

МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
КАФЕДРА ОРТОПЕДИЧЕСКОЙ СТОМАТОЛОГИИ

# БИОМЕХАНИКА СИСТЕМЫ «ЗУБ–ПЕРИОДОНТ–КОСТНАЯ ТКАНЬ»

Монография



Минск БГМУ 2009

УДК 616.314.17–008.1–018.4

**Биомеханика** системы «зуб–периодонт–костная ткань» : монография / С. А. Наумович [и др.]. – Минск : БГМУ, 2009. – 279 с. – ISBN 978–985–528–010–2.

Изложен современный подход к математическому моделированию системы «зуб–периодонт–костная ткань». В качестве модели периодонта принята изотропная упругая прослойка, ограниченная двумя составными эллиптическими гиперboloидами, причем наружная поверхность жестко скреплена с костной тканью и считается неподвижной, а внутренняя жестко скреплена с корнем зуба, рассматриваемого по отношению к упругому периодонту как абсолютно твердое тело. Костная ткань рассматривается в двух вариантах: нормальном и ослабленном состоянии. Визуализация напряженно-деформированного состояния костной ткани под воздействием сосредоточенной нагрузки осуществлена с помощью метода голографической интерферометрии.

Предназначена для студентов стоматологических факультетов, врачей-интернов, аспирантов, клинических ординаторов, врачей-стоматологов.

Табл. 13. Ил. 128. Библиогр.: 135 назв.

Утверждено Советом Бел. гос. мед. универ.

А в т о р ы: С. А. Наумович, С. В. Ивашенко, С. М. Босяков, А. Е. Крушевский

**Р е ц е н з е н т ы:**

зав. каф. челюстно-лицевой хирургии Белорусской академии последиplomного образования, д-р мед. наук, проф. А. С. Артюшкевич; д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета Г. И. Михасев

ISBN 978–985–528–010–2

© Наумович С. А. Ч. 1  
© Ивашенко С. В. Ч. 2  
© Босяков С. М. Ч. 2  
© Крушевский А. Е. Ч. 1  
© Оформление. Белорусский государственный  
медицинский университет, 2009

## Предисловие

Монография посвящена математическому моделированию системы «зуб–периодонт–костная ткань». В качестве модели периодонта принята изотропная упругая прослойка, ограниченная двумя составными эллиптическими гиперboloидами, причем наружная поверхность жестко скреплена с костной тканью и считается неподвижной, а внутренняя жестко скреплена с корнем зуба, рассматриваемого по отношению к упругому периодонту как абсолютно твердое тело. Костная ткань рассматривается в двух вариантах: нормальном и ослабленном состоянии. Визуализация напряженно-деформированного состояния костной ткани под воздействием сосредоточенной нагрузки осуществлена с помощью метода голографической интерферометрии.

Монография состоит из двух частей и заключения со списком литературы.

Первая часть включает девять глав.

В первой главе рассмотрены строение и функции периодонта. Во второй главе изложены математические основы моделирования и получены основные формулы для перемещений и углов поворотов зуба при действии произвольных сил.

В третьей главе выведены формулы для компонентов напряжений на поверхности скрепления периодонта с корнем зуба.

В четвертой главе проведено исследование изменения жесткости зуба и напряженного состояния в зависимости от степени атрофии и геометрических параметров корня при поступательном перемещении вдоль горизонтальной оси симметрии корня зуба.

В пятой главе исследуется изменение жесткости зуба и напряженного состояния периодонта в зависимости от степени атрофии костной ткани и геометрических параметров корня зуба при поступательном перемещении вдоль вертикальной оси.

В шестой главе исследуется жесткость зуба при повороте вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости симметрии.

В седьмой главе проводится исследование кинематики зуба под действием произвольных сил.

В восьмой главе выводятся формулы для определения опорных реакций многоопорного мостовидного протеза.

В девятой главе проводится компьютерное численное и качественное исследование напряженного и деформированного состояния системы «периодонт–зуб».

Вторая часть состоит из семи глав.

В первой главе представлено строение и физико-химические свойства костной ткани челюстей.

Во второй главе приведены способы подготовки костной ткани к ортодонтическому лечению.

В третьей главе сообщается о применяемых силах для перемещения зубов.

В четвертой главе представлены уравнения и формулы для моделирования перемещений и поворотов корня зуба в костной ткани, а также расчета перемещений корней зубов в нормальной и ослабленной костной ткани для различных клинических случаев.

Пятая глава посвящена расчету напряжений, возникающих в костной ткани под действием сосредоточенной нагрузки.

В шестой главе представлено биомеханическое моделирование действия сосредоточенной нагрузки на многокорневые зубы.

В седьмой главе проведена визуализация напряженно-деформированного состояния костной ткани челюсти с помощью метода голографической интерферометрии.

Первая глава части первой написана С. А. Наумовичем, глава вторая и третья написаны А. Е. Крушевским, остальные главы написаны авторами совместно. Первая-третья и седьмая главы части второй написаны С. В. Ивашенко, четвертая–шестая написаны С. М. Босяковым.

В подготовке материала монографии принимали участие: кафедра ортопедической стоматологии БГМУ, кафедра теоретической механики БНТУ, кафедра биомеханики БГУ, а также декан факультета радиофизики БГУ С. Г. Мулярчик, программисты: С. Русак, П. П. Кожич, аспирант К. С. Юркевич, лаборанты: канд. мед. наук Ф. Г. Дрик, Е. И. Долговечная, Е. Э. Тальковская, Е. В. Ивашина. Авторы данной монографии выносят им благодарность за помощь.

## Часть 1. Биомеханика системы «зуб–периодонт»

### Глава 1

#### Строение и функции периодонта

##### 1.1. ПОДДЕРЖИВАЮЩИЙ АППАРАТ ЗУБА

Поддерживающий аппарат зуба (пародонт) включает комплекс связанных между собой тканей, окружающих и фиксирующих зуб (десна, надкостница, кость альвеолярного отростка (стенка зубной альвеолы), периодонт (связка, удерживающая корень зуба в костной альвеоле) и покрывающий корень цемент. Строение пародонта представлено на рис. 1.1 [4, 9, 11, 13, 30].

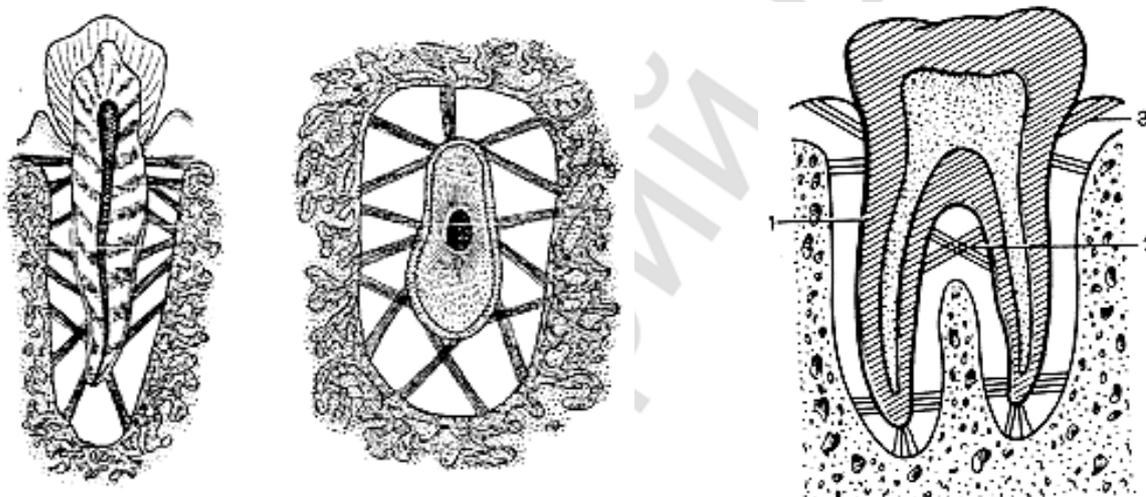


Рис. 1.1. Строение периодонта:

1 — зубоальвеолярные волокна; 2 — межзубные (межкорневые) волокна; 3 — зубодесневые волокна

Поддерживающий аппарат зуба выполняет ряд функций: 1) опорную и амортизирующую — удерживая зуб в альвеоле, распределяя жевательную нагрузку и регулируя давление при жевании; 2) барьерную — формируя барьер, препятствующий проникновению микроорганизмов и других вредных веществ в область корня; 3) трофическую — обеспечивая питание цемента; 4) рефлекторную — благодаря наличию в периодонте большого количества чувствительных нервных окончаний.

Ткани поддерживающего аппарата зуба представляют собой эмбриологическое, физиологическое и патологическое единство. Между развитием, функциями и болезнями пародонта существует тесная связь, несмотря на различные структуры составляющих его элементов.

На эмбриологическую связь указывает то, что все ткани пародонта (за исключением десен) развиваются из соединительной ткани, окружающей

зубной зачаток, и имеют общее кровоснабжение. Физиологическая связь проявляется в фиксирующей функции тканей пародонта. При потере зуба весь пародонт рассасывается. Патологическая связь проявляется в том, что патологические процессы, возникающие в отдельных тканях пародонта, как правило, быстро переходят на остальные его части. Пародонт скорее является функциональным, физиологическим, патологическим понятием, чем анатомическим.

Разделение жевательного аппарата на зубы и пародонт и выделение понятия пародонта нарушает представление о зубе как анатомической единице, так как покрывающий корень зуба цемент (хотя он тесно связан с зубом) все же следует отнести к пародонту, ибо его развитие отличается от развития остальных твердых тканей зуба — эмали и дентина. Эмаль и дентин развиваются из зубного зачатка, а цемент — из соединительно-тканной оболочки, окружающей зубной зачаток. Функция цемента состоит в фиксации зуба. Таким образом, патологические процессы цемента связаны с болезнями пародонта.

## 1.2. ПЕРИОДОНТ (АНАТОМИЯ, ГИСТОЛОГИЯ, ФИЗИОЛОГИЯ)

Наибольший интерес с точки зрения восприятия жевательного давления представляет периодонт. Периодонт — связка, удерживающая корень зуба в костной альвеоле. Периодонт представляет собой соединительную ткань, расположенную между стенкой зубной альвеолы и поверхностью корня зуба. Это пространство называется периодонтальной щелью. Соединительная ткань периодонта непосредственно связанная с костью челюсти, через апикальное отверстие — с культей зуба, а у краев зубной лунки — с десной и надкостницей челюсти, показана на рис. 1.2.

