$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b xdx = \frac{1}{2(b-a)} \cdot x^2 \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(a + b).$$

Следовательно, математическое ожидание $M(X)$ совпадает с серединой интервала (a, b), определяющей $\overline{X}$, т. е. $\overline{X} = M(X) = \frac{1}{2}(a + b)$.

Модой $Mo(X)$ дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение (рис. 4, *а*), а непрерывной — значение X, при котором плотность вероятности максимальна (рис. 4, *б*).



F

Медианой (Me) случайной величины обычно пользуются только для непрерывных случайных величин, хотя формально ее можно определить и для дискретных X. Медианой $Me(X)$ случайной величины называют такое значение X, которое делит все распределение на две равновероятные части, т. е. вероятности $P(X < Me)$ и $P(X > Me)$ оказываются равными между собой:

$$P(X < Me) = P(X > Me) = \frac{1}{2}.$$

Поэтому медиану можно вычислить из соотношения:

$$\int_a^{Me} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Графически медиана — это значение случайной величины, ордината которой делит площадь, ограниченную кривой распределения, пополам: $S_1 = S_2$ (рис. 4, *в*).

Если $M(X)$, $Mo(X)$ *и* $Me(X)$ совпадают, то распределение случайной величины называют симметричным, в противном случае — асимметричным.

Характеристики рассеяния — это дисперсия и стандартное отклонение (среднее квадратическое отклонение).

Дисперсия $D(X)$ случайной величины X определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной X от ее математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2, \quad (20)$$

$$\text{или } D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (21)$$

При конкретных расчетах для дискретной случайной величины эти формулы записываются так:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i, \text{ или } D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [M(X)]^2. \quad (22)$$

Для непрерывной случайной величины, распределенной в интервале (a,b), они имеют вид:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx, \text{ или } D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2, \quad (23)$$

а для интервала $(-\infty,+\infty)$:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx, \text{ или } D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \quad (24)$$

Дисперсия характеризует рассеяние, разбросанность, значений случайной величины X относительно ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеяние».

Однако дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что весьма неудобно при оценке разброса в физических, биологических, медицинских и других приложениях. Поэтому обычно пользуются параметром, размерность которого совпадает с размерностью X. Это — *среднее квадратическое* (иначе — *стандартное*) *отклонение* случайной величины X, которое обозначают $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{25}$$

Итак, математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются наиболее употребляемыми числовыми характеристиками случайных величин, каждая из которых выражает какое-нибудь характерное свойство их распределения.

2.5. Нормальный закон распределения случайных величин

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей. Во-первых, это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения непрерывных случайных величин. Во-вторых, он является предельным законом в том смысле, что к нему при определенных условиях приближаются другие законы распределения.

Нормальный закон распределения характеризуется следующей формулой для плотности вероятности:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{[x-M(X)]^2}{2\sigma^2}}, \tag{26}$$

где x — текущие значения случайной величины X; $M(X)$ и σ — ее математическое ожидание и стандартное отклонение.

Из (26) видно, что если случайная величина распределена по нормальному закону, то достаточно знать только два числовых параметра — $M(X)$ и σ, — чтобы полностью знать закон ее распределения.

График функции (26) называется нормальной кривой распределения (кривой Гаусса). Он имеет симметричный вид относительно ординаты $x = M(X)$. Максимальная плотность вероятности, равная $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,4}{\sigma}$, соответствует математическому ожиданию $M(X) = \overline{X}$; по мере удаления максимума $f(x)$ падает и постепенно приближается к нулю (рис. 5).

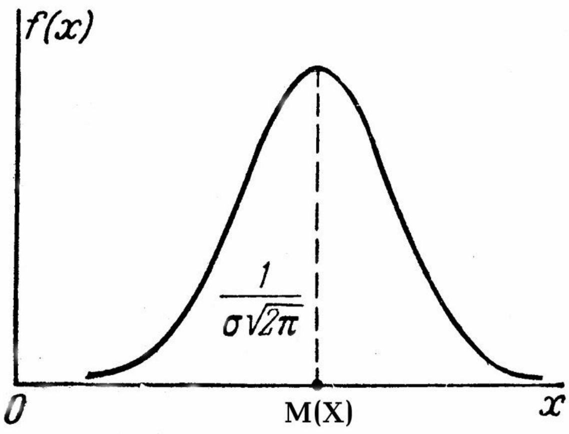


Рис. 5

Величина $M(X)$ называется также центром рассеяния. Среднеквадратичное отклонение σ характеризует ширину кривой распределения.

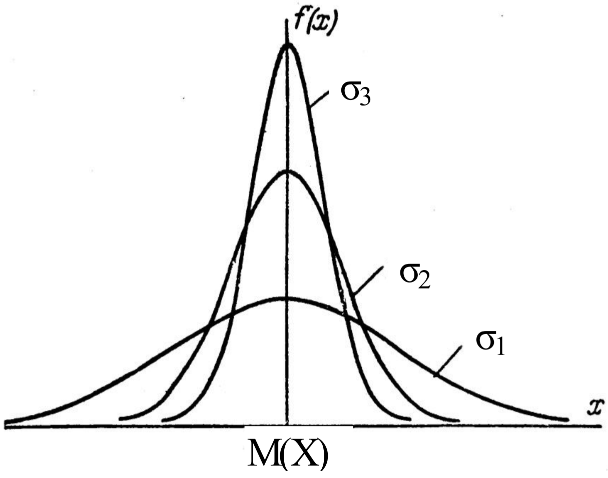


Рис.

При изменении значения $M(X)$ в (26) нормальная кривая не меняется по форме, но сдвигается вдоль оси абсцисс. С возрастанием σ максимальная ордината кривой убывает, а сама кривая, становясь более пологой, растягивается вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. Вид кривой распределения при разных значениях σ ($\sigma_3<\sigma_2<\sigma_1$) показан на рис. 6.

Естественно, что при любых значениях $M(X)$ и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью X, остается равной 1 (условие нормировки):

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \text{ или } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Нормальное распределение симметрично, поэтому $M(X)=Mo(X)=Me(X)$.

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (x_1,x_2), т. е. $P\,(x_1 < X < x_2)$, равна:

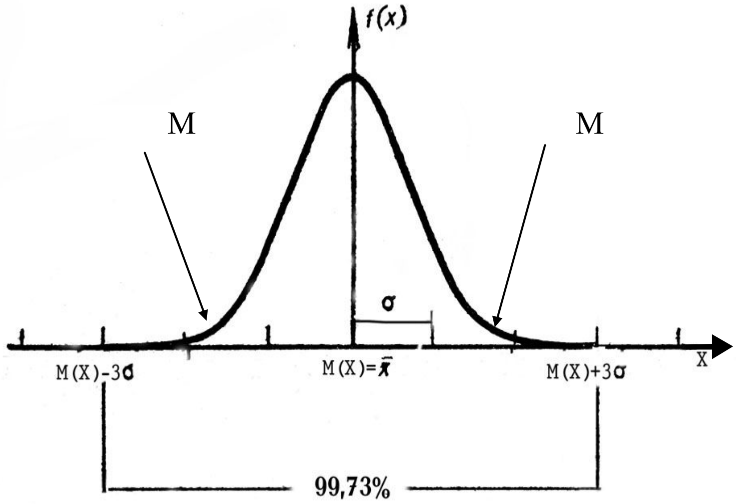
$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-M(X))^2}{2\sigma^2}}\, dx\,. \tag{27}$$

На практике часто приходиться вычислять вероятности попадания значений нормально распределенной случайной величины на участки, симметричные относительно $M(X)$. В частности, рассмотрим следующую, важную в прикладном отношении задачу. Отложим от $M(X)$ вправо и влево отрезки, равные σ, 2σ и 3σ (рис. 7) и проанализируем результат вычисления вероятности попадания X в соответствующие интервалы:

$$P(M(X) - \sigma < X < M(X) + \sigma) = 0{,}6827 = 68{,}27\ \%; \tag{28}$$

$$P(M(X) - 2\sigma < X < M(X) + 2\sigma) = 0{,}9545 = 95{,}45\ \%; \tag{29}$$

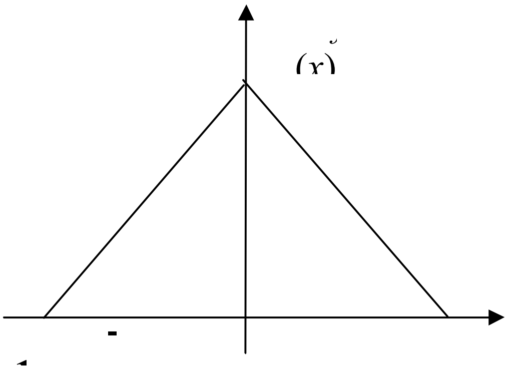
$$P(M(X) - 3\sigma < X < M(X) + 3\sigma) = 0{,}9973 = 99{,}73\ \%. \tag{30}$$



Из (30) следует: практически достоверно, что значения нормально распределенной случайной величины X с параметрами $M(X)$ и σ лежат в интервале $M(X) \pm 3\sigma$. Иначе говоря, зная $M(X) = \overline{X}$ и σ, можно указать интервал, в который с вероятностью P = 99,73% попадают значения данной случайной величины. Такой способ оценки диапазона возможных значений X известен как «правило трех сигм».

Пример. Известно, что для здорового человека pH крови является нормально распределенной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 7,4 и стандартным отклонением 0,2. Определите диапазон значений этого параметра.

Решение: для ответа на данный вопрос воспользуемся «правилом трех сигм»; с вероятностью, равной 99,73%, можно утверждать, что диапазон значений pH для здорового человека составляет 6,8–8.



ЗАДАЧИ

1. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

1)

X	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,3	0,2

2)

X	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,5

Ответ: закон распределения задает только первая таблица.

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

1. Найдите вероятности $p_1=P(X=3)$ и $p_3=P(X=5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.
2. Получив ответ на первый вопрос, постройте многоугольник распределения.

Ответ: p_1=0,05; p_3=0,2

3. Плотность распределения случайной величины X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{— при } x \le 0; \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \text{— при } x \rangle 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (2, 3).

Ответ: 0,1.

4. График плотности распределения вероятностей случайной величины X изображен на приведенном рисунке.

Запишите аналитическое выражение для плотности вероятностей.

Ответ: $f(x) = 0$ при $|x| > 1$;
$f(x) = x+1$ при $-1< x \le 0$;
$f(x) = -x+1$ при $0 < x \le 1$).

5. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей:

X	3	4	5	6	7
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Ответ: 5.

6. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{— при } x \le 0; \\ 3x^2/8 & \text{— при } 0 < x \le 2; \\ & \text{— при } x > 2. \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание случайной величины X.

Ответ: 1,5.

7. Длительность жизненного цикла (в днях) для некоторого растения является случайной величиной X с функцией плотности вероятности $f(x) = \dfrac{x}{20000}$ при $0 \le x \le 200$ и $f(x) = 0$ при любых других значениях x. Определите среднюю длительность жизненного цикла у этого растения.

Ответ: 133,3 дня.

8. Дискретная величина X имеет закон распределения:

X	0	0,4	0,6	0,8	1
P	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность p_4?

Найдите математическое ожидание, дисперсию, стандартное отклонение и моду этой случайной величины.

Ответ: $p_4=0,2$; $M(X)=0,58$; $D(X)=0,068$; $\sigma(X)=0,26$; $Mo=0,6$).