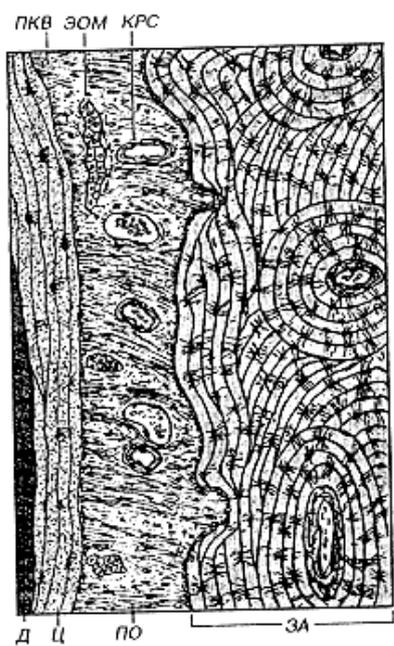


Рис. 1.2. Микроскопическое строение периодонта (по В. Л. Быкову):  
 Д — дентин; Ц — цемент; ЗА — зубная альвеола; ПО — периодонт; ПКВ — пучки коллагеновых волокон; КРС — кровеносные сосуды; ЭОМ — эпителиальные островки Малассе

### 1.3. ФУНКЦИИ ПЕРИОДОНТА

1. Опорная (удерживающая и амортизирующая) — удержание зуба в альвеоле, распределение жевательной нагрузки посредством волокон, основного вещества и жидкости, связанной с ним, а также находящейся в сосудах.

2. Участие в протезировании зубов.

3. Проприоцептивная — благодаря наличию многочисленных сенсорных нервных окончаний; механорецепторы, воспринимающие нагрузки, способствуют регуляции жевательных сил.

4. Трофическая — обеспечивает питание и жизнеспособность цемента.

5. Гомеостатическая — регуляция пролиферативной и функциональной активности клеток, процессов обновления коллагена, резорбции и репарации цемента, перестройки альвеолярной кости, т. е. всех механизмов, связанных с непрерывными структурно-функциональными изменениями зуба и его поддерживающего аппарата в условиях роста, выполнения жевательной функции и лечебных воздействий.

6. Репаративная — участвует в восстановительных процессах путем образования цемента как при переломе корня зуба, так и при резорбции его поверхностных слоев.

7. Защитная — обеспечивается макрофагами и лейкоцитами.

### 1.4. СТРОЕНИЕ ПЕРИОДОНТА

Периодонтальное пространство (щель). Ширина этого пространства составляет в среднем 0,2–0,3 мм (варьирует в пределах 0,15–0,4 мм) и неодинакова в различных его участках. По данным А. С. Щербакова (1969), ширина периодонтальной щели у устья зубной альвеолы равна 0,23–0,27 мм, в пришеечной трети — 0,17–0,19 мм, в средней трети — 0,08–0,14 мм (минимальная ширина), в верхушечной трети — 0,16–0,19 мм (рис. 1.3) [6, 7]. Соответствующая схема строения пародонта показана на рис. 1.3.

Ширина периодонтальной щели сокращается при бездействии зуба и нарастает при избыточных окклюзионных нагрузках и лечебных воздействиях. Следовательно, в средней части альвеолы периодонтальная щель имеет сужение, что дало основание некоторым авторам сравнивать ее конфигурацию с песочными часами. Такое сужение периодонтальной щели объясняют характером физиологической подвижности зуба. При боковых движениях наибольший наклон корня наблюдается в области верхушки и на уровне шейки зуба. Зуб в это время действует как двуплечий рычаг с точкой опоры, расположенной приблизительно в средней трети корня. Этим и объясняется сужение периодонтальной щели в средней трети ее.

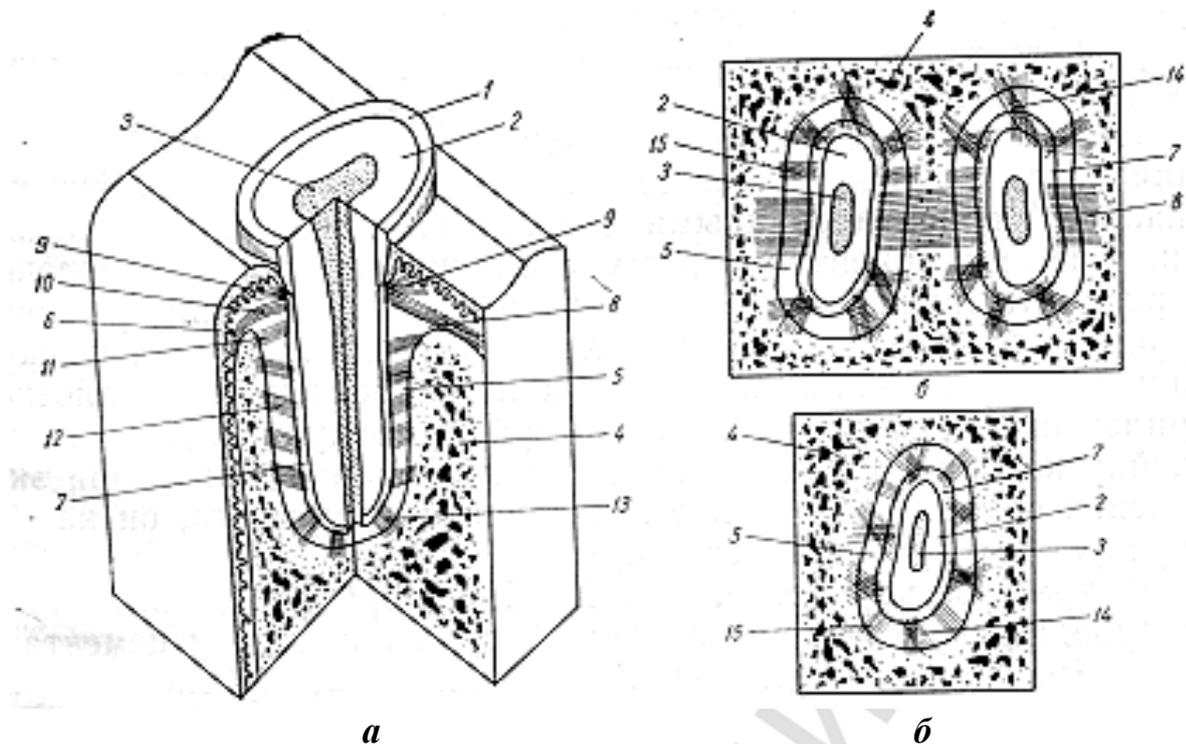


Рис. 1.3. Схема строения пародонта зубов человека (по А. С. Щербакову):  
*а* — строение пародонта на вестибулооральном, медиодистальном срезах; *б* — строение пародонта на поперечном срезе на уровне шейки зуба; *в* — строение пародонта на поперечном срезе уровня средней трети зуба; 1 — эмаль; 2 — дентин; 3 — пульпа; 4 — кость альвеолы; 5 — периодонтальная щель; 6 — десна; 7 — цемент; 8 — межзубная связка; 9 — зубодесневые волокна; 10 — зубопериостальные волокна; 11 — зубогребешковые волокна; 12 — косые зубоальвеолярные волокна; 13 — верхушечные волокна; 14 — тангенциальные волокна; 15 — радиальные волокна

При измерении ширины периодонтальной щели было установлено, что существенной разницы в ширине пародонта у разных групп зубов, а также различных сторон (вестибулярной и оральной) нет.

В течение жизни человека периодонтальная щель неоднократно перестраивается соответственно изменяющейся функции. Перестройка выражается в оппозиции и резорбции кости альвеолы, усилении отложения цемента. Оппозиция кости наблюдается на дистальной стороне межзубных перегородок, а резорбция — с медиальной стороны их, что связывают с тенденцией зубов к смещению их в медиальном направлении.

На величину периодонтальной щели влияют и другие факторы: возраст, различные патологические процессы, протекающие в ней. У непрорезавшегося зуба, но уже сформировавшегося периодонтальная щель уже, чем у прорезывающегося и участвующего в жевании. С исключением зуба из функции ширина периодонтальной щели уменьшается.

Объем периодонтального пространства равен 30–100 мм<sup>3</sup> для однокорневых зубов и 60–150 мм<sup>3</sup> для многокорневых. 62 % этого объема занимают коллагеновые пучки, 38 % — рыхлая соединительная ткань.

## 1.5. ГИСТОЛОГИЯ

Структурными компонентами периодонта являются его клетки и межклеточное вещество, которое образовано волокнами и основным аморфным веществом, сосудами и нервами.

Клетки периодонта: фибробласты, малодифференцированные клетки, остеобласты, цементобласты, остеокласты, одонтокласты, макрофаги, тучные клетки, лейкоциты, эпителиальные остатки (островки) Малассе. Визуализация клеток периодонта выполнено на рис. 1.4.

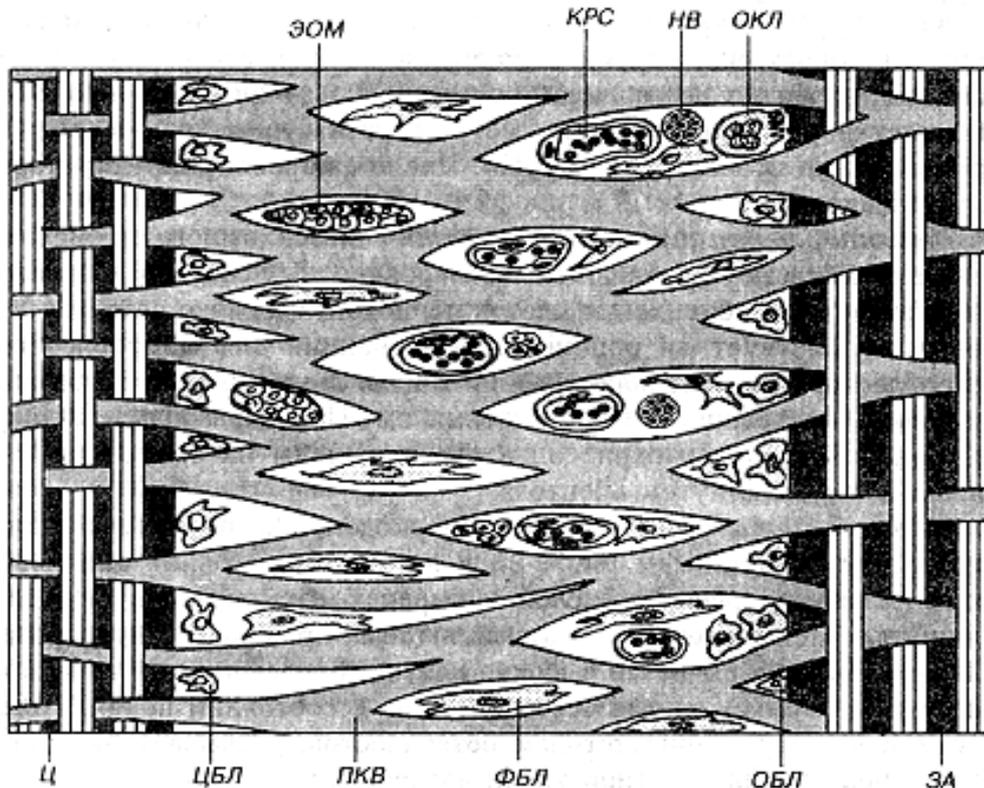


Рис. 1.4. Схема структурной организации периодонта (по В. Л. Быкову):

Ц — цемент; ЗА — зубная альвеола; ПКВ — пучки коллагеновых волокон; КРС — кровеносные сосуды; НВ — нервные волокна; ЭОМ — эпителиальные островки Малассе; ОБЛ — остеобласт; ОКЛ — остеокласт; ФБЛ — фибробласт; ЦБЛ — цементобласт

Наибольший интерес для стоматологов-ортопедов представляет основное (межклеточное) вещество с его функционально ориентированными соединительно-тканными волокнами.

Волокна периодонта. Периодонт содержит коллагеновые волокна, формирующие толстые ориентированные пучки и образующие несколько основных групп, пространства между которыми (интерстиций) заполнены более тонкими ветвящимися коллагеновыми пучками, формирующими трехмерную сеть. Волокна в периодонте показаны на рис. 1.5.

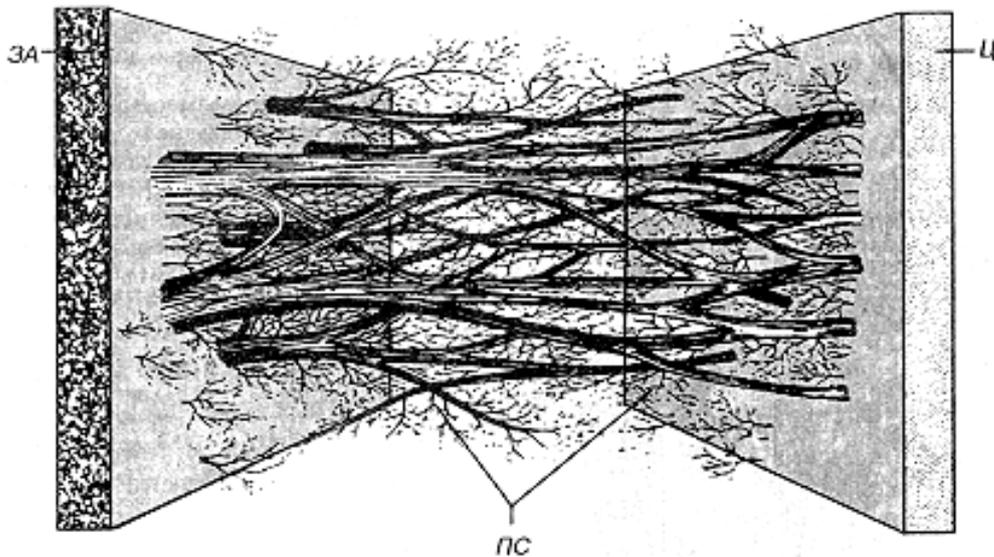


Рис. 1.5. Промежуточное сплетение коллагеновых волокон в периодонте:

Ц — цемент; ЗА — зубная альвеола; ПС — промежуточное сплетение волокон (по J. M. Shackelford, 1971 и G. H. Schumacher et al., 1990, с изменениями)

Помимо коллагеновых волокон, в периодонте имеется и сеть окситановых волокон. Зрелые эластические волокна в периодонте человека отсутствуют, что, по мнению ряда авторов, связано с его быстрым обновлением.

Коллагеновые волокна состоят из пучков коллагеновых фибрилл типичного строения. Особенность коллагеновых фибрилл периодонта состоит в том, что они имеют сравнительно небольшой диаметр (в среднем, около 55 нм, что в 2–4 раза меньше, чем в сухожилии), причем в течение жизни он снижается с 70 до 30 нм. Коллагеновые волокна характеризуются слегка волнообразным ходом, отчего способны несколько удлиняться при натяжении. Благодаря этому, несмотря на отсутствие у них эластичности, они могут обеспечивать ограниченные движения зуба.

Пучки коллагеновых волокон периодонта одним своим концом внедряются в цемент, другим — в кость альвеолярного отростка, причем их терминальные участки в обеих тканях называются прободающими (шарпеевскими) волокнами. Прободающие волокна в кости обычно имеют значительно большую толщину (10–20 мкм), чем в цементе (3–5 мкм). Концы волокон в цементе частично минерализованы. Отдельные волокна сплетаются друг с другом и могут быть короче длины всего пучка.

Пучки коллагеновых волокон периодонта представлены двумя составными частями, одна отходит от кости (альвеолярные волокна) другая — от цемента (зубные волокна). Волокна обеих частей переплетаются друг с другом примерно посередине периодонта, образуя промежуточное сплетение, показанное на рис. 1.5. Указанное строение согласуется со сведениями о развитии этих волокон из двух источников на ранних этапах

прорезывания зуба. Высказано предположение, что такое устройство периодонта обеспечивает оптимальные условия для его перестройки в соответствии с меняющимися статическими и динамическим нагрузками.

В зависимости от расположения участков прикрепления и направления хода все пучки коллагеновых волокон периодонта разделяют на несколько групп. Группы волокон представлены на рис. 1.6.

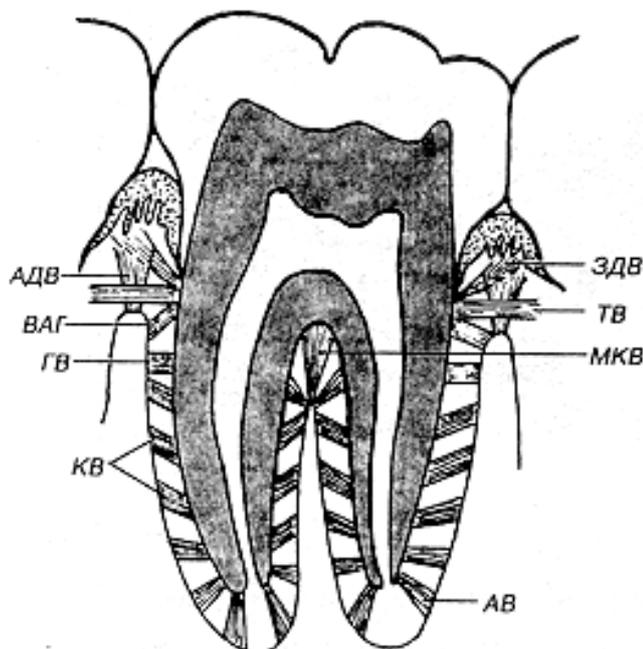


Рис. 1.6. Основные группы волокон периодонта (по В. Л. Быкову):

ВАГ — волокна альвеолярного гребня; ГВ — горизонтальные волокна; КВ — косые волокна; МКВ — межкорневые волокна; ТВ — трансептальные волокна; ЗДВ — зубодесневые волокна; АДВ — альвеолярно-десневые волокна

1. Волокна альвеолярного гребня связывают шеечную поверхность зуба с гребнем альвеолярной кости и располагаются преимущественно в щечно-язычной плоскости.

2. Горизонтальные волокна располагаются глубже волокон альвеолярного гребня у входа в периодонтальное пространство. Они проходят горизонтально, т. е. под прямым углом к поверхности корня зуба и альвеолярной кости. Горизонтальные волокна образуют так называемую циркулярную связку, в состав которой включают также трансептальные волокна, связывающие соседние зубы и проходящие над вершиной альвеолярного отростка.

3. Косые волокна — численно преобладающая группа, занимает средние  $\frac{2}{3}$  периодонтального пространства. Волокна располагаются косо в венечной плоскости, связывая корень с альвеолярной костью. В направлении коронки они сливаются с горизонтальными волокнами, в направлении верхушки — с апикальными волокнами.

4. Апикальные волокна расходятся перпендикулярно от апикальной части корня ко дну альвеолы; одни из них идут горизонтально, другие — вертикально;

5. Межкорневые волокна в многокорневых зубах связывают корень в области бифуркации с гребнем межкорневой перегородки, к которому они направляются частично в горизонтальном, частично в вертикальном направлениях.

Описанное расположение волокон периодонта способствует тому, что силы, воздействующие на зуб, посредством волокон равномерно распределяются в виде тяги на альвеолярную кость.

Окситалановые волокна (незрелые эластические) образуют пучки диаметром 0,5-1,0 мкм и длиной до нескольких миллиметров. Они идут параллельно корню, располагаясь вблизи него или в центральной части периодонтального пространства. Проходя в вертикальном направлении, они образуют вокруг корня трехмерную сеть, пронизывающую пучки коллагеновых волокон под прямым углом. Эти волокна наиболее многочисленны в области шейки зуба. Они вплетаются в цемент, но, по-видимому, не прикрепляются к кости. Предполагается, что окситалановые волокна, обратимо деформируясь, участвуют в регуляции кровотоков в соответствии с функцией зуба.

*Основное (аморфное) вещество периодонта.* Наряду с волокнами, периодонт содержит необычно большое количество основного вещества, которое занимает до 65 % объема межклеточного вещества. Основное вещество периодонта сходно с таковым в большинстве других соединительных тканей и содержит гликозаминогликаны (среди которых преобладает дерматан сульфат) и гликопротеины. Оно представляет собой очень вязкий гель и на 70 % образован водой, благодаря чему оно способно играть существенную роль в амортизации нагрузок, воздействующих на зуб.

## 1.6. ФИЗИОЛОГИЯ ПЕРИОДОНТА

Рассмотрим основные функции периодонта, имеющие особую значимость для клиники ортопедической стоматологии: опорно-удерживающую, распределяющую давление, регулятора жевательного давления, пластическую и трофическую.

Периодонт фиксирует зубы в челюсти. На зубы действует сила, как при жевании, так и без жевательной нагрузки, при других функциональных состояниях. Эти силы стараются сместить зубы со своего места.