9. Экспериментальная операция длится не менее 4 мин, но для ее завершения никогда не требуется более 10 мин. Определим случайную величину T как время, необходимое для выполнения операции и допустим, что функция плотности вероятности для T имеет вид: $f(t) = k\,(t–4) \cdot (10 — t)$ на интервале $4 \le t \le 10$. Найдите значение постоянной k для этой $f(t)$.

Ответ: 1/36.

10. Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{— при } x \le 0; \\ 2x & \text{— при } 0 < x \le 0; \\ 0 & \text{— при } x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $M(X) = 2/3$; $D(X) = 1/18$; $\sigma(X) \approx 0{,}24$.

11. Запишите плотность распределения для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, если $M(X) = 3$, $D(X) = 4$.

Ответ: $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/8}$.

12. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X) = 10$. Вероятность попадания X в интервал (10,20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0,10)?

Ответ: 0,3.

13. Длина интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадают значения некой случайной величины, распределенной нормально, равна 30 ед. длины. Найдите стандартное отклонение.

Ответ: 5 ед. длины.

14. Диастолическое давления крови у женщин, страдающих гипертонической болезнью, в среднем равно 95 мм рт. ст., стандартное отклонение — 15 мм рт.ст. Определите интервал возможных значений этой величины, считая, что она распределена по нормальному закону.

Ответ: (50–140) мм рт.ст.

15. Считая, что случайная величина X — диаметр лекарственной таблетки — распределена по нормальному закону с параметрами $\overline{X} = 10$ мм, $\sigma = 0{,}1$ мм, найдите интервал, в котором с вероятностью 95,45% будут заключены эти диаметры. Если в партии 3000 таблеток, то сколько из них окажется в этом интервале?

Ответ: (9,8–10,2) мм; 2864 табл.

Глава III. Элементы математической статистики

3.1. Предмет и задачи математической статистики. генеральная и выборочная совокупности

Математические законы теории вероятностей — это математическое выражение реальных закономерностей, которым подчиняются массовые случайные явления. При этом каждое исследование случайных явлений, выполняемое методами теории вероятностей, прямо или косвенно опирается на экспериментальные данные, на результаты испытаний и наблюдений.

Разработка методов получения, описания и анализа экспериментальных данных, определенных в результате исследования массовых случайных явлений, составляет **предмет** специальной науки — математической статистики**.** Эти данные принято называть статистическими. Статистические данные часто можно рассматривать как совокупность экспериментальных результатов, которые представляют собой набор возможных значений случайных однородных величин (роста, массы тела, содержания сахара в крови, длительности пребывания больного на койке и т. д.).

Фундаментальными понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборочная совокупность (выборка). Существуют разные подходы к пониманию смысла этих величин. Мы определяем их так. *Генеральная совокупность — это множество подлежащих статистическому изучению однородных объектов, которые характеризуются определенными качественными или количественными признаками.* Например, конечная и реально существующая генеральная совокупность — конкретно выбранная популяция: все жители Беларуси в фиксированный момент времени или только все мужчины, или женщины, или дети. Следующий пример: бесконечная и реально существующая генеральная совокупность — множество действительных чисел, лежащих между 0 и 1.

Чтобы изучить генеральную совокупность по какому-либо из ее количественных признаков X (острота зрения, показатели анализа крови и т. д.), нужно определить закон распределения данного признака и основные характеристики этого распределения, например, математическое ожидание и дисперсию. Для этого следовало бы изучить все ее объекты и затем обработать полученный массив данных методами теории вероятностей. Однако на практике провести сплошное обследование объектов генеральной совокупности часто физически невозможно и экономически невыгодно. Поэтому обычно исследуется только часть объектов, так называемая выборка.

Совокупность «n» объектов, отобранных из интересующей нас генеральной совокупности для конкретного статистического исследования, называется выборочной совокупностью или выборкой.

Исследование выборки дает некоторое приближенное оценочное значение интересующего нас параметра, принимающего различные значения для разных выборок. Таким образом, постоянная величина — значение нужной характеристики для генеральной совокупности — заменяется значением случайной величины, полученным по результатам выборки на основании некоторого правила. Поэтому главная цель выборочного метода, основного в математической статистике, — по вычисленной характеристике выборки как можно точнее определить соответствующую характеристику генеральной совокупности. Это возможно лишь в том случае, когда отобранная для работы часть объектов репрезентативна целому, т. е. типична, обладает теми же основными чертами, что и все целое. Иначе говоря, выборка должна быть представительной, т. е. по возможности полнее «представлять» свою генеральную совокупность. Это одно из важнейших требований, предъявляемых к выборке, невыполнение которого ведет к грубым ошибкам и обесценивает результаты исследования. Например, если при изучении заболеваемости населения республики (генеральная совокупность) ишемической болезнью сердца в качестве выборки будет взята группа студентов, то результаты окажутся ошибочными, поскольку свойства выборки не будут соответствовать свойствам генеральной совокупности, как и в случае, когда в качестве выборки будут взяты только пациенты кардиологического диспансера. Репрезентативность выборки обеспечивается ее достаточным объемом и определенными правилами ее формирования, которые в данном пособии не рассматриваются.

Из многочисленных **задач**, решаемых математической статистикой, выделим следующие.

1. Определение статистических характеристик выборки (методы описательной статистики).

2. Определение параметров генеральной совокупности по данным выборки: точечные оценки и доверительные интервалы для параметров распределения.

3. Исследование статистической связи между двумя признаками выборочной совокупности (элементы корреляционного анализа).

4. Определение значимости различия между двумя выборочными совокупностями (введение в теорию статистических гипотез).

3.2. Статистическое распределение выборки

Итак, мы хотим знать распределение признака X в генеральной совокупности**,** но реально исследуем лишь некоторую выборку из нее.

В серии экспериментов, проводимых с выборкой, величина X принимает определенные значения. Эти значения, записанные для всех элементов выборки в том порядке, в котором они были получены в опытах, представляют собой *простой статистический ряд.* Каждое значение X в полученном числовом ряду называют *вариантой*. Полученные данные и подлежат статистической обработке, статистическому анализу.

Первый шаг при обработке этого материала — наведение в нем определенного порядка, ведущего к получению статистического распределения выборки. Здесь возможны два основных способа: создание вариационного ряда или интервального ряда.

Рассмотрим *вариационный ряд*. Пусть некоторая выборка исследуется по количественному признаку X, который представляет собой дискретную случайную величину. В имеющемся у нас простом статистическом ряду варианта x_1 встречается (повторяется) m_1 раз, x_2 — m_2 раза, … $x_к$ — $m_к$ раз; при этом $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, т. е. равна объему выборки. Далее по данным простого статистического ряда строится статистическое распределение (в медицинской литературе — *вариационный ряд*), которое удобно представить в виде таблицы, включающей в себя:

1) различные по значению варианты x_i, расположенные в определенной, ранжированной[1], заранее выбранной последовательности (обычно в порядке возрастания);

2) m_i — частоты вариант, т. е. числа наблюдений (повторений) варианты x_i в простом статистическом ряду;

3) $p_i^* = m_i / n$ — относительные частоты вариант, т. е. отношения частот m_i к объему выборки n; они являются выборочными (эмпирическими) оценками вероятностей появления значений x_i.

Каждая относительная частота указывает, какая доля общего объема выборки приходится на данное значение варианты x_i.

Итак, для дискретной величины X вариационный ряд — статистическое распределение выборки — имеет следующий вид (табл. 1).

Таблица 1.

Варианта x_i $(x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_k)$	$_1$	$_2$	$_3$		$_k$	Контроль
Частота m_i	$_1$	$_2$	$_3$		$_k$	$\sum_{i=1}^{k} m_i =$
Относительная частота $p_i^* = \frac{m_i}{n}$						$\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} =$

Напомним, что под распределением дискретной случайной величины в теории вероятностей понимается соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями; в математической статистике — соответствие между наблюдаемыми вариантами xi и их частотами или относительными частотами.

Пример 1. Анализируемый показатель X — срок лечения больного при некотором заболевании. Вариационный ряд — распределение больных по срокам лечения (объем выборки n = 26 больных) — имеет вид:

Таблица 2.

x_i — число дней лечения	17	8	0	2	3	5	контроль
m_i — число больных с данным сроком лечения (частота)							$\sum_{i=1}^{6} m_i = 26$
$p_i^* = \frac{m_i}{n}$ — относительная частота	,08	,19	,15	,30	,19	,08	$\sum_{i=1}^{6} \frac{m_i}{n}$

Полезность подобного представления данных очевидна по следующей при-

[*] В математической статистике ранжированным рядом часто называется последовательность всех полученных в эксперименте вариант, записанных в порядке возрастания.

чине: мы получаем практически важный результат — возможность оценить более и менее вероятные значения признака.

Интервальный ряд удобен тогда, когда количественный признак X, характеризующий выборку, непрерывен, т. е. может принимать любые значения в некотором интервале. В этом случае статистическое распределение выборки (интервальный ряд) строится следующим образом. Область изменения признака ($x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}$) разбивают на несколько интервалов обычно равной ширины. Число интервалов k, как правило, не менее 5 и не более 25 и приближенно определяется следующими эмпирическими формулами:

$$k = \sqrt{n}\text{, или } k \approx 1 + 3{,}32\ lg\ n,$$

где n — объем выборки.

Ширина интервалов одинакова и равна:

$$\Delta x = h = \frac{x_{макс} - x_{мин}}{k}.$$

Затем вычисляют границы интервалов:

$$x_{\text{мин}} = x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_2 + h, \ldots,\ x_{\text{макс}} = x_k.$$

Поскольку некоторые варианты могут являться границей двух соседних интервалов, то, во избежание недоразумений, придерживаются следующего правила: к интервалу (a, b) относят варианты, удовлетворяющие неравенству $a \le x < b$.

Затем для каждого интервала подсчитывают частоты m_{i} и (или) относительные частоты $p_i^* = m_i / n$ попадания вариант в данный интервал. Нередко используют также плотность относительной частоты:

$$\frac{m_i}{n\,\Delta x} = \frac{m_i}{n\,h}.$$

Данную величину можно считать выборочной (эмпирической) оценкой плотности вероятности.

Рассмотренное выборочное распределение непрерывной случайной величины X — интервальный ряд — обычно представляется в виде таблицы, имеющей, в частности, следующий вид (табл. 3).

Таблица 3.

Интервал	x_0–x_1	x_1–x_2	x_2– x_3	. . .	x_{k-1} — x_k
Частота m_{i}	m_1	M_2	m_3	. . .	m_k
Относительная частота $p_i^* = m_i/n$	m_1/n	m_2/n	m_3/n	. . .	m_k/n

П р и м е р 2. Анализируемый показатель X — масса тела новорожденного. Определение массы тела 100 новорожденных показало, что минимальная масса составляет 2,7 кг, максимальная — 4,4 кг. Интервал (2,7–4,4) кг разбиваем на 10 равных интервалов ($k = \sqrt{100} = 10$) шириной $h = \dfrac{4{,}4 - 2{,}7}{10} = 0{,}17$ кг и строим интервальный ряд: (табл. 4)

ТАБЛИЦА 4.