Периодонт переносит действующие на зубы силы на челюстные кости. Силы, возникающие при сокращении жевательных мышц, называются жевательными силами.

Перенос жевательных сил производится в первую очередь через волокна, которые расположены в разных направлениях таким образом, что плотно фиксируют зуб в зубной ячейке. Они в основном тянутся в косом направлении под углом  $45^\circ$  в сторону верхушки корня — зуб как бы висит в альвеоле. В области шейки зуба эти волокна принимают почти горизонтальное направление и, сплетаясь с пучками волокон, идущих от вершины альвеолярной перегородки и десны, образуют круговую связку, охватывающую шейку зуба в виде кольца.

В верхушечной части корня, как и в пришеечном отделе периодонта, некоторое количество волокон идет в радиальном направлении, что препятствует боковым движениям зуба и ограничивает их. Вертикальное расположение волокон на дне альвеолы в верхушечном отделе периодонта препятствует выдвиганию зубов из лунки.

Слегка волнистый ход пучков коллагеновых волокон периодонта делает возможным незначительное смещение зубов: при нагрузке, действующей на зубы, волокна не растягиваются, а выпрямляются, напрягаются. Под влиянием возникающей внезапно большей силы, волокна могут разорваться, а часть цемента отколоться от дентина. Направление силы, действующей на зуб, может быть параллельно продольной оси зуба; эта сила вдавливает зуб в альвеолу. В большинстве случаев, однако, действующая сила образует большой или меньший угол с продольной осью зуба и оказывает на зуб опрокидывающее действие.

Давление, падающее на какой-либо зуб, распространяется не только по его корням на альвеолярный отросток, но и по межзубным контактам на соседние зубы.

Распределению жевательной силы способствует и то, что моляры наклонены в медиальном направлении, а потому силы, действующие при жевании по их продольной оси, отчасти переносятся на премоляры и резцы.

Таким образом, эти зубы воспринимают часть нагрузки моляров. С потерей каждого отдельного зуба соседний с ним зуб теряет опору, наклоняется в сторону образовавшейся щели. Поэтому удаление зубов весьма нежелательно с точки зрения их фиксации.

Правильное соприкосновение зубов их боковыми (апроксимальными) поверхностями также является существенным фактором в распределении жевательной силы. Если соприкосновение контактными точками нарушено (смещено в сторону шейки зуба или в боковом направлении), действие жевательной силы может вызвать смещение зубов так, как это показано на рис 1.7.

Жевательные движения, создавая повышенное давление в периодонте, вызывают опорожнение кровеносных сосудов. Уменьшение объема крови, находящейся в сосудах периодонта, уменьшает ширину периодонтальной щели и способствует погружению зуба в лунку. Когда на периодонт не

действует давление, сосуды наполняются кровью, и периодонтальная щель восстанавливается до прежних размеров, выдвигая зуб и возвращая его в исходное положение. Таким образом, изменение ширины периодонтальной щели обеспечивает физиологическую подвижность зуба, а изменение объема сосудистого русла создает частичную амортизацию жевательного давления, которое испытывает зуб во время смыкания зубных рядов и разжевывания пищи. Этому способствует также менее плотное расположение волокон периодонта и значительное количество рыхлой соединительной ткани в области верхушки корня зуба [67].

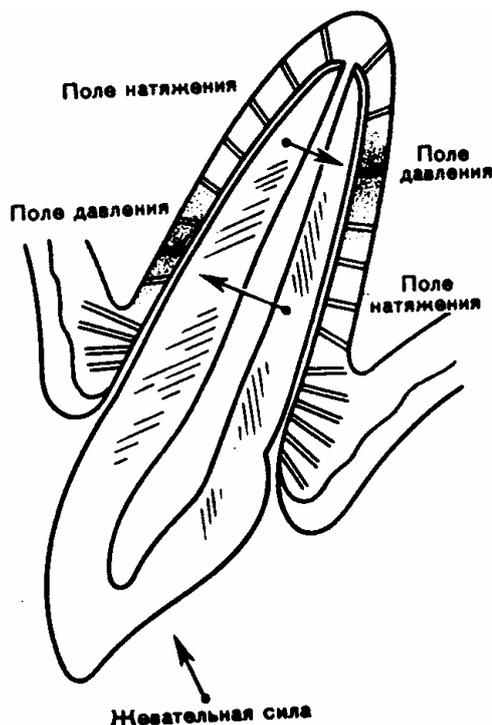


Рис. 1.7. Поля давления и натяжения, возникающие в периодонте под действием жевательной силы

Сила жевательного давления на зуб регулируется механорецепторами — терминальными веточками кустиковых нервных окончаний, расположенных в периодонте. Рецепторы подают сигнал, в частности, на жевательную мускулатуру. Этим регулируется сила жевательного давления на зубы.

*Пластическая функция пародонта* осуществляется имеющимися в нем клеточными элементами. Так, цементобласты принимают участие в построении вторичного цемента, остеобласты — в образовании кости. Таким образом, утраченные в результате физиологических или патологических процессов ткани восстанавливаются.

Значительно развитая сеть сосудов (капилляры периодонта имеют извилистый ход наподобие клубочков) и нервов пародонта обуславливает его *трофическую функцию* — питание цемента зуба и стенок альвеолы.

Кроме перечисленных функций, пародонт участвует в росте, прорезывании и смене зубов, а также выполняет *барьерную* и *сенсорную* функции.

Продолжительность нагрузки на зубы, создаваемой жеванием и глотанием, составляет в среднем около получаса в день (не более 2 ч). Во время сна нижняя челюсть обычно опускается, так что зубы не соприкасаются, нагрузки на зубное ложе нет. Величина жевательной силы обычно меняется между 50 и 100 кг, иногда она может быть значительно больше [67]. Действие силы зависит от величины покрытого деснами и фиксированного в зубной ячейке корня как клинического понятия. Чем длиннее «клинический корень», тем прочнее опора зуба и его может сместить только значительная сила. С другой стороны, чем больше «клиническая коронка» по сравнению с «клиническим корнем», тем меньшая сила может сместить зуб из зубной ячейки. Силы, действующие при функциональной нагрузке, перестраивают кость.

Костная ткань альвеолярных отростков челюстей состоит из компактного и губчатого вещества. Костномозговые полости различных размеров заполнены жировым костным мозгом. Основу костной ткани составляет белок — коллаген. Особенностью костного матрикса является высокое содержание лимонной кислоты, необходимой для минерализации, а также ферментов щелочной и кислой фосфатаз, участвующих в образовании костной ткани.

В альвеолярном отростке происходит постепенное образование и разрушение кости. Этот процесс зависит от действующих на зуб сил и от общего состояния организма. При нормальных условиях существует физиологическое равновесие между образованием и разрушением кости, т. е. утраченная кость замещается новой. Повышение давления в физиологических пределах способствует образованию кости. Вокруг хорошо функционирующего зуба возникают обызвествление, толстые костные трабекулы. В кости ход костных трабекул соответствует направлению сил, действующих на кость, при этом кость фиксирует зуб наиболее сильно. Уменьшение давления (например, при уменьшении жевания) приводит к изменению костных трабекул к уменьшению их числа и их атрофии. Морфофункциональные расстройства челюстной кости могут иметь различную выраженность. При утрате зубов, не имеющих антагонистов и не выполняющих жевательных функций, уменьшается только количество костных трабекул вокруг зуба, но сама зубная ячейка не атрофируется.

Атрофия наблюдается после потери одного или нескольких зубов, при патологических состояниях (пародонтоз, периодонтит и др.), а также у людей в возрасте старше 60 лет. Атрофия после удаления зубов возникает сразу и сначала проявляется в уменьшении высоты лунки зуба на  $\frac{1}{3}$ . В дальнейшем атрофия протекает более медленно, но не прекращается, а лишь несколько замедляется.

В формировании внутренней структуры кости определенную роль играют не только механические факторы, но и другие воздействия со стороны организма. Образование новой кости зависит не только от напряжения и величины сил, действующих на кость, но и от общего состояния организма, от перенесенных общих и местных заболеваний, от интенсивности обмена веществ и др.

Устойчивость пародонта к нагрузке в онтогенезе увеличивается последовательно соответственно росту и развитию всех элементов, составляющих зубочелюстную систему. Однако максимально вертикальная выносливость пародонта, определяемая гнатодинамометром, не характеризует всех сил, возникающих при жевании и слагающихся из последовательных ритмических раздавливающих, размалывающих движений нижней челюсти. В физиологических условиях пародонт обладает значительным запасом резервных сил, без которых процесс жевания был бы невозможен.

Нагрузка на пародонт, возникающая при жевании, зависит от характера пищи, мышечной силы и вида смыкания (зубных рядов).

### **1.7. БИОХИМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ПЕРИОДОНТЕ**

Выявляющиеся в десне кислая и щелочная фосфатазы также выполняют определенную физиологическую роль. Так, щелочная фосфатаза соединительной ткани десны, пародонта и кости альвеолярного отростка, поверхности цемента связана с метаболизмом коллагена, с остеогенезом и регенерацией эпителия. Кислая фосфатаза накапливается главным образом в эпителиальной ткани и играет определенную роль в ее ороговении. Кроме того, Н. Schrader и другие обнаружили, что эпителий десны поглощает в три раза больше кислорода, чем остальная часть слизистой оболочки.

### **1.8. ПЕРЕСТРОЙКА ТКАНЕЙ ПЕРИОДОНТА И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ КЛИНИКИ ОРТОПЕДИЧЕСКОЙ СТОМАТОЛОГИИ**

В пародонте постоянно происходят процессы обновления, включающие замещение фибробластов и других клеток, а также межклеточного вещества. Обновление клеточного состава замедляется с возрастом. Скорость обновления коллагена в пародонте в два раза выше, чем в десне, и в четыре — чем в коже. Коллаген синтезируется фибробластами, остеобластами и цементобластами, а его разрушение осуществляют фибробласты, макрофаги, остеокласты и одонтокласты. Образование коллагена в пародонте происходит более активно у поверхности кости, чем вблизи цемента.

Повреждения пародонта могут сопровождаться резорбцией цемента, разрывами коллагеновых пучков, кровоизлияниями и некрозом. Прилежа-

щая костная ткань подвергается резорбции, расширяется периодонтальное пространство, и зуб становится более подвижным. В дальнейшем поврежденные участки замещаются вследствие активных репаративных процессов в периодонте. При травмировании последнего возможно развитие реакции с активацией остеобластов, что приведет к образованию костной ткани, которая свяжет корень зуба с дном зубной альвеолы. Такое состояние носит название анкилоза, что означает неподвижность сустава.