Номер интервала				**4**		**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Интервал, масса тела, кг	,7–2,87	,87–3,04	,04–3,21	3,21–3,38	,38–3,55	3,55–3,72	3,72–3,89	3,89–4,06	4,06–4,23	4,23–4,4
Частота m_{i}			2	16	1	15	11	7	4	2
$m_i/n = p_i$	,04	,08	,12	0,16	,21	0,15	0,11	0,07	0,04	0,02
m_i/nh	,235	,47	,7	0,94	,235	0,88	0,65	0,41	0,235	0,118

Контроль: k=10, $\sum_{i=1}^{10} m_i$ =4+8+12+16+21+15+11+7+4+2=100=n (объем выборки), $\sum_{i=1}^{10} \frac{m_i}{n}$ = 0,04+0,08+0,12+0,16+0,21+0,15+0,11+0,07+0,04+0,02 = 1.

Обобщим изложенный выше материал.

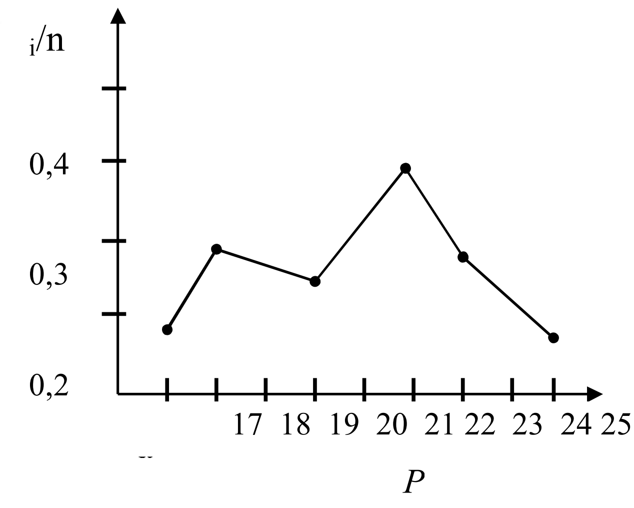
1. Если выборка исследуется по количественному признаку X, который представляет собой дискретную случайную величину, то статистическим распределением выборки является вариационный статистический ряд — полученные значения признака, записанные в упорядоченном виде с указанием их частот и относительных частот.

2. Если выборка исследуется по количественному признаку X, который представляет собой непрерывную случайную величину, то статистическим распределением выборки является интервальный статистический ряд. Он включает в себя интервалы вариант, частоты попадания вариант в эти интервалы, относительные частоты, при необходимости — плотности относительных частот для этих интервалов.

3.3. Графическое представление статистических распределений выборок

Для получения наглядного представления о распределении выборок строят соответствующие графики, в частности, полигон частот или гистограмму распределения.

Вариационный ряд часто изображают графически в виде полигона частот или полигона относительных частот.



Для построения **полигона частот** на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат — соответствующие им частоты m_i. Точки (x_i; m_i) соединяют отрезками прямых. *Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки* (x_1;m_1); (x_2; m_2).....($x_к$; $m_к$).

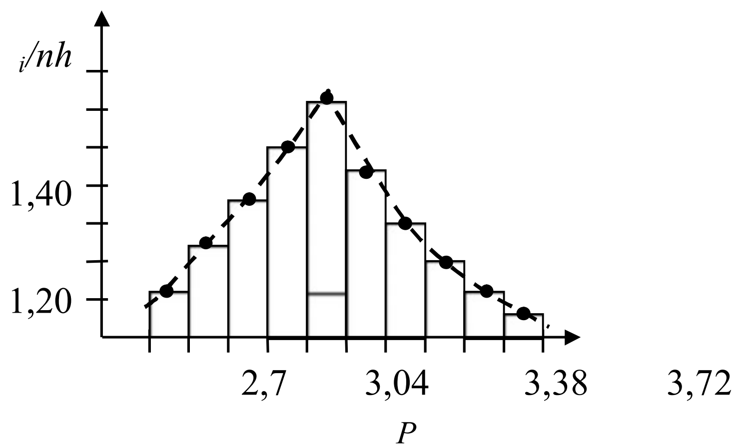
Полигоном относительных частот называют *ломаную линию, отрезки которой соединяют точки* (x_1; $\frac{m_1}{n}$); (x_2; $\frac{m_2}{n}$); ($x_к$; $\frac{m_k}{n}$). На рис. 8 показан полигон относительных частот, построенный по данным табл. 2.

Для непрерывной случайной величины обычно строят гистограммы частот или гистограммы относительных частот.

Гистограммой частот называют *диаграмму, состоящую из вертикальных прямоугольников, основаниями которых являются интервалы длиной* $\Delta x = h$*, а высоты равны отношению* $\frac{m_i}{\Delta x}$ *(плотности частоты).* Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают интервалы значений исследуемого показателя (интервалы вариант) и на них строят прямоугольники высотой $\frac{m_i}{\Delta x}$. Площадь i-го прямоугольника равна $\Delta x \cdot \frac{m_i}{\Delta x} = m_i$, т. е. равна количеству вариант в i-м интервале. Следовательно, площадь гистограммы частот равна сумме частот для всех интервалов, иначе говоря, равна объему выборки.

Гистограмма относительных частот отличается от предыдущей гистограммы тем, что на ней высоты прямоугольников равны отношению $\frac{m_i}{n\Delta x}$,т. е. равны плотности относительной частоты (эмпирической плотности вероятности). В этом случае площадь i-го прямоугольника равна $\Delta x \cdot \frac{m_i}{n\Delta x} = p_i^*$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Напомним, что p_i^* — оценка вероятности попадания значений X в выбранный интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме относительных частот для всех интервалов, т. е. равна единице.

Гистограмма относительных частот, построенная по данным табл. 4, приведена на рис. 9. Из этого рисунка следует, что для используемой выборки интервал наиболее вероятных масс тела новорожденных (3,38–3,55) кг.



Необходимо отметить, что

гистограммой называют и серию прямоугольников, высотами которых являются непосредственно частоты m_i для соответствующих интервалов или относительные частоты (в нормированной гистограмме), а также относительные частоты в процентах (процентная гистограмма). Два последние варианта позволяют сравнивать гистограммы, построенные на одних и тех же интервалах, но для различных выборок из той же генеральной совокупности.

Важно, что гистограммы можно использовать для оценки закона распределения признака в генеральной совокупности (в популяции). Соединяя средние точки верхних оснований прямоугольников гистограммы относительных частот плавной линией, можно по данным выборки получить примерный вид графика зависимости плотности вероятности f от x (см. рис. 9). Можно предположить, что анализируемый показатель (масса тела новорожденного) в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, т. е. нормальный закон является вероятностной моделью для данного признака популяции.

3.4. Методы описательной статистики

Это методы описания выборок, исследуемых по количественному признаку X, с помощью их различных числовых характеристик. Преимущество данных методов заключается в следующем. Несколько простых и достаточно информативных статистических показателей, если они известны, во-первых, избавляют нас от просмотра сотен, а порой и тысяч значений вариант, во-вторых, позволяют получить более или менее точную оценку характеристик распределения признака в генеральной совокупности.

Описывающие выборку показатели разбиваются на несколько групп; в своем большинстве они имеют аналоги в виде числовых характеристик случайных величин в теории вероятностей.

Показатели положения описывают положение вариант выборки на числовой оси. Сюда относят:

а) минимальную и максимальную варианты;

б) выборочное среднее арифметическое значение (выборочное среднее), выборочные моду и медиану; они определяют «центральную» точку распределения выборки — наиболее значимую для поставленной задачи варианту.

Выборочным средним называется следующая величина:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad \textbf{(31)}$$

где x_i — i-ая варианта, полученная в опыте с i-м элементом выборки; n — объем выборки.

Так, согласно данным табл. 4, среднее выборочное значение массы тела новорожденных — $\bar{x}_{\text{в}} = 3{,}47$ кг и относится к центральному интервалу (интервал наиболее вероятных значений).

Выборочная мода $Mo_{\text{в}}$ — вариант рая чаще всего встречается в исследуемой выборке, т. е. имеет наибольшую ча

Пример 1. На рис. 10 приве в-
расту заболевших дифтерией (на 10 т),
которое явно не соответствует нормал в-

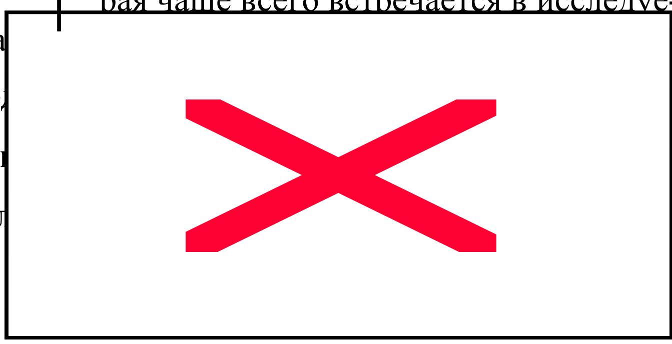


Рис.10

раста заболевших ($\overline{x}_в \approx 7{,}8$ года) в этом случае менее важно, чем знание возраста, в котором чаще всего возникает заболевание и который представляет собой моду ($Mo_в \approx 4$ года). Именно этот показатель указывает, где должны быть сосредоточены главные профилактические меры — в школах или в дошкольных учреждениях.

Выборочная медиана $Me_в$ — варианта, которая делит ранжированный статистический ряд (см. сноску на стр. 33) на две равные части по числу попадающих в них вариант.

П р и м е р 2 . Дан статистический ряд: 1; 2; 3; 3; 5; 6; 6; 6; 7; 8; 9; $n = 11$. Варианта, разделяющая этот ряд на две равные по количеству вариант части, занимает в ряду 6-е место и равна 6, т. е. $Me_в = 6$.

Показатели разброса описывают степень разброса данных относительно своего центра. Здесь обычно используются:

а) *стандартное отклонение* S и *выборочная дисперсия* $D_в = S^2$*, характеризующие рассеяние вариант вокруг их среднего выборочного значения $\overline{x}_в$:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2}{n-1}}\;; \qquad (32)$$

б) *размах выборки* — разность между максимальной и минимальной вариантами: $x_{макс} - x_{мин}$;

в) *коэффициент вариации*:

$$v = \frac{S}{\overline{x}_В} \cdot 100\%. \qquad (33)$$

Данный коэффициент применяется для сравнения величин рассеяния двух вариационных рядов. Тот из рядов имеет большее рассеяние, у которого коэффициент вариации больше.

К показателям, описывающим закон распределения, прежде всего относят гистограмму и полигон частот. О них шла речь в предыдущем разделе.

* Точнее S^2 называется «исправленная выборочная дисперсия».

3.5. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ ПО ЕЕ ВЫБОРКЕ. ТОЧЕЧНАЯ И ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКИ

Напомним, что главная цель любого статистического исследования — установить закон распределения и получить значения характеристик изучаемого признака генеральной совокупности путем анализа выборки. Иначе говоря, надо определить генеральную среднюю $\bar{x}_г = M(X)$, генеральные дисперсию $D_г(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_г$, генеральную моду $Mo_г$, медиану $Me_г$ и другие характеристики путем статистического исследования выборки.

Точечная оценка характеристик генеральной совокупности — наиболее простой, но не очень достоверный способ. При данном способе в качестве оценок используются соответствующие числовые характеристики выборки. Например, в качестве генерального среднего используется выборочное среднее, в качестве генеральной дисперсии — выборочная дисперсия и т. д. Такие оценки и называются точечными. Их недостаток состоит в том, что не ясно, насколько сильно они отличаются от истинных значений параметров генеральной совокупности. Ошибка может быть особенно большой в случае малых выборок.