Проникновение инфекции в периодонт может вызвать в нем хронический воспалительный процесс — периодонтит, следствием которого является прогрессирующее разрушение периодонта, которое не будет компенсироваться репаративными процессами. При периодонтите, однако, воспалительный процесс затрагивает не только собственно периодонт, но и в той или иной мере и цемент, альвеолярный отросток и десну, т. е. весь поддерживающий аппарат зуба (пародонт). В результате периодонтита происходит разрушение волокон периодонта, резорбция альвеолярного отростка, повреждение цемента, что завершается расшатыванием и выпадением зубов.

При лечении периодонтита вслед за устранением инфекционного процесса проводят различные мероприятия, направленные на восстановление целостности поддерживающего аппарата зуба. Такие воздействия включают введение веществ, стимулирующих образование костной ткани альвеолы и регенерацию периодонта.

Периодонт играет важную роль в обеспечении ортодонтического смещения зубов. При ортодонтическом лечении смещение зуба осуществляется благодаря резорбции и новообразованию костной ткани, которые стимулируют адекватно регулируемыми силами давления и натяжения. Эти силы передаются посредством периодонта, причем начальное его сжатие связки на стороне давления компенсируется резорбцией кости, а на стороне натяжения происходит отложение новых слоев костной ткани. Вместе с тем, при ортодонтическом лечении периодонтит подвергается усиленной перестройке, которая регулируется характером локального воздействия сил. Соответственно, в отдельных участках периодонта происходит ускорение синтеза и (или) резорбции коллагеновых волокон и других его компонентов. При чрезмерных ортодонтических нагрузках в периодонте могут развиваться патологические изменения, что обычно сопровождается замедлением или остановкой смещения зуба.

### **1.9. ПЕРЕСТРОЙКА АЛЬВЕОЛЯРНОГО ОТРОСТКА И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ**

Костная ткань альвеолярного отростка, как и любая другая костная ткань, обладает высокой пластичностью и находится в состоянии постоянной перестройки. Последняя включает сбалансированные процессы ре-

зорбции кости остеокластами и ее новообразования остеобластами. Процессы непрерывной перестройки обеспечивают адаптацию костной ткани к меняющимся функциональным нагрузкам и они происходят как в стенках зубной альвеолы, так и в поддерживающей кости альвеолярных отростков. Они особенно отчетливо проявляются при физиологическом и ортодонтическом перемещении зубов.

При ортодонтическом смещении зубов, благодаря использованию специальных устройств, удастся обеспечить воздействие на стенку альвеолы (опосредованные, очевидно, периодонтом), которые приводят к резорбции костной ткани в области давления и ее новообразованию в области натяжения (рис. 1.8).

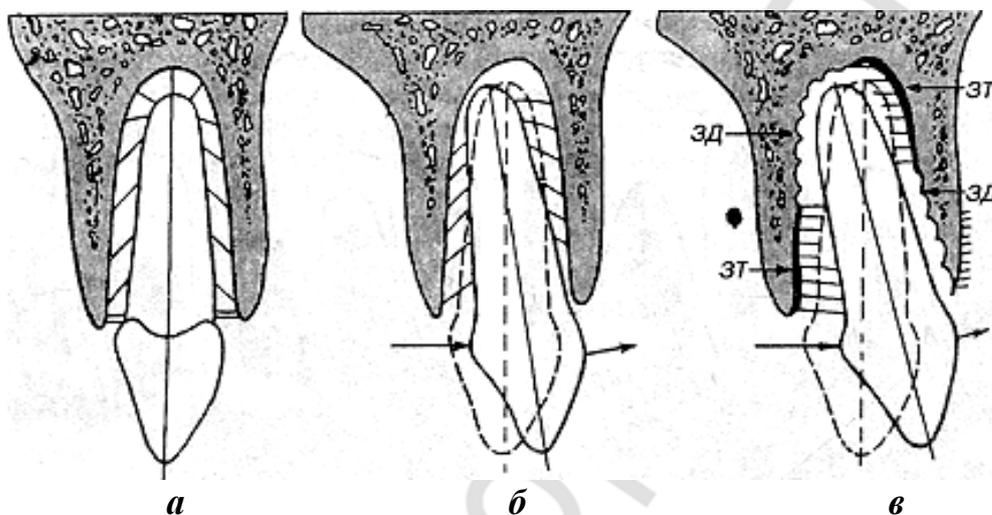


Рис. 1.8. Перестройка альвеолярного отростка

при ортодонтическом горизонтальном перемещении зубов:

*а* — нормальное положение зуба в альвеоле; *б* — наклонное положение зуба после воздействия силы; *в* — наклонно-вращательное перемещение зуба. Стрелки — направление действия силы и перемещения зуба. В зонах давления происходит рассасывание костной альвеолы, в зонах тяги — отложение кости. ЗД — зоны давления; ЗТ — зоны тяги (по Д. А. Калвелису, 1961; из Л. И. Фалина, 1963, с изменениями)

Чрезмерно большие силы, длительно воздействующие на зуб при его ортодонтическом перемещении, могут вызвать ряд неблагоприятных явлений: сдавление периодонта с повреждением его волокон, нарушениям васкуляризации и повреждением сосудов, кровоснабжающих пульпу зуба, очаговой резорбцией корня.

Губчатая кость, окружающая собственно альвеолярную кость, также подвергается постоянной перестройке в соответствии с действующей на нее нагрузкой. Так, вокруг альвеолы нефункционирующего зуба (после утраты его антагониста) они подвергаются атрофии — костные трабекулы становятся тонкими, а их число снижается.

Костная ткань альвеолярного отростка обладает высокими потенциями к генерации не только в физиологических условиях и при ортодонтических воздействиях, но и после повреждения.

### 1.10. БИОМЕХАНИКА ПЕРИОДОНТА

Жевательное давление, испытываемое зубами, передается через периодонт на альвеолярную кость. При этом ткани пародонта оказываются не в одинаковых условиях. Определенная часть жевательного давления передается через волокна периодонта в виде растяжения их и прилегающей к ним стенки альвеолярного отростка. Другая часть жевательного давления с погружением зуба сдавливает волокна периодонта и кровеносные сосуды и передается на альвеолярную кость в виде гидростатического давления. Силу, действующую на однокорневой зуб, можно разложить на две составляющие — вертикальную, проходящую вдоль оси зуба, и горизонтальную, действующую перпендикулярно к ней. Величины же этих составляющих определяется величиной угла, образуемого направлением данной силы и продольной осью зуба. Угол обозначен на рис. 1.9 [10].

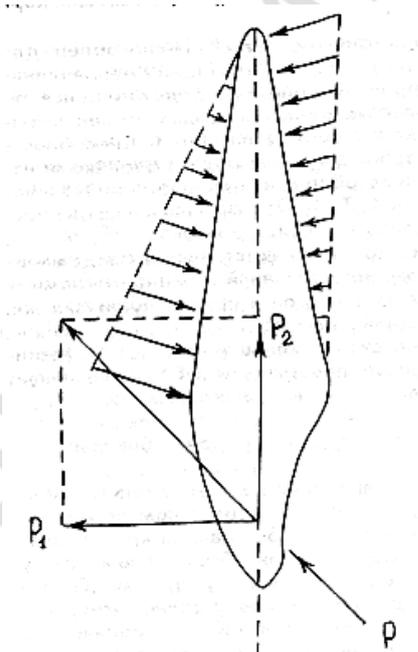


Рис. 1.9. Схема распределения нагрузки падающей на однокорневой зуб по А. Mullter:  
 $P$  — сила, приложенная к небной поверхности зуба;  $P_1$ ,  $P_2$  — компоненты силы  $P$

Наиболее сложные условия наблюдаются на молярах. Величины составляющих зависят от наклона скатов бугров многокорневого зуба, положения нижней челюсти и локализации окклюзионного контакта в различные фазы артикуляции. Богато развитая сосудистая сеть периодонта благодаря своим амортизирующим свойствам защищает окружающие ткани от травматических повреждений и обеспечивает возвращение зубов

в исходное положение. При этом следует иметь в виду, что альвеолярная кость и корневой цемент обладают большой упругостью. Так, модуль упругости костной ткани составляет  $2000 \text{ кг/мм}^2$ , то есть для того чтобы растянуть вдвое кусочек костной ткани размеров  $1 \text{ мм}^2$  потребовалось бы усилие в  $2000 \text{ кг}$ . Упругость, или способность частиц ткани возвращаться в исходное положение после прекращения действия какой-либо силы, соответствует величине модуля упругости. Для костной ткани он оценивается очень высоко.

Пародонт зубов находится под жевательным давлением в среднем около 1,5 часа в сутки. Однако величина, продолжительность и направление жевательного давления постоянно меняются и зависят от многих факторов: характера принимаемой пищи, состояния пародонта, тренированности жевательных мышц, состояния твердых тканей зубов, их положение в зубной дуге, состояния зубных рядов, прикуса.

Перемещение зубов в альвеоле при жевании происходит в разных направлениях вследствие эластичности волокон периодонта и наличия сосудистых клубочков в области вершины корня (Калвелис, 1967).

Считается, что пародонт лучше всего приспособлен для восприятия вертикальной нагрузки, совпадающей с направлением длинной оси зуба и равномерно распределяющейся по стенкам лунки. Боковые же нагрузки оказывают более выраженное отрицательное воздействие на пародонт. Способность противостоять жевательному давлению зависит не только от направления нагрузки, но и от тренированности пародонта, запаса резервных сил, длины и толщины корня, величины и сохранности коронок зубов, наличия межзубных контактов.

Кроме того, окклюзионные поверхности зубов представлены различной высотой бугорков, разделенными фиссурами, и имеют поэтому самый разнообразный профиль. Нагрузка же, падающая на наклонные поверхности бугорков, то есть скаты, трансформируется в силы, действующие под углом к вертикальной оси зуба таким образом, как это показано на рис 1.10.

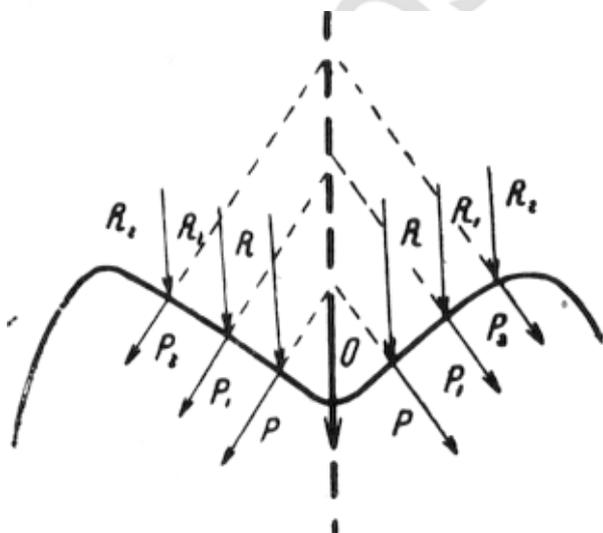


Рис. 1.10. Распределение вертикальной нагрузки на скатах бугорков жевательных зубов, обращенных к фиссуре:

$R, R_1, R_2$  — вертикальная сила;  $P, P_1, P_2$  — компоненты вертикальных сил;  $O$  — общая сила

Однако подобная ситуация возникает лишь при так называемом беспищевом жевании (парафункции), вызывающем функциональную перегрузку удерживающего аппарата зубов. При жевании бугры зубов преодолевают сопротивление пищи и испытывают более или менее равномерные жевательные нагрузки практически по всем поверхностям скатов бугорков параллельно длинной оси зуба (рис. 1.11).

Подобная ситуация возникает и при воздействии жевательных нагрузок в области фиссур и ограничивающих их скатов бугорков.

Таким образом, анатомическое строение жевательных поверхностей зубов способствует наиболее благоприятному трансформированию усилий вдоль длинной оси зуба. В конце жевания, когда консистенция пищи не препятствует соприкосновению зубов, скаты бугров как бы компенсируют развитие опасных для пародонта горизонтальных нагрузок, приближая их направление к длинной оси зубов (рис. 1.12).

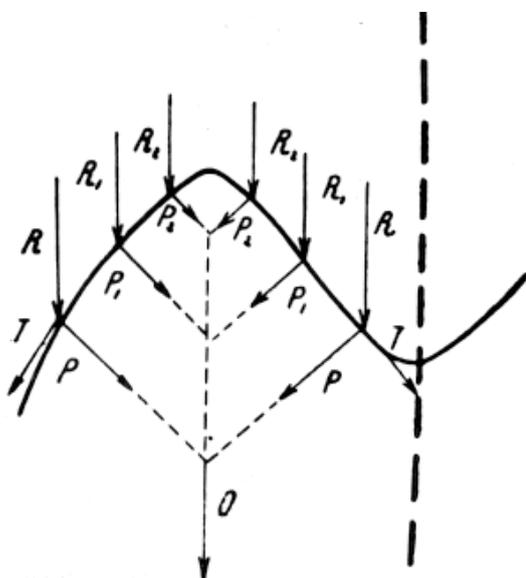


Рис. 1.11. Распределение вертикальной нагрузки на скатах бугорка жевательного зуба:

R — вертикальные силы;  
P, T — компоненты сил R;  
O — общая сила

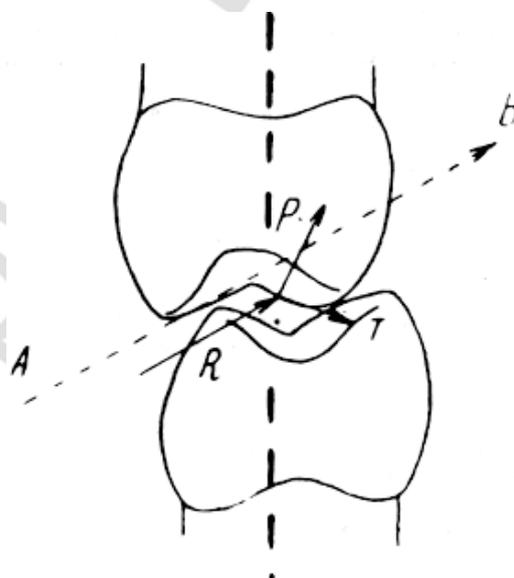


Рис. 1.12. Частичная нейтрализация горизонтальных нагрузок в направлении, близком к длинной оси зуба:

R — сила, приложения к зубу;  
AB — направление силы R;  
P, T — компоненты силы R

Протезирование искусственными коронками предполагает травму твердых тканей зуба, а применение мостовидных протезов (и особенно нерациональный выбор конструкции) сопровождается функциональной перегрузкой периодонта опорных зубов. То же самое происходит при ортодонтическом лечении (неправильный выбор силы ортодонтического аппарата) приводит к разрушению тканей периодонта. Поэтому изучение морфологии периодонта является необходимым условием оказания квалифицированной стоматологической ортопедической помощи.

- 1) правильное планирование и конструирование зубных протезов (несъемных и съемных) с учетом состояния тканей периодонта;
- 2) прогнозирование лечения и его результатов;
- 3) проведение адекватного ортопедического (ортодонтического) лечения, учитывающего состояние тканей периодонта и всего поддерживающего аппарата зуба;

### 1.11. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для удобства изучения явлений в научной практике часто прибегают к составлению моделей, которые реально повторяют все их свойства.

Математические модели находят все более широкое и разнообразное применение в различных областях стоматологии.

В работе Р. Еуkhoff (1985) [112] отмечаются следующие приложения биомедицинских математических моделей, в которых существенную роль играет оценка числовых параметров:

- 1) клиническая диагностика;
- 2) клинические терапевтические приложения;
- 3) медицинская реабилитация;
- 4) биомедицинские научные исследования;
- 5) планирование экспериментов;
- 6) обучение врачей и медсестер на модели, имитирующей пациента.

В отечественной ортопедической стоматологии известны работы многих ученых посвященные вопросам математики и ортопедической стоматологии. Авторы учитывают математические, технические, биологические, медицинские аспекты изучаемых проблем. Это работы Г. П. Соснина (моделирование взаимоотношения бюгельных протезов с опорными тканями [91–93]), В. П. Панчохи (моделирование протезирование концевых дефектов зубных рядов дугowymi протезами [81]), Ю. М. Климашина (использование метода математического моделирования для оценки состояния пародонта [50]) К.И. Яковлева (расчет длины пружин кламмеров [105]), С. Д. Арутюнова (напряженно-деформированное состояние металлокерамических зубных протезов [6–7]), А. Д. Шварца (протезирование с учетом сил, действующих на зубы, протезы и опорные ткани в процессе функции [102, 103]), Р. Г. Гашилова (модель дистального перемещения верхних боковых зубов [19]), Л. П. Бариновой (действие расширяющихся дуг в ортодонтическом аппарате [9]), С. Д. Федорова (анализ методики Nowac [99]), Г. Г. Таптуновой (математическое моделирование напряжений в периодонте при протезировании консольными протезами [96]), В. Н. Олесовой (изучение процессов напряженно-деформированного состояния в системе кость–имплант–кость) [78], Г. Т. Сухарева (возможно-

сти «корпусного» перемещения зубов при ортодонтическом лечении аномалий прикуса [94]) и др.

Очень много зарубежных публикаций, особенно в последнее время, посвящено использованию математического моделирования применительно к ортопедической стоматологии. В частности, K. Tanne, J. Miasaka, Y. Yamagata [131], используя трехмерную конечную модель человеческого кранио-фациального скелета, описывают распределение напряжений (1988). Подобные исследования для изучения распределения напряжений в твердых тканях зуба провел С. Kaewsuriyathumrong в 1993 г [117]. A. D. Levy-Mandel, A. N. Venetsanopoulos [119] на основании цефалограмм построили модель для изучения его роста и диагностики (1986). P. L. Jones, T. J. Spahl (1986) [116], T. Matsuura, A. Kurita, K. Terada (1986) [133], D. Maniere, S. Barek (1986) [121], T. J. Spahl (1986) [129], P. L. Jones, Amadori (1986) [116], Reinhardt (1989) [124], H. J. Schenk (1989) [126], S. P. Galletti, P. Nannelli (1989) [114], Lozanoffes (1989) [120], K. Yamamoto (1989) [134], S. N. Bhatia (1987) [109], J. H. Sims-Williams (1987) [128] описывают возможности использования компьютера в ортодонтии и ортопедической стоматологии.

Биомеханические аспекты перемещения зубов в ортодонтии описывает Fortschr-Kieferorthop (1986) [113], B. Melsen, V. Fotis, C. J. Burstone (1986) [122].

Компьютерный метод структурного анализа в ортопедической стоматологии описан Nippon-Kyosei-Shika в 1989 г. [123].

Трехмерный морфометрический метод использован S. Steigman, Y. Michaeli в 1991 г. [130] для оценки изменений в зубных и периодонтальных тканях после ортодонтической нагрузки.

Трехмерный конечный анализ элемента для изучения распределения напряжения в периодонтальной ткани под действием ортодонтических сил используют K. Tanne, C. J. Burstone (1987) [132].

Автоматизированное проектирование зубных протезов, используя трехмерные данные измерения формы зубов, описывают H. Kimura, T. Watanabe, T. Sohmura (1990) [118].

В заключение следует подчеркнуть, что положительные результаты протезирования и ортопедического лечения могут быть достигнуты только при сочетании теории и практики, то есть данные биологии, анатомии, физиологии, математики, биомеханики должны быть использованы в лечебной практике.

## Глава 2

### Решение задачи о равновесии периодонта как оболочки, ограниченной двумя составными эллиптическими гиперboloидами

В стоматологической практике при конструировании различных протезов необходимо знать напряжения, которые испытывает периодонт, то есть тонкая упругая оболочка, находящаяся между корнем зуба и костной тканью челюсти. В этой оболочке расположены нервные окончания, которые при действии на зуб внешних сил вызывают болевые ощущения. Кроме того, периодонт определяет жесткость зуба как абсолютно твердого тела при перемещении его в трех направлениях и трех поворотах вокруг указанных направлений. Зная жесткость зубов, можно рационально распределить нагрузку при конструировании различных протезов и приспособлений для выполнения жевательного акта.