Интервальная оценка параметров генеральной совокупности более достоверна. В этом случае определяется интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение исследуемого признака. Такой интервал называется *доверительным интервалом*, а вероятность того, что истинное значение оцениваемой величины находится внутри этого интервала, — *доверительной вероятностью* или *надежностью*. В медицинской литературе для этой величины используется термин «вероятность безошибочного прогноза». Обозначим ее γ. Значения γ задаются заранее (обычно в медико-биологических исследованиях выбирают значения $\gamma = 0{,}95 = 95\%$ или $\gamma = 0{,}99 = 99\%$), после чего находят соответствующий доверительный интервал*.

Для построения надежных интервальных оценок необходимо знать закон, по которому оцениваемый случайный признак распределен в генеральной совокупности.

Рассмотрим, вначале для малых выборок ($n < 30$), как строится интервальная оценка генеральной средней $\bar{x}_г = M(X)$ признака, который в генеральной совокупности распределен по нормальному закону. В этом случае интервальной оценкой (с доверительной вероятностью γ) генеральной средней (математического ожидания) $\bar{x}_г = M(X)$ количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}_в$ при неизвестном $\sigma_г$ является доверительный интервал:

$$\bar{x}_в - \delta < M(X) < \bar{x}_в + \delta, \qquad (34)$$

или в другой форме записи:

$$\bar{x}_г = M(X) = \bar{x}_в \pm \delta, \qquad (35)$$

где $\delta = t_{\gamma,\, n} \cdot (S/\sqrt{n})$ — полуширина доверительного интервала (точность оценки); n — объем выборки; S — выборочное среднее квадратическое отклонение;

---

* Иногда вместо доверительной вероятности используется величина $\alpha = 1 - \gamma$, которая называется уровнем значимости (см. 1.5, гл. I).

$S/\sqrt{n} = S_{\bar{x}_в}$ — стандартная ошибка выборочного среднего[*]; $t_{\gamma,n}$ — коэффициент Стьюдента (его значения либо определяются по соответствующим таблицам, либо содержатся в программных статистических пакетах обработки данных).

Анализ формулы (34) показывает, что:

а) чем больше доверительная вероятность γ, тем больше коэффициент $t_{\gamma,n}$ и шире доверительный интервал;

б) чем больше объем выборки n, тем уже доверительный интервал.

При большой выборке ($n > 30$) полуширину доверительного интервала δ определяют по соотношениям:

$\delta = 1{,}96\ S/\sqrt{n}$ — при $\gamma = 95\%$ или $\delta = 2{,}58\ S/\sqrt{n}$ — при $\gamma = 99\%$.

Доверительный интервал существует и для $\sigma_г$. Здесь мы его не приводим.

Подобные интервальные оценки с заданной надежностью даются и тогда, когда рассматриваемый случайный признак распределен в генеральной совокупности не по нормальному, а по другим законам.

Пример 1. Исследуется состояние дыхательных путей курящих. В качестве характеристики используется показатель функции внешнего дыхания — максимальная объемная скорость середины выдоха. Предполагая, что в генеральной совокупности данный параметр распределен по нормальному закону, найдите 95%-ный и 99%-ный доверительные интервалы для $\bar{x}_г$ (т. е. $M(X)$), характеризующие этих людей. Обследуемая группа — 20 курящих, $\bar{x}_в$=2,2 л/с, S = 0,73 л/с.

Решение:

1. Для $\gamma = 95\%$ и $n = 20$ находим по таблицам коэффициент Стьюдента[**] $t_{0,95;20} = 2{,}09$ и полуширину доверительного интервала δ:

$\delta = t_{\gamma,\,n}\cdot (S/\sqrt{n}) = 2{,}09 \cdot \frac{0{,}73}{\sqrt{20}} = 0{,}342.$

Теперь можем записать доверительный интервал для $M(X)$:

(2,2 — 0,342) л/с < $M(X)$ < (2,2 + 0,342) л/с,

т. е. 1,858 л/с < $M(X)$ < *2,542 л/с.*

В более компактной эквивалентной форме записи:

$M(X)$ = (2,2 ± 0,342) л/с.

2. Для $\gamma = 99\%$ и $n = 20$ $t_{0,99;20} = 2{,}86$; тогда $M(X) = \bar{x}_г$ определяется неравенством:

(2,2 — 0,467) л/с < $M(X)$ < (2,2 + 0,467) л/с или 1,733 л/с < $M(X)$ < 2,667 л/с,
иначе $M(X)$ = (2,2 ± 0,467) л/с.

Полученные данные подтверждают ранее сделанный вывод: увеличение доверительной вероятности γ «раздвигает» границы доверительного интервала.

Из формулы (34) понятно, как по заданной доверительной вероятности и объему выборки получить точность оценки $M(X) = \bar{x}_г$.

Поставим обратную, практически значимую задачу. По заданной точности оценки δ, т. е. по заданной полуширине доверительного интервала определим необходимый объем выборки, обеспечивающий нужное δ. Эта задача решается особенно

---

[*] В медицинской и биологической литературе эта величина иногда обозначается буквой m и называется ошибкой репрезентативности.

[**] См. Приложения в [4, 5, 9] списка литературы.

просто в случае больших выборок (n > 30). Здесь, например, при доверительной вероятности 95% $\delta = 1{,}96 \cdot S/\sqrt{n}$ и, следовательно, необходимый объем выборки равен: $n \geq (1{,}96)^2 S^2/\delta^2$.

П р и м е р 2. Исследователь хочет установить средний уровень гемоглобина для определенной группы населения. С учетом предварительных данных он полагает, что этот уровень составляет примерно 150 г/л со стандартным отклонением 32 г/л. Определите, сколько человек он должен обследовать (с какой выборкой должен работать) при δ= 5 г/л и доверительной вероятности 0,95 = 95%.

Решение: $n = (1{,}96)^2 \cdot 32^2/5^2 = 157{,}4$.

Таким образом, необходимо обследовать не менее 158 человек.

3.6. Понятие нормы для медицинских показателей

«Нормальные» значения медико-биологических показателей являются своеобразным стандартом, характеризующим состояние здоровья человека.

Обычно используют два типа норм — точечную норму и нормальный диапазон, причем при их установлении работают с выборками достаточно большого объема. *Точечную норму* определяют по значению центра распределения. *Нормальные диапазоны* в большинстве случаев устанавливаются так, чтобы внутрь их границ гарантированно попадали 95 % случайно отобранных здоровых людей. Когда соответствующий показатель — случайная величина — распределен по нормальному закону, точечной нормой для него считается $\bar{x}_{\text{в}} = \overline{x_{\Gamma}}$, а нормальный диапазон определяется так: $\bar{x}_{\text{в}} \pm 1{,}96\,S = \overline{x_{\Gamma}} \pm 1{,}96\,\sigma_{\Gamma}$; иногда используют менее точное приближение, заменяя 1,96 на 2.

Очень часто нормальные значения некоторого показателя неодинаковы у лиц, живущих в разных географических регионах, у мужчин и женщин; у лиц разных возрастных групп. Поэтому при установлении нормального значения необходимо указывать популяционные группы, к которым оно относится.

3.7. Элементы теории ошибок (погрешностей)

Целью любого измерения некоторой физической величины является получение ее истинного значения. Однако это весьма непростая задача из-за различных ошибок (погрешностей), неизбежно возникающих при измерениях.

Все измерения делятся на прямые и косвенные. Прямые измерения производятся с помощью приборов, которые непосредственно измеряют исследуемую величину. При косвенных измерениях определяемую величину вычисляют по некоторой формуле, а параметры, входящие в эту формулу, находят путем прямых измерений. Погрешность, возникающая при прямых измерениях, естественно, ведет к появлению ошибки косвенно определяемой величины.

Ошибки (погрешности) измерений принято делить на систематические и случайные.

Систематические ошибки вносятся самим измерительным прибором. Их можно учесть, если известен класс точности данного прибора.

Появление случайных ошибок обусловлено влиянием многочисленных случайных причин на результаты измерений. Эти погрешности обнаруживаются лишь при повторении процедуры измерений и приводят к получению ряда близких, но все-таки различающихся между собой значений измеряемой величины.

Теория ошибок позволяет оценить величину именно случайной ошибки. Обычно предполагают, что случайная ошибка подчиняется нормальному закону распределения.

Рассмотрим вначале порядок обработки результатов прямых измерений.

Допустим, измеряется величина X и мы хотим найти ее истинное значение — $x_{ист.}$ Результатом n измерений, проведенных соответствующим прибором, является ряд ее значений: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Разность между полученным x_i и истинным $x_{ист}$ значениями представляет собой случайную абсолютную погрешность отдельного измерения $\Delta x_i = x_i - x_{ист}$. Причем из теории ошибок следует, что при большом числе измерений (большом n) ошибки одной и той же величины, но разного знака встречаются одинаково часто. Посмотрим, к чему это приводит. Представим найденные нами значения x_i через $x_{ист}$ и Δx_i и сложим получившиеся соотношения:

$$x_1 = x_{ист.} + \Delta x_1;$$
$$x_2 = x_{ист.} + \Delta x_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{ист.} + \Delta x_n;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \cdot x_{ист.} + \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i .$$

Отсюда найдем истинное значение измеряемой величины:

$$x_{ист.} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i .$$

Поскольку при большом числе измерений n ошибки, равные по величине, но разные по знаку, встречаются одинаково часто, то сумма абсолютных ошибок $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ не растет с увеличением n, а лишь колеблется вблизи нуля, поэтому с увеличением n слагаемое $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$ уменьшается и стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, при очень большом количестве измерений истинное значение измеряемой величины практически совпадает со средним арифметическим всех полученных значений:

$$x_{ист} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} .$$

Однако при любом ограниченном количестве измерений n истинное значение $x_{ист}$ будет отличаться от найденного среднего арифметического значения: $\bar{x} \neq x_{ист.}$. Необходимо оценить величину этого различия.

К решению данного вопроса можно подойти следующим образом. В связи с влиянием случайных ошибок на результаты измерений некоторой физической величины X ряд полученных в эксперименте ее значений $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ можно рассматривать как выборку из генеральной совокупности, которой соответствует $n \to \infty$ и математическое ожидание которой — $M(X) = \bar{x}_г = x_{ист.}$ — надо найти (предполагается, и теория ошибок это подтверждает, что результаты измерений в генеральной совокупности распределены по нормальному закону).

Полученной выборке, естественно, соответствует свое среднее арифметическое значение:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Тогда с определенной доверительной вероятностью γ можно утверждать, что хист. лежит в доверительном интервале, построенном около $\bar{x}$, а полуширина этого интервала при n < 30 рассчитывается по известной формуле:

$\Delta x = t\gamma,\ n \dfrac{S}{\sqrt{n}}$. (36)

Следовательно:

хист. = $\bar{x}$ ± Δx, или $\bar{x}$ - Δx < хист. < $\bar{x}$ + Δx. (37)

В теории ошибок величину

S = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}\ )^2}{n-1}}$ (38)

называют средней квадратичной ошибкой прямо измеряемой величины x, величину Δx (см. (36)) — ее абсолютной ошибкой, а величину ε = $\dfrac{\Delta x}{\bar{x}}$ · 100 % — относительной ошибкой, оценивающей точность измерений.

При косвенных измерениях искомую величину Z вычисляют по некоторой формуле:

Z = f(x, y),

где x и y — прямо измеряемые величины.

Число значений x и y, полученных при измерении каждого из них, равно n:

x1, x2, x3, …., xn ;

y1, y2, y3, … , yn.

Теперь можно найти их средние арифметические значения:

$\bar{x} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$ (39)

и средние квадратичные ошибки:

Sx = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$; Sy = $\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$. (40)

Среднее арифметическое значение косвенно измеряемой величины вычисляют по формуле:

$\bar{Z}$ = f($\bar{x}, \bar{y}$). (41)

Истинное значение Z — Zист. лежит в доверительном интервале:

$\bar{Z}$ — ΔZ < Zист. < $\bar{Z}$ + ΔZ или Zист.= $\bar{Z}$ ± ΔZ. (42)

Полуширина данного интервала для нормально распределенной величины Z рассчитывается по формуле:

$\Delta Z = t\gamma, n \frac{S_z}{\sqrt{n}}$. (43)

В (43) средняя квадратичная ошибка Sz косвенно измеряемой величины равна:

$$S_z = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2 S_y^2}, \qquad (44)$$

где $\frac{\partial Z}{\partial x}$ =Zx′ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ =Zy′ — соответственно частные производные величины Z=f(x, y) по x и y, вычисляемые при их средних значениях; Sx и Sy — средние квадртичные ошибки величин x и y, значения которых получают по формулам (40).

Окончательный результат обычно записывается в виде Zист. = $\bar{Z} \pm \Delta Z$ с указанием выбранного значения γ. Приводится также относительная ошибка косвенно измеряемой величины:

$$\varepsilon = \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} \cdot 100\%.$$

Пример. Рассчитаем случайную ошибку при косвенном измерении вязкости жидкости:

$$\eta = \eta 0 \frac{\rho . t}{\rho_0 t_0},$$

где η, ρ, t — соответственно вязкость, плотность и время истечения исследуемой жидкости из капилляра вискозиметра; η0, ρ0, t0 — соответственно вязкость, плотность и время истечения эталонной жидкости (воды).

Величины η0, ρ0 и ρ считаем точно известными, t и t0 измеряем секундомером, вязкость исследуемой жидкости — косвенно измеряемая величина.

1. Пять измерений времени истечения исследуемой жидкости и воды дали следующие результаты:

для исследуемой жидкости t= 79, 2 с; 80,4; 78,0; 83,6; 80,2 с;

для воды t0 = 51,0 с; 48,4; 50,6; 47,4; 44,2 с.

2. Найдем по (39) средние арифметические значения t и t0:

$$\bar{t} = \frac{79{,}2 + 80{,}4 + 78{,}0 + 83{,}6 + 80{,}2}{5} = 80{,}28 \text{ с},$$

$$\bar{t}_0 = \frac{51{,}0 + 48{,}4 + 50{,}6 + 47{,}4 + 44{,}2}{5} = 48{,}32 \text{ с}.$$

Определим по (41) среднее арифметическое значение вязкости исследуемой жидкости при: ρ = 790 $\frac{кг}{м3}$, ρ0 = 998,2 $\frac{кг}{м3}$, η0 = 1,0 · 10-3 Па · с:

$$\bar{\eta} = \eta 0 \frac{\rho \bar{t}}{\rho_0 \bar{t}_0}; \quad \bar{\eta} = 1{,}0 \cdot 10\text{-}3 \cdot \frac{790 \cdot 80{,}28}{998{,}2 \cdot 48{,}32} = 1{,}31 \cdot 10\text{-}3 \text{ Па· с} = 1{,}31 \text{ мПа· с}.$$

3. Рассчитаем среднюю квадратичную ошибку вязкости по (44):

$$S\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 S_t^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t_0}\right)^2 S_{t_0}^2}.$$

Для этого по (40) определим средние квадратичные ошибки времени истечения исследуемой жидкости St и воды S_{t_0}:

St =

$$\sqrt{\frac{(80{,}28-79{,}2)^2+(80{,}28-80{,}4)^2+(80{,}28-78{,}0)^2+(80{,}28-83{,}6)^2+(80{,}28-80{,}2)^2}{5-1}} = 2{,}09 \text{ с}$$

S_{t_0} =

$$\sqrt{\frac{(48{,}32-51{,}0)^2+(48{,}32-48{,}4)^2+(48{,}32-50{,}6)^2+(48{,}32-47{,}4)^2+(48{,}32-44{,}2)^2}{5-1}} = 2{,}75 \text{ с.}$$

Найдем частные производные η при t = $\bar{t}$ и t0 = $\bar{t}$0:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\eta_0\rho}{\rho_0 t_0} = \frac{1{,}0\cdot10^{-3}\cdot790}{998{,}2\cdot48{,}32} = 16{,}38\cdot10\text{-}6 \text{ Па},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t_0} = -\frac{\eta_0\rho t}{\rho_0 t_0^2} = -\frac{1{,}0\cdot10^{-3}\cdot790\cdot80{,}28}{998{,}2\cdot48{,}32^2} = -27{,}21\cdot10\text{-}6 \text{ Па.}$$

Тогда Sη = $\sqrt{(16{,}38\cdot10^{-6})^2\cdot2{,}09^2+(-27{,}21\cdot10^{-6})^2\cdot2{,}75^2}$ = 82,2 · 10-6 Па·с.

4. Определим полуширину доверительного интервала или абсолютную ошибку вязкости $\Delta\eta$ по (43). Для этого, приняв доверительную вероятность γ = 0,95 и зная число измерений непосредственно определяемых величин (n = 5), найдем коэффициент Стьюдента [см. табл., например в (4, 9)], $t_{\gamma,\,n}$ = 2,78, тогда:

$$\Delta\eta = 2{,}78\cdot\frac{82{,}2\cdot10^{-6}}{\sqrt{5}} = 0{,}1\cdot10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с} = 0{,}1 \text{ мПа·с.}$$

Следовательно, с доверительной вероятностью γ = 0,95 = 95% истинное значение вязкости исследуемой жидкости лежит в интервале:

$$\eta = \bar{\eta} \pm \Delta\eta = (1{,}31 \pm 0{,}1)\cdot10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с} = (1{,}31 \pm 0{,}1) \text{ мПа·с.}$$

Относительная ошибка равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\eta}{\bar{\eta}}\cdot100\,\% = \frac{0{,}1\cdot10^{-3}}{1{,}31\cdot10^{-3}}\cdot100\% \approx 7{,}6\,\%.$$

3.8. Основы корреляционного анализа

Одной из главных задач корреляционного анализа является установление зависимости (связи) между признаками (частота пульса, артериальное давление, показатель анализа крови) — случайными величинами. Пусть X и $У$ — случайные величины. *Зависимость их друг от друга (если она существует) называется корреляционной зависимостью.* Эта зависимость может быть установлена *качественно* — по форме корреляционного поля — и *количественно* — путем вычисления коэффициента корреляции. При установлении корреляционной зависимости экспериментально для каждого обследованного объекта получают соответствующие пары значений величин X и $У$

(например, роста и массы тела людей определенного пола и возраста):

Значения величины *X*	x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
Значения величины *У*	y_1	y_2	y_3	. . .	y_n

Объем выборки — n. Каждой паре значений (xi, yi) на плоскости xOy соответствует одна точка. Всего будет n точек. Область на графике y(x), занятая этими точками, образует корреляционное поле. Разные виды таких полей показаны на рис. 11. Если форма корреляционного поля близка к кругу (рис. 11, б), то связи между признаками X и У нет. Если же корреляционное поле вытянуто (рис. 11, а; 11, в), то корреляционная связь между признаками X и У есть, причем тем сильнее, чем более вытянуто корреляционное поле.

По экспериментальным данным для каждого значения признака X можно найти $\overline{Y}$. Зависимость $\overline{Y}$x = f(x) называется эмпирическим уравнением регрессии У на X.

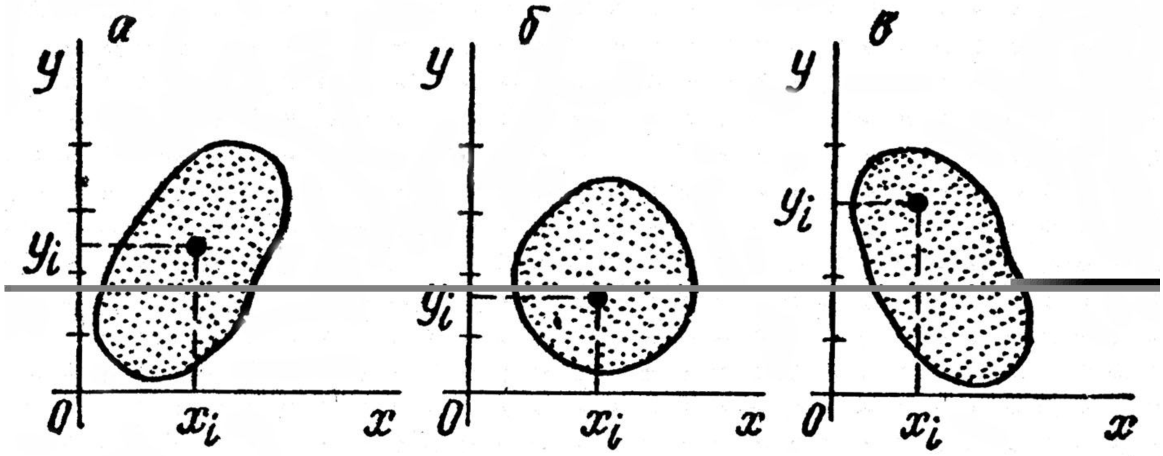


Рис. 11

Аналогично можно получить зависимость $\overline{X}$y = φ (y) — уравнение регрессии X на У. Графики этих функций называются линиями регрессии. Если они представляют собой прямые, то корреляционная связь между признаками X и У называется линейной и оценивается с помощью выборочного коэффициента корреляции r. Он равен:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2}}.$$

Значения r по модулю не превышают 1, но могут быть как положительными, так и отрицательными:

$$-1 \le r \le 1 \text{ или } |\,r\,| \le 1.$$

При r = 0 линейная связь между X и У отсутствует; при значениях | r | до 0,3 — связь слабая; от 0,3 до 0,7 — умеренная; от 0,7 до 1 — сильная; если | r | ≈ 1 — связь полная или, иначе, функциональная — в этом случае существует функция Y = f(X), жестко связывающая значения Y и X.

При r > 0 связь между признаками X и У прямая, т. е. с увеличением значений одного признака значения другого тоже увеличиваются; при r < 0 связь обратная, т. е.

с увеличением значений одного признака, значения другого уменьшаются.

Пример 1. X — рост, $У$ — масса тела людей определенного пола и возраста. При работе с разными выборками для этих признаков $r \approx 0{,}9$, т. е. связь между признаками сильная и прямая (с увеличением роста весьма вероятно увеличение массы тела).

Пример 2. X — охват населения прививками по разным районам области некоторого региона, $У$ — показатель заболеваемости (обычно на 10000 чел.). Здесь $r \approx -0{,}8$; связь сильная и обратная: с увеличением охвата населения прививками вероятность заболевания уменьшается.