Впервые расчетная модель периодонта, ограниченного двумя круговыми конусами, была построена Г. П. Сосниным на основе методов сопротивления материалов [93]. Однако этот метод не позволил перейти к расчету других, более совершенных моделей. В 1974 г. стоматологи Г. П. Соснин и Л. С. Величко предложили механику-математику А. Е. Крушевскому решить задачу для формы в виде эллиптического конуса. Поставленная задача была решена при достаточно общих предположениях относительно формы поверхностей периодонта и получены формулы для периодонта в виде эллиптического конуса [15]. При этом был предложен новый аналитический метод, при котором заранее выполняется условие неподвижности наружной поверхности периодонта и условие жесткой связи внутренней поверхности с корнем зуба, рассматриваемого как абсолютно твердое тело. Модель эллиптического конуса позволила дать более правильную картину распределения напряжений, показала снижение нормальных напряжений за счет возникновения касательных напряжений вдоль образующей и направляющей конуса, объяснив целый ряд фактов, как, например меньшую сопротивляемость зуба в боковом направлении по сравнению с фронтальным и др. Однако в области вершины зуба модель эллиптического конуса не позволила определить действительный характер распределения напряжений, т. к. реальные зубы на конце корня имеют не острие, а закругление. Поэтому переход к модели эллиптического гиперboloида представляется естественным шагом вперед в данном вопросе, тем более, что эллиптический конус следует из него как частный случай. Расчет периодонта на основе модели эллиптического гиперboloида был выполнен А. Е. Крушевским в статье [54], в которой, кроме того, дано обобщение на случай действия произвольной силы в пространстве, а не в плоскостях симметрии как в работе [15].

Более внимательное изучение формы поперечного сечения корня зуба показывает, что, хотя его форма и овальная, однако, с одной осью симметрии, т. е. форма эллипса с двумя осями симметрии не совсем отвечает действительности. Следовательно, если модель формы поперечного сечения корня зуба составить из двух различных полуэллипсов с одной общей малой осью  $2b$  вдоль оси ординат, так как это показано на рис. 2.1, то такая модель окажется ближе к действительности.

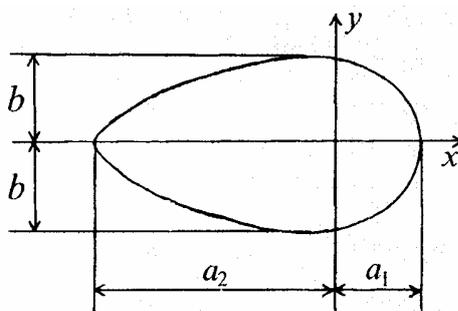


Рис. 2.1. Поперечное сечение корня зуба в виде двух полуэллипсов с общей малой осью  $2b$  вдоль оси ординат

В такой постановке С. А. Наумовичем и А. Е. Крушевским разработана новая математическая модель периодонта и опубликована в ряде статей [58–63].

Ввиду того, что стыковка двух полуэллипсов производится в вершинах, то сохраняется не только непрерывность поверхности, но и касательной (нормали) к ней. Таким образом, имеем форму периодонта, ограниченного двумя составными эллиптическими двуполостными гиперboloидами. Трехмерное изображение зуба и периодонта представлено на рис. 2.2.

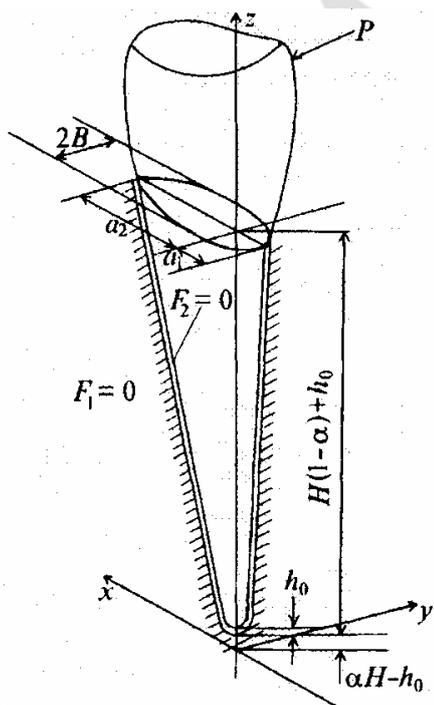


Рис. 2.2. Модель периодонта корня зуба, ограниченного двумя составными эллиптическими гиперboloидами

Со стороны костной ткани поверхность периодонта толщиной  $h_0$  описывается следующей функцией:

$$F_1(x, y, z) = z + h_0 - H \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a_1,$$

$$F_1(x, y, z) = z + h_0 - H \sqrt{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad -a_2 \leq x \leq 0.$$

Со стороны корня зуба поверхность периодонта характеризует функция  $F_2(x, y, z)$ :

$$F_2(x, y, z) = z - H \sqrt{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq a_1,$$

$$F_2(x, y, z) = z - H \sqrt{\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0, \quad \text{при } -a_2 \leq x \leq 0.$$

При  $a_1 = a_2$  получим эллиптический гиперboloид с двумя плоскостями симметрии. При  $d = 0$  имеем эллиптические конусы, если  $a_1 = a_2 = b$ , получим гиперboloиды вращения, а при  $a_1 = a_2 = b$  и  $d = 0$  имеем круговые конусы. Таким образом, из предложенной новой модели вытекают все другие модели, ранее предложенные [15, 54, 91].

Используя уравнения наружной и внутренней поверхности периодонта, запишем следующие ряды для искомых упругих перемещений:

$$u = F_1(x, y, z)F_2(x, y, z) \sum_{m,n,p=0}^{\infty} A_{mnp} x^m y^n z^p + u',$$

$$v = F_1(x, y, z)F_2(x, y, z) \sum_{m,n,p=0}^{\infty} B_{mnp} x^m y^n z^p + v',$$

$$w = F_1(x, y, z)F_2(x, y, z) \sum_{m,n,p=0}^{\infty} C_{mnp} x^m y^n z^p + w',$$

где  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  — упругие перемещения на внутренней поверхности периодонта  $F_2(x, y, z) = 0$ , соответствующие перемещению зуба как абсолютно твердого тела.

Вследствие незначительной толщины периодонта, вклад слагаемых, содержащих произведение  $F_1(x, y, z)F_2(x, y, z)$ , незначителен и мы ограничимся нахождением лишь неоднородных слагаемых  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$ .

Как известно, точки приложения сил, под действием которых зуб получает лишь поступательные перемещения вдоль данных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  называются центрами сопротивления. Благодаря введению центров сопротивления, величины поступательных перемещений определяются независимо от углов поворота вокруг осей координат. В случае несимметричной

формы корня зуба существуют три различных центра сопротивления, т. е. точки приложения двух горизонтальных и одной вертикальной силы, под действием которых зуб получает поступательные перемещения вдоль осей координат. Для корня зуба, ограниченного двумя составными эллиптическими гиперboloидами, центр сопротивления при действии силы вдоль оси  $Ox$  лежит на оси  $Oz$ , его аппликату обозначим  $z_a$ , центр сопротивления при действии силы вдоль оси  $Oy$  лежит где-то в плоскости  $xOz$ , его координаты обозначим  $x_b$  и  $z_b$ , и, наконец, центр сопротивления при действии силы вдоль оси  $Oz$  лежит в плоскости  $xOz$  и имеет абсциссу  $x_c$ . Координаты в направлении сил не указываем, так как силы в абсолютно твердом теле можно переносить вдоль линии действия. Итак, имеем три центра сопротивления в точках  $A(0, 0, z_a)$ ,  $B(x_b, 0, z_b)$  и  $C(x_c, 0, 0)$ . В связи с указанными центрами сопротивления будем искать упругие перемещения  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  в виде следующих выражений:

$$u' = \frac{F_1(x, y, z)(u_0 + (z - z_a)\varphi_y - y\varphi_z)}{F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)},$$

$$v' = \frac{F_1(x, y, z)(v_0 + (x - x_b)\varphi_z - (z - z_b)\varphi_x)}{F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)},$$

$$w' = \frac{F_1(x, y, z)(w_0 - (x - x_c)\varphi_y + y\varphi_x)}{F_1(x, y, z) - F_2(x, y, z)}.$$

При этом на поверхности  $F_1(x, y, z) = 0$  имеем  $u' = v' = w' = 0$ , а на поверхности  $F_2(x, y, z) = 0$  периодонт получает перемещение абсолютно твердого тела. Для определения шести параметров перемещений зуба записываем условия равенства нулю главного вектора и главного момента всех сил, действующих на зуб, в том числе и напряжений, возникающих на поверхности  $F_1(x, y, z) = 0$  [23, 40]:

$$\int_{F_2} (\vec{n} \cdot T ds) - \vec{P} = 0, \quad \int_{F_2} (\vec{r} \times (\vec{n} \cdot T) ds) - \vec{M} = 0,$$

где  $\vec{n} = in_x + jn_y + kn_z$  — вектор внешней нормали к поверхности  $F_2(x, y, z) = 0$ ,  $T$  — тензор напряжений. В проекциях на оси координат эти условия записываются в виде:

$$\int_{F_2} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) ds - P_x = 0,$$

$$\int_{F_2} (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) ds - P_y = 0,$$

$$\int_{F_2} (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) ds - P_z = 0,$$

$$\int_{F_2} \left( y(\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_z n_z) - (z - z_b)(\tau_{xy}n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz}n_z) \right) ds - M_x = 0,$$

$$\int_{F_2} \left( (z - z_a)(\sigma_x n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z) - (x - x_c)(\tau_{xz}n_x + \tau_{yz}n_y + \sigma_z n_z) \right) ds - M_y = 0,$$

$$\int_{F_2} \left( (x - x_b)(\tau_{xy}n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz}n_z) - y(\sigma_x n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z) \right) ds - M_z = 0,$$

Введем следующие обозначения:

$$R_k = \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2},$$

$$u'' = u_0 + (z - z_a)\varphi_y - y\varphi_z, \quad v'' = v_0 + (x - x_b)\varphi_z - (z - z_b)\varphi_x,$$

$$w'' = w_0 - (x - x_c)\varphi_y + y\varphi_x.$$

Тогда для периодонта, ограниченного двумя составными гиперboloидами, указанными ранее, выражения для компонент вектора перемещений и тензора напряжений примут вид:

$$u' = \frac{u''}{h_0}(z + h_0 - HR_k), \quad v' = \frac{v''}{h_0}(z + h_0 - HR_k), \quad w' = \frac{w''}{h_0}(z + h_0 - HR_k),$$

$$\sigma_x = -\frac{GH}{h_0 R_k} \left( \frac{\gamma x u''}{a_k^2} + \frac{\gamma_2 y v''}{b^2} \right) + \frac{\gamma_2 G w''}{h_0},$$

$$\sigma_y = -\frac{GH}{h_0 R_k} \left( \frac{\gamma y v''}{b^2} + \frac{\gamma_2 x u''}{a_k^2} \right) + \frac{\gamma_2 G w''}{h_0},$$

$$\sigma_z = -\frac{\gamma_2 GH}{h_0 R_k} \left( \frac{x u''}{a_k^2} + \frac{y v''}{b^2} \right) + \frac{\gamma G w''}{h_0}.$$