Если выборка имеет достаточно большой объем и хорошо представляет генеральную совокупность (репрезентативна), то заключение о тесноте зависимости между признаками, полученное по данным выборки, можно распространить и на генеральную совокупность. Например, для оценки коэффициента корреляции rг нормально распределенной генеральной совокупности (при n ≥50) можно воспользоваться формулой.

$$r - 3\frac{1-r^2}{\sqrt{n}} < r_г < r + 3\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}.$$

3.9. Понятие о статистических гипотезах и критериях проверки гипотез

Во многих случаях требуется на основе экспериментальных данных решить, справедливо ли некоторое утверждение. Например, верно ли, что два набора данных (2 выборки) происходят из одного источника (из одной генеральной совокупности), или что A лучший стрелок, чем B, или что данное лекарство лучше другого при лечении определенного заболевания? При ответе на подобные вопросы хотелось бы, во-первых, принять наиболее обоснованное решение, во-вторых, — оценить вероятность ошибочности этого решения.

Рассмотрение таких задач в строгой математической постановке приводит к понятию **статистической гипотезы**.

В обычном языке гипотеза означает предположение. В математической статистике *гипотеза — это: а) предположение о виде неизвестного закона распределения исследуемой экспериментально случайной величины (непараметрическая гипотеза); б) предположение о значениях характеристик (параметров) известного распределения (параметрическая гипотеза).*

Примеры статистических гипотез. Делаются предположения:

1. Данный признак в генеральной совокупности распределен по нормальному закону (непараметрическая гипотеза).
2. Дисперсии двух совокупностей, распределенных по нормальному закону, равны между собой (параметрическая гипотеза).

Эти предположения подлежат проверке.

Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза.

Выдвинутую гипотезу H_0 называют нулевой (*основной*). *Конкурирующей* (*альтернативной*) *гипотезой называют гипотезу H_1*, которая несовместна с нулевой. Например, если H_0 состоит в предположении, что математическое ожидание $M(X)$ нормального распределения равно 2, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, что $M(X) \neq 2$. Коротко это записывают так:

$$H_0: M(X) = 2;$$

$$H_1: M(X), \neq 2.$$

Заключение о справедливости нулевой или альтернативной гипотезы всегда делается на основании анализа выборки определенного объема.

Если для исследуемого явления сформулирована та или иная гипотеза, то надо найти правило, которое позволяло бы по имеющимся статистическим данным (по выборке) принять решение о соответствии либо несоответствии выдвинутой гипотезы этим данными. Это правило называется **статистическим критерием (просто критерием, статистикой) проверки гипотезы**.

Для проверки непараметрических гипотез существуют *критерии согласия*, которые должны подтвердить или опровергнуть правильность выбора закона распределения. В данном случае чаще других используются *критерий* χ^2 (*хи-квадрат*) *Пирсона и критерий Колмогорова–Смирнова*. Первый из них более универсален, так как приемлем для случайных величин любого типа (дискретных и непрерывных), второй — только для непрерывных случайных величин. В данном пособии эти критерии лишь упоминаются. При необходимости ими можно воспользоваться, работая со специальными статистическими пакетами (Stadia, Statistica и т. д.) или с соответствующей литературой, например [5, 9, 13].

Параметрические гипотезы проверяются с помощью *параметрических критериев значимости*, разработанных прежде всего для случайных величин, распределенных по нормальному закону.

Создание критериев потребовало разработки достаточно сложной теории. Рассмотрим лишь основные ее идеи и продемонстрируем на примерах работу соответствующих правил.

Обычно проверяется нулевая гипотеза (H_0). Тогда статистическим критерием проверки H_0 называют случайную величину (статистику) K, точное или приближенное распределение которой известно. В конкретных задачах K имеет и свое конкретное обозначение. Например, если проверяют гипотезу о равенстве дисперсий 2 нормальных генеральных совокупностей, то в качестве статистики K используют отношение выборочных дисперсий (критерий F Фишера–Снедекора, иногда просто критерий Фишера):

$$K = F = S_1^2/S_2^2 \ (S_1 > S_2).$$

Так как входящие в критерий величины рассчитывают по данным определенных выборок, то вычисленное значение K называют *наблюдаемым значением критерия* $K_{\text{набл.}}$ Например, если по выборкам S_1^2=20, а S_2^2=5, то $K_{\text{набл.}} = F_{\text{набл.}} = 20/5 = 4$.

После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разделяют на две **области**:

1. *Критическая область — совокупность значений критерия К, при которых нулевую гипотезу* (H_0) *отвергают.*

2. *Область принятия гипотезы (область допустимых значений) — совокупность значений критерия К, при которых нет оснований в рамках данного критерия отвергнуть гипотезу* H_0.

Таким образом, основной принцип проверки гипотезы H_0 достаточно прост: если вычисленное по выборке значение критерия $K_{\text{набл.}}$ принадлежит критической области, гипотезу H_0 отвергают; если оно принадлежит области принятия гипотезы, H_0 можно принять.

Указанные области (интервалы) разделяются *критическими точками* (границами) $\kappa_{кр}$, которые позволяют различать одностороннюю (право- или левостороннюю) и двустороннюю критические области.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > \kappa_{кр.}$, где $\kappa_{кр.} > 0$ (рис. 12, *а*).

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < \kappa_{кр.}$, где $\kappa_{кр.} < 0$ (рис. 12, *б*).

Двусторонней называют критическую область, которая определяется неравенствами $K < \kappa_1$, $K > \kappa_2$, где $\kappa_2 > \kappa_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, т. е. распределение критерия симметрично относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $\kappa_{кр.} > 0$):

$K < -\kappa_{кр.}$, $K > \kappa_{кр.}$ или $|K| > \kappa_{кр.}$ (рис 12, *в*).

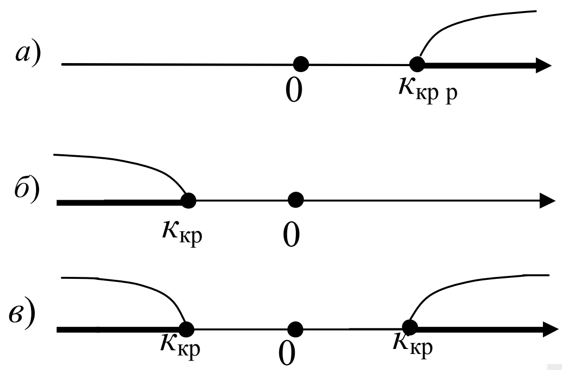


Рис.

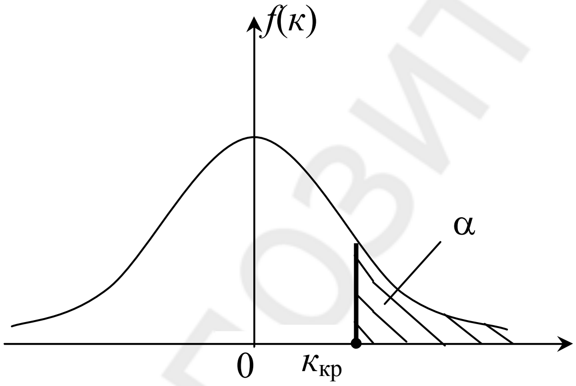


Рис.

Каким же образом можно отыскать критическую точку $\kappa_{кр.}$ на оси значений K? Уже говорилось, что обычно проверяется гипотеза H_0. Принимая решение по результатам ее проверки, можно допустить ошибки, различные по характеру. *Ошибка первого рода* состоит в том, что, согласно критерию, отвергается гипотеза H_0, которая на самом деле верна. *Ошибка второго рода* заключается в том, что будет принята неправильная гипотеза H_0, в то время как верна альтернативная гипотеза H_1. Обозначим вероятности этих ошибок α и β. Необходимо подчеркнуть, что их последствия могут быть весьма различными. Рассмотрим одну из возможных ситуаций. Пусть, например, проверяется гипотеза об отсутствии у человека некоторого заболевания. Признаком заболевания может являться, к примеру, периодическое повышение кровяного давления. Нулевая гипотеза (H_0): состояние больного в норме, повышение давления не наблюдается. Ошибку первого рода мы совершим, если отклоним H_0, когда она верна, т. е. будем считать пациента больным, когда на самом деле он здоров. Это создает для него неудобство, связанное с необходимостью прохождения курса лечения. Ошибку второго рода совершим, если будем считать, что заболевания нет, тогда как на самом деле оно есть. Эта ошибка исключает лечение и может привести к тяжелым последствиям для пациента.

При проверке гипотезы желательно, чтобы вероятности этих ошибок были достаточно малыми. Анализ показывает, что при заданном объеме выборки нельзя построить критерий K, позволяющий получить произвольные значения вероятности ошибок α и β. Обычно задают вероятность ошибки первого рода — α, т. е. вероятность отклонения гипотезы H_0, когда она верна. Эта вероятность определяется выбранным уровнем значимости, уже введенным нами ранее (см. 1.5; 3.5), и здесь она называется *уровнем значимости критерия* α. Как правило, α = 0,05, 0,01 или 0,001. Если, например, принят уровень значимости, равный 0,05, то это означает, что в 5 случаях из 100 мы рискуем допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

Вероятность α численно равна площади под кривой распределения критерия K, которая соответствует критической области (например, заштрихованной области на рис. 13). Поэтому критические точки $\kappa_{кр}$ ищут, решая следующие неравенства:

а) для правосторонней критической области:

$$P\ (K > \kappa_{кр.}) \le \alpha,\ (\kappa_{кр.} > 0); \quad (45)$$

б) для левосторонней критической области:

$$P\ (K < \kappa_{кр.}) \le \alpha,\ (\kappa_{кр.} < 0); \quad (46)$$

в) для двусторонней симметричной критической области:

$$P\ (K > \kappa_{кр.}) \le \alpha/2,\ (\kappa_{кр.} > 0),\ P\ (K < -\kappa_{кр.}) \le \alpha/2. \quad (47)$$

Для каждого критерия существуют соответствующие таблицы [см. например (4, 5, 9)], по которым при заданном уровне значимости α находят $\kappa_{кр.}$, удовлетворяющие формулам (45; 46; 47).

Итак, если вычисленное по выборке $K_{набл.}$ попадает в критическую область, нулевая гипотеза H_0 отвергается, если не попадает, то нет оснований ее отвергнуть.

В современных статистических пакетах обычно сравниваются не только $K_{набл.}$ и $\kappa_{кр.}$, но и заданный уровень значимости α и вероятность того, что, например, для правосторонней критической области $K > K_{набл.}$. Обозначим эту вероятность P^*. В нашем примере она равна площади под кривой распределения критерия, расположенной справа от $K_{набл.}$ (рис. 14 *а*, *б*).

Если вероятность P оказывается больше заданного уровня значимости α (P >

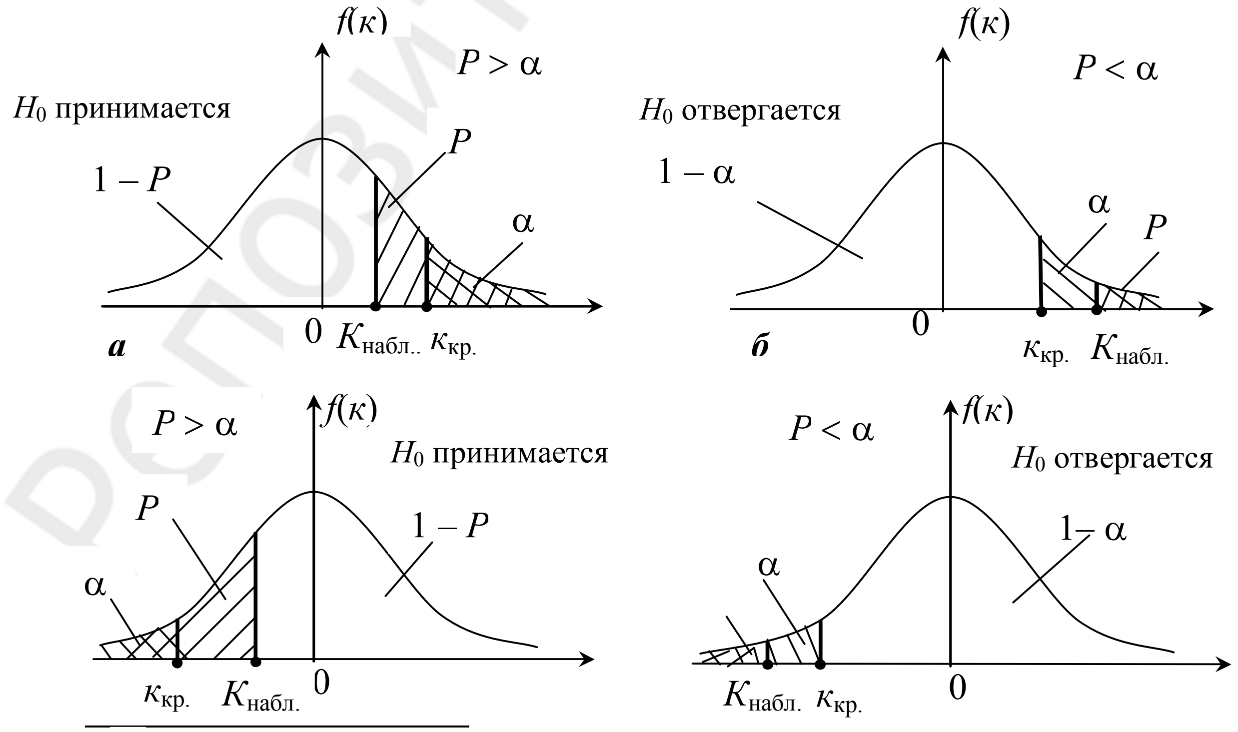
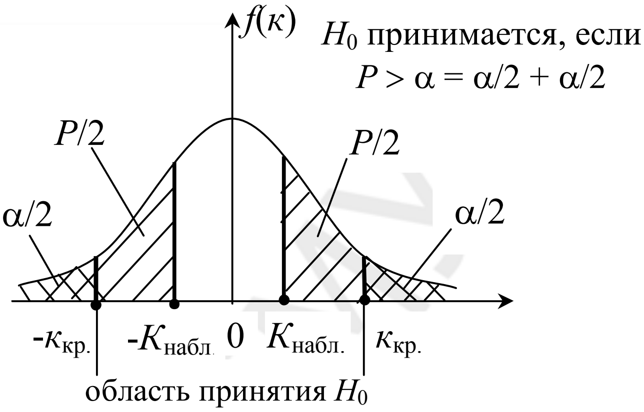


Рис. 14

[*] На мониторе компьютера значение P в результатах решения конкретной задачи часто обозначается словом «значимость».

α), то гипотеза H_0 принимается (рис. 14, *а*), в противном случае — не принимается (рис. 14 *б*; $P < \alpha$). Рис. 14 *в*, *г* иллюстрирует такой подход для левосторонней критической области. Этот подход также верен для двусторонней симметричной критической области (рис. 15).



Р

В качестве примеров использования различных критериев проверки гипотез рассмотрим критерии Фишера–Снедекора и Стьюдента.

Критерий Фишера–Снедекора позволяет сравнить дисперсии двух нормальных генеральных совокупностей.

На практике задача сравнения дисперсий возникает, например, тогда, когда необходимо сравнить точность приборов или методов измерений. Очевидно, предпочтительнее те приборы и методы, которые обеспечивают наименьшее рассеяние результатов измерений, т. е. наименьшую дисперсию.

Обычно задача формулируется следующим образом. Пусть генеральные совокупности величин X и $У$ распределены нормально. По независимым выборкам объемов n_1 и n_2, извлеченным из этих совокупностей, найдены выборочные дисперсии S_x^2 и S_y^2. По этим дисперсиям при заданном уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу — генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0\colon D(X) = D(Y).$$

Эта задача важна своим результатом. Если окажется, что гипотеза H0 справедлива, т. е. генеральные дисперсии одинаковы, то различие выборочных дисперсий незначимо и объясняется случайными причинами. Например, если различие выборочных дисперсий результатов измерений, выполненных двумя приборами, оказалось незначимым, то эти приборы имеют одинаковую точность. Если H0 будет отвергнута, т. е. если генеральные дисперсии неодинаковы, то различие выборочных дисперсий значимо. Оно не может быть объяснено случайными причинами, а является следствием различия самих генеральных дисперсий. В таком случае в нашем примере точность приборов будет различна.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий принимают величину:

$$F = \frac{S_б^2}{S_м^2} \quad \text{(критерий F Фишера–Снедекора),} \qquad (48)$$

где Sм и Sб — соответственно меньшее и большее значение выборочных дисперсий.

При использовании (48) критическая область определяется видом конкурирующей гипотезы. Рассмотрим два случая.

Нулевая гипотеза H0: D(X) = D(Y). Конкурирующая гипотеза H1: D(X) ≠ D(Y). Здесь критическая область двусторонняя.

Если есть основание предполагать, что одна из дисперсий обязательно не меньше другой, например, $D(X) \geq D(Y)$, тогда нулевая гипотеза H_0:

$D(X) = D(Y)$, а конкурирующая гипотеза H_1 — $D(X) > D(Y)$. В данном случае критическая область *правосторонняя.* Если H_1: $D(X) < D(Y)$, критическая область *левосторонняя*.

При решении конкретных задач придерживаются следующих правил.

1. Чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокупностей при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) > D(Y)$, вначале надо вычислить наблюдаемое значение критерия (отношение большей выборочной дисперсии к меньшей):

$$F_{\text{набл.}} = \frac{S_{\text{б}}^2}{S_{\text{м}}^2}.$$

Далее по таблице критических точек распределения Фишера–Снедекора [см. Приложения в (4, 5, 9)], по заданному α и числам степеней свободы* $m_1 = n_1 - 1$ и $m_2 = n_2 - 1$ (n_1 — объем выборки, для которой получена большая выборочная дисперсия) надо найти критическую точку $F_{\text{кр.}}(\alpha, m_1, m_2)$. Если $F_{\text{набл.}} < F_{\text{кр.}}$ — нет оснований отвергать H_0. Если же $F_{\text{набл.}} > F_{\text{кр.}}$, то H_0 отвергают.

При работе со статистическими пакетами (СП) гипотезу H_0 принимают, если $P > \alpha$, в противном случае — нет.

2. При конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$ критическую точку $F_{\text{кр.}}(\alpha/2, m_1, m_2)$ ищут по уровню значимости $\alpha/2$. Если $F_{\text{набл.}} < F_{\text{кр.}}$ — нет оснований отвергать H_0. Если $F_{\text{набл.}} > F_{\text{кр.}}$ H_0 отвергают.

При работе с СП H_0 принимают, если $P > \alpha = \alpha/2 + \alpha/2$.

Пример. По двум независимым выборкам (объемы первой — n1=11, второй — n2 = 14), извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и У, найдены выборочные дисперсии $S_x^2 = 0{,}76$ и $S_y^2 = 0{,}38$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверьте нулевую гипотезу H0: D(X) = D(Y) о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H1: D(X) > D(Y) (заметим, что независимыми называются выборки, в каждой из которых исследуются различные объекты).

Решение: найдем $F_{\text{набл.}}$: $F_{\text{набл.}} = 0{,}76/0{,}38 = 2$.

По условию задачи H_1: $D(X) > D(Y)$, поэтому критическая область — правосторонняя. По таблице Приложения, например, в [4] по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам степеней свободы $m_1 = n_1 - 1 = 10$, $m_2 = n_2 - 1 = 13$ находим критическую точку: $F_{\text{кр}}(0{,}05; 10; 13) = 2{,}67$.

Так как $F_{\text{набл.}} < F_{\text{кр.}}$, нет оснований при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ отвергать гипотезу H_0 о равенстве генеральных дисперсий; выборочные дисперсии также различаются незначимо.

С помощью **критерия Стьюдента** (T-критерия) сравнивают средние двух нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки).

Подобная задача возникает, например, при сравнении двух групп больных, одна из которых — контрольная, а другая проходит определенный курс лечения. В таких случаях сравнение средних позволяет судить об эффективности лечения и значимости принимаемых мер.

---

* Степени свободы — специальные параметры (характеристики распределения), используемые в теории статистических гипотез.

Исходные данные: n_1 и n_2 — объемы малых независимых выборок ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$). По этим выборкам найдены выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и выборочные дисперсии S_x^2 и S_y^2. Генеральные дисперсии неизвестны, но предполагаются равными. Это предположение можно подтвердить, применяя к исходным данным критерий Фишера–Снедекора.

Чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$, надо воспользоваться критерием Стьюдента:

$$T = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{(n_1-1)S_x^2+(n_2-1)S_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \qquad (49)$$

или — при $n_1 = n_2$ (выборки равного объема):

$$T = \frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{S_x^2+S_y^2}} \cdot \sqrt{n}. \qquad (50)$$

Дальнейшие действия стандартны. Необходимо вычислить $T_{набл.}$ с помощью формулы (49) или (50) и конкретных характеристик выборок. Если полученное значение $T_{набл.}$ принадлежит критической области, то H_0 отвергается и принимается конкурирующая гипотеза H_1 —$M(X)$ и $M(У)$, а, следовательно, $\bar{x}$ и $\bar{y}$ различаются значимо, т. е. их различие вызвано принципиальными причинами. Если $T_{набл.}$ оказывается в области принятия нулевой гипотезы, то $M(X) = M(У)$ и различие выборочных средних незначимо и обусловлено случайными факторами. Методика поиска критических точек и критической области зависит от конкурирующей гипотезы H_1, от уровня значимости α и числа степеней свободы $m = n_1 + n_2 - 2$ или $m = 2(n - 1)$ (при $n_1 = n_2$). Таблицы Приложений в [4, 5 или 9] позволяют легко решить эту задачу и сделать конкретный вывод.

При работе со статистическими пакетами, как и в случае использования критерия Фишера–Снедекора, гипотеза H_0 принимается, если $P > \alpha$.

П р и м е р 1. Исследовалась динамика нарушения ритма по типу желудочковой экстрасистолии у больных острым инфарктом миокарда при их лечении в условиях клиники.

Наблюдаемый показатель — количество экстрасистол X (1/ч):

– в контрольной группе — 15 больных, страдающих ишемической болезнью сердца (ИБС);

– в опытной группе — 10 больных с острым инфарктом миокарда на 1-й, 3-й и 9-й день после начала развития заболевания.

Исходные данные — количество экстрасистол в группах X (1/ч) (табл. 5).

Таблица 5

№№ п/п	**Контрольная группа, *X*1**	**Опытная группа**		
		на 1-й день, *X*2	**на 3-й день, *X*3**	**на 9-й день, *X*4**
1	2	28	15	5
2	5	35	13	3
3	3	40	19	8

4	0	25	5	3
5	1	33	18	7
6	5	42	18	8
7	3	19	5	4
8	2	21	10	5
9	8	28	16	2
10	1	31	15	2
11	0			
12	6			
13	4			
14	2			
15	7			

Оцените значимость различий показателя в независимых выборках $X1$ и $X2$; $X1$ и $X3$; $X1$ и $X4$, предполагая, что в генеральных совокупностях этот показатель распределен по нормальному закону.

*Решение**: с помощью критерия Стьюдента при уровне значимости α=0,05 проверяются гипотезы H_0: а) $M(X1)=M(X2)$; б) $M(X1)=M(X3)$; в) $M(X1)=M(X4)$ против H_1: г) $M(X1) \neq M(X2)$; д) $M(X1) \neq M(X3)$; е) $M(X1) \neq M(X4)$.

Результаты расчетов T-критерия приведены в табл.6.

Таблица 6

Характеристики	***X*1**	***X*2**	***X*3**	***X*4**
Среднее выборочное арифметическое значение	3,3	30,2	13,4	4,7
Число наблюдений (объем выборок)	15	10	10	10
m (число степеней свободы)		23	23	23
$T_{\text{набл}}$		12,91	6,6	1,45
P (значимость)		$5 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,16
$T_{\text{кр. двуст.}}$		2,07	2,07	2,07

На основании полученных данных следует сделать выводы (табл. 7).

Таблица 7

Сравниваемые группы	**Выводы**	
$X1$ и $X2$	$P \ll 0{,}05$ $T_{\text{набл.}} > T_{\text{кр.}}$	Нулевая гипотеза H_0 отвергается — $M(X1) \neq M(X2)$; различие выборочных средних значимо.
$X1$ и $X3$	$P \ll 0{,}05$ $T_{\text{набл.}} > T_{\text{кр.}}$	Нулевая гипотеза H_0 отвергается — $M(X1) \neq M(X3)$; различие выборочных средних значимо.
$X1$ и $X4$	$P > 0{,}05$ $T_{\text{набл.}} < T_{\text{кр.}}$	Нулевая гипотеза H_0 не отвергается — $M(X1) = M(X4)$; различие выборочных средних незначимо,

Полученные данные свидетельствуют, что показатель нарушения ритма, т. е. количество экстрасистол у больных острым инфарктом миокарда на 1-й и 3-й дни по-

* Решение получено с помощью персонального компьютера с использованием электронной таблицы Microsoft Excel.

сле начала его развития значимо увеличен по сравнению с этим показателем у больных ИБС ($P << 0{,}05$). К 9-у дню лечения количество экстрасистол существенно снижается и незначимо отличается от показателя в контрольной группе больных ИБС ($P > 0{,}05$).

Пример 2. Получены две выборки с данными о продуктивности пшеницы, собранной на двух соседних полях двумя различными методами — табл. 8:

Таблица 8

1:	20	17,9	20,6	22	21,4	23,8	21,4	19,8	18,4	22,5
2:	22,1	18,5	19,4	22,1	27,1	24,9	21,6	20,3	18,7	23,1

Требуется выявить различия этих двух методов по критериям Фишера–Снедекора и Стьюдента; уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение получено с помощью статистического пакета Stadia; оно приводится в виде, показанном на мониторе персонального компьютера.

Результаты: критерии ФИШЕРА и СТЬЮДЕНТА.

Статистика Фишера = 0,8101. Значимость (P) = 0,379, степ. своб. = 9; 9.

<Нет различий между выборочными дисперсиями> — Гипотеза 0: <Нет различий между выборочными дисперсиями>

Статистика Стьюдента = 0,5339. Значимость = 0,6056, степ. своб. = 18.

Гипотеза 0: <Нет различий между выборочными средними>

Выводы: как можно видеть из полученных результатов анализа, ни критерий Стьюдента, ни критерий Фишера не выявляют заметных различий между рассматриваемыми методами сбора урожая (полученные значимости P равны 0,379 и 0,6056 и существенно больше 0,05).

ЗАДАЧИ

1. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема n=80. Она представлена следующим статистическим рядом:

x_i	5	10	20	25
m_i	12	24	30	14

Дополните эту таблицу данными, необходимыми для построения полигона относительных частот; приведите этот график и, используя его, определите выборочную моду. Найдите выборочное среднее $\bar{x}_в$ и выборочную дисперсию $D_в$.

Ответ: $\bar{x}$ = 15,625; $D_в \approx$ 48,98.

2. Анализируемый показатель X — сердечный индекс. Это один из важнейших клинических показателей работы сердца, равный отношению минутного объема крови (л/мин) к площади поверхности тела (м^2). Интервальное распределение для выборки из 112 пациентов в критическом состоянии имеет вид:

Номер интервала	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Интервал, сердечный индекс л/мин.м^2	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8
Частота m_i	10	40	25	20	10	5	0	2

По данным таблицы постройте гистограмму относительных частот сердечного индекса и укажите, подчиняется ли этот показатель в генеральной совокупности нормальному закону.

3. Постройте и сравните гистограммы частот и относительных частот. Случайные величины — скорость V (м/с) распространения механической волны в рубцово-измененной ткани разного типа.

Неосложненный рубец:

40, 39, 42, 42, 43, 40, 41, 45, 42, 40, 44, 35, 40, 40, 41, 41, 43, 42, 45, 42, 39, 38, 40, 45, 43, 42, 39, 38, 41, 42.

Келлоидный рубец:

80, 85, 88, 89, 90, 95, 98, 99, 95, 100, 92, 96, 97, 99, 98, 89, 89, 100, 102, 105, 99, 98, 82, 84, 83, 101, 99, 98, 97, 100.

4. Исследуется нарушение сердечного ритма у больных острым инфарктом миокарда. Исследуемый показатель — количество экстрасистол X (1/ч). Наблюдаются две группы: контрольная — 15 больных ишемической болезнью сердца (ИБС) и опытная — 10 больных с острым инфарктом миокарда.

Контрольная группа: X — 2, 5, 3, 0, 1, 5, 3, 2, 8, 1, 0, 6, 4, 2, 7.

Опытная группа (данные получены на 3-й день после начала заболевания): X — 15, 13, 19, 5, 18, 18, 5, 10, 16, 15.

Считая, что исследуемый показатель в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, проведите интервальную оценку генерального среднего $\overline{x}_г$ по полученным выборкам при доверительной вероятности γ =0,95.

Ответ: контрольная группа — $\overline{x}_г = (3{,}27 \pm 1{,}37)1/ч$;
опытная группа — $\overline{x}_г = (13{,}4 \pm 3{,}68)1/ч$.

5. Произведено 5 независимых измерений толщины пластины h (мм). Получены следующие результаты: 2,15; 2,18; 2,14; 2,16; 2,17. Оцените истинное значение толщены пластины с помощью доверительного интервала, принимая доверительную вероятность 1) $\gamma = 0{,}95$; 2) $\gamma = 0{,}99$. Сравните полученные результаты.

Ответ: 1) $h = (2{,}16 \pm 0{,}02)$ мм; 2) h = $(2{,}16 \pm 0{,}03)$ мм.

6. Проведено 26 анализов крови. Определяли X (число эритроцитов, в млн) и Y (содержание гемоглобина, в %):

	0,80	0,71	2,63	3,19	2,8	3,14	3,21	3,28	3,63	3,3	4,1	3,29	3,46
Y	22	45	61	66	72	83	73	82	78	82	81	82	77
	3,32	3,11	3,28	3,66	3,90	4,33	3,80	3,82	3,81	4,20	4,47	3,71	4,22
Y	80	82	79	84	75	82	79	87	87	87	90	97	96

Определите выборочный коэффициент корреляции r.

Ответ: 0,882.

7. Имеется выборка из 10 измерений роста (в см) отцов (X) и их взрослых сыновей (Y):

	180	172	173	169	175	170	179	170	167	174

	86	*80*	*76*	*71*	*82*	*66*	*82*	*72*	*69*	*77*

Определите выборочный коэффициент корреляции r.

Ответ: 0,887.

8.[*] Препарат из группы антагонистов кальция — нифедипин обладает способностью расширять сосуды. Его применяют при лечении ишемической болезни сердца. Экспериментально измерялся диаметр коронарных артерий после приема нифедипина и плацебо. Получены следующие две выборки данных диаметра коронарной артерии (в мм):

Плацебо	2,5	2,2	2,6	2,0	2,1	1,8	2,4	2,3	2,7	2,7	1,9
Нифедипин	2,5	1,7	1,5	2,5	1,4	1,9	2,3	2,0	2,6	2,3	2,2

Позволяют ли приведенные данные полагать, что нифедипин влияет на диаметр коронарных артерий?

Ответ: результаты статистического анализа, проведенного с применением критерия Стьюдента, не позволяют считать значимым влияние нифедипина на диаметр коронарных артерий.

[*] Задача 8 взята из [9].

Литература

1. *Афифи А., Эйзен С. Статистический анализ. Подход с использованием ЭВМ. – М.: Мир, 1988.*
2. *Бейли Н*. Математика в биологии и медицине. – М.: Мир. 1970.
3. *Венцель Е.С.* Теория вероятностей. – М.: Высшая школа, 1998.
4. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001.
5. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001.
6. *Гнеденко Б.В., Хинчин И.Я*. Элементарное введение в теорию вероятности. – М.: Наука, 1982.
7. *Гусак А.А., Бричикова Е.И*. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей. – Мн.: ТетраСистемс, 1999.
8. *Гроссман С., Тернер Дж*. Математика для биологов. – М.: Высшая школа, 1983.
9. *Медик В.А., Токмачев М.С*., *Фишман Б.Б*. Статистика в медицине и биологии, Т. I и II. – М.: Медицина, 2001.
10. *Рокицкий Н.Ф*. Биологическая статистика. – Мн.: Высшая школа, 1967.
11. *Румшинский Л.З*. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1976.
12. *Сакевич Л.К., Смольская Н.А*. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн..: БДЭУ, 1996.
13. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А*. Анализ данных на компьютере. – М.: Финансы и статистика, 1995.
14. *Урбах В.Ю*. Математическая статистика для биологов и медиков. – М.: Изд-во АНСССР, 1963.
15. *Фигурин В.А., Оболонкин В.В*. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: ООО «Новое знание», 2000.
16. *Юнкеров В.И., Григорьев С.Г*. Математико-статистическая обработка данных медицинских исследований. – СПб: Элби, 2002.
17. *Шевченко И.Т*. Элементы вариационной статистики для медиков – Киев: Наукова думка, 1970.

Оглавление

Учебное издание

Инсарова Наталия Ивановна
Лещенко Вячеслав Григорьевич

Элементы теории вероятностей и математической статистики

Учебно-методическое пособие

Ответственная за выпуск Н.И. Инсарова
Редактор Л.В. Харитонович
Компьютерная верстка О.Н. Быховцевой

Подписано в печать ___________. Формат 60×84/16. Бумага писчая. Печать офсетная.
Гарнитура «Times». Усл. печ. л. ______. Уч.-изд. л.______. Тираж _____ экз. Заказ _______.
Издатель и полиграфическое исполнение –
Белорусский государственный медицинский университет
ЛВ № 410 от 08.11.99; ЛП № 51 от 17.11.02.
220050, г. Минск, ул. Ленинградская, 6.