Здесь  $H$  — параметр, характеризующий высоту зуба,  $h_0$  — толщина периодонта;  $k = 1$ , если  $0 \leq x \leq a_1$ ,  $k = 2$ , если  $-a_2 \leq x \leq 0$ ,  $\gamma = 2(1 - \nu)/(1 - 2\nu)$ ,  $\gamma_2 = \gamma - 2$ . Для эллиптического гиперboloида проекции единичного вектора  $\vec{n}$  на оси координат равны:

$$n_x = \frac{1}{\Delta F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{Hx}{a_k^2 R_k \Delta F_2},$$

$$n_y = \frac{1}{\Delta F_2} \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{Hy}{b^2 R_k \Delta F_2},$$

$$n_z = \frac{1}{\Delta F_2} \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{1}{\Delta F_2},$$

$$\Delta F_2 = \frac{1}{R_k} \sqrt{R_k^2 + \frac{H^2 x^2}{a_k^4} + \frac{H^2 y^2}{b^4}}.$$

С учетом этих выражений вычислим поверхностные интегралы, входящие в уравнения равновесия. Для простоты вычислений перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам по формулам [89]:

$$x = a_k r \cos(\theta), \quad y = br \sin(\theta), \quad z = H \sqrt{r^2 + d^2}, \quad dx dy = a_k b r dr d\theta.$$

Тогда интегралы, входящие в первое уравнение равновесия, вычисляются следующим образом:

$$\int_{F_2} \sigma_x n_x ds = \frac{\pi G H^3 (a_1 + a_2) \varphi_y}{6 b h_0} \left( \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) +$$

$$+ \frac{\pi \gamma G H^2}{2 h_0 a_1 a_2} b (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1 - d^2}{2} \right),$$

$$\int_{F_2} \tau_{xy} n_y ds = \frac{\pi G H^2 (a_1 + a_2)}{2 b h_0} \times$$

$$\times \left( (u_0 - z_a \varphi_y) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1 - d^2}{2} \right) + \frac{H \varphi_y}{3} (1 - 3d^2 + 2d^3) \right),$$

$$\int_{F_2} \tau_{xy} n_z ds = \frac{\pi G (a_1 + a_2) b}{2 h_0} (1 - d^2) (u_0 - z_a \varphi_y + H \varphi_y).$$

Подставив вычисленные интегралы в первое уравнение равновесия, получим

$$P_x = \frac{\pi b G H^2}{2 h_0} (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) \times$$

$$\times \left( \left( \frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{1}{b^2} \right) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1 - d^2}{2} \right) + \frac{1 - d^2}{H^2} \right) +$$

$$+ \frac{\pi b G H^3}{6 h_0} (a_1 + a_2) \varphi_y \left( \left( \frac{\gamma}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2}{H^2} + \frac{1}{b^2} \right) (1 - 3d^2 + 2d^3) + \frac{3(1 - d^2)}{H^2} \right).$$

Отсюда находим выражение для компоненты поступательных перемещений  $u_0$  и координаты  $z_a$  центра сопротивления:

$$u_0 = \frac{2 P_x h_0}{\pi b G (a_1 + a_2) \left( \left( \frac{\gamma H^2}{2 a_1 a_2} + \frac{H^2}{2 b^2} + 1 \right) (1 - d^2) + H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)},$$

$$z_a = \frac{H \left( 3(1-d^2) \frac{b^2}{H^2} + \left( \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right)}{3 \left( (1-d^2) \left( \frac{\gamma b^2}{2a_1 a_2} + \frac{b^2}{H^2} + \frac{1}{2} \right) + \left( 1 + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}.$$

Отметим, что жесткость  $c_x$  в направлении оси  $Ox$ , т. е. в направлении оси симметрии корня зуба, для несимметричного профиля увеличилась при сохранении площади сечения. Как следует из формулы

$$c_x = \frac{P_x}{u_0} = \frac{\pi G (a_1 + a_2) b}{2h_0} \left( \left( \frac{\gamma H^2}{2a_1 a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1-d^2) + \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a_1 a_2} \right) H^2 d^2 \ln(d) \right),$$

увеличение произошло за счет слагаемого  $\gamma H^2 / (a_1 a_2)$ . В самом деле, площадь эллиптического сечения равна  $\pi(a_1 + a_2)b/2$ . Если  $a_1 = a_2 = a$ , то имеем  $1/(a_1 a_2) = 1/a^2$ . При  $a_1 \neq a_2$  и  $a_1 + a_2 = 2a = const$ , имеем  $1/(a_1 a_2) = 1/(a_1(2a - a_1))$ . Тогда

$$\frac{1}{a_1(2a - a_1)} - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 2aa_1 + a_1^2}{a^2 a_1(2a - a_1)} = \frac{(a - a_1)^2}{a^2 a_1(2a - a_1)} > 0.$$

Это означает, что природа с целью увеличения жесткости  $c_x$  сочла необходимым создать сечение корня зуба с одной осью симметрии при одной и той же площади сечения.

Интегралы, входящие во второе уравнение равновесия, равны:

$$\begin{aligned} \int_{F_2} \tau_{xy} n_x ds &= \frac{\pi G H^2 (a_1 + a_2) b}{2h_0 a_1 a_2} \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) \times \\ &\quad \times (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) - \frac{H \varphi_x}{3} (1-3d^2 + 2d^3), \\ \int_{F_2} \sigma_y n_y ds &= \frac{\pi G H^2 (a_1 + a_2)}{2bh_0} (\gamma (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) \times \\ &\quad \times \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) - \frac{H \varphi_x}{3} \left( \gamma + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} \right) (1-3d^2 + 2d^3)) + \\ &\quad + \frac{2\gamma G H^2 (a_1^2 - a_2^2) \varphi_z}{3bh_0} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \arctg \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right), \\ \int_{F_2} \tau_{yz} n_z ds &= \frac{\pi G (a_1 + a_2) b}{2h_0} (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x - H \varphi_x) \times \end{aligned}$$

$$\times(1-d^2) + \frac{2bG(a_1^2 - a_2^2)\varphi_z}{3h_0} \sqrt{(1-d^2)^3}.$$

Подставив интегралы во второе уравнение равновесия, получим

$$P_y = \frac{\pi GH^2(a_1 + a_2)b}{2h_0} \left( \left( \left( \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{\gamma}{b^2} \right) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1-d^2}{2} \right) + \frac{1-d^2}{H^2} \right) \times \right. \\ \left. \times (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) - \frac{\varphi_x (1-d^2)}{H} - \right. \\ \left. - \frac{H \varphi_x}{3} \left( \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{\gamma}{b^2} + \frac{\gamma_2}{H^2} \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) + \frac{2GH^2(a_1^2 - a_2^2)\varphi_z}{3bh_0} \times \\ \times \left( \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \gamma + \frac{b^2}{H^2} \sqrt{(1-d^2)^3} \right).$$

Из последнего равенства находим

$$v_0 = \frac{2P_y h_0}{\pi b G (a_1 + a_2) \left( \left( \frac{H^2}{2a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1 \right) (1-d^2) + H^2 \left( \frac{\gamma}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}, \\ x_b = \frac{4(a_1 - a_2) \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \sqrt{(1-d^2)^3} \right)}{3\pi \left( \left( \frac{H^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1-d^2}{2} \right) + 1-d^2 \right)}, \\ z_b = \frac{H \left( \frac{3b^2(1-d^2)}{H^2} + (1-3d^2 + 2d^3) \left( \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + \gamma \right) \right)}{3 \left( (1-d^2) \left( \frac{b^2}{2a_1 a_2} + \frac{b^2}{H^2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \left( \gamma + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right)}.$$

Как следует из формулы

$$c_y = \frac{P_y}{v_0} = \frac{\pi G (a_1 + a_2) b}{2h_0} \left( \left( \frac{H^2}{2a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1 \right) (1-d^2) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right),$$

жесткость  $c_y$  в направлении оси  $Oy$ , т. е. вдоль несимметричной оси, также возросла, как и жесткость  $c_x$  в направлении оси  $Ox$ .

Вычисление интегралов, входящих в третье уравнение равновесия, определяет вертикальное поступательное перемещение и абсциссу центра сопротивления в вертикальном направлении.

$$\int_{F_2} \tau_{xz} n_x ds = \frac{\pi GH^2 b}{2h_0 a_1 a_2} \left( d^2 \ln d + \frac{1-d^2}{2} \right) (a_1 + a_2) (w_0 + x_c \varphi_y),$$

$$\int_{F_2} \tau_{yz} n_y ds = \frac{\pi GH^2}{2bh_0} (a_1 + a_2) (w_0 + x_c \varphi_y) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1-d^2}{2} \right) -$$

$$-\frac{2GH^2}{3bh_0} (a_1^2 - a_2^2) \varphi_y \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right),$$

$$\int_{F_2} \sigma_z n_z ds = \frac{\pi G \gamma b}{2h_0} (a_1 + a_2) (w_0 + x_c \varphi_y) (1-d^2) - \frac{2G \gamma b}{3h_0} (a_1^2 - a_2^2) \varphi_y \sqrt{(1-d^2)^3},$$

$$P_z = \frac{\pi GH^2 (a_1 + a_2)}{2bh_0} \left( \frac{1-d^2}{2} \left( \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{2\gamma b^2}{H^2} + 1 \right) + \left( 1 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) d^2 \ln(d) \right) \times$$

$$\times (w_0 + x_c \varphi_y) - \frac{2GH^2}{3bh_0} (a_1^2 - a_2^2) \varphi_y \times$$

$$\times \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \frac{\gamma b^2}{H^2} \sqrt{(1-d^2)^3} \right),$$

$$w_0 = \frac{2P_z h_0}{\pi G (a_1 + a_2) b \left( H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1-d^2}{2} \right) + \gamma (1-d^2) \right)},$$

$$x_c = \frac{4(a_1 - a_2) \left( \frac{H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) + \gamma \sqrt{(1-d^2)^3} \right)}{3\pi \left( H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1-d^2}{2} \right) + \gamma (1-d^2) \right)}.$$

Жесткость в направлении оси Oz равна

$$c_z = \frac{P_z}{w_0} = \frac{\pi G (a_1 + a_2) b}{2h_0} \left( H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( d^2 \ln(d) + \frac{1-d^2}{2} \right) + \gamma (1-d^2) \right).$$

Отметим, что если  $a_1 = a_2$ , то  $x_c = x_b = 0$ , и  $z_a$  и  $z_b$  равны выражениям, приведенным в статье [54]. Таким образом, жесткость корня зуба при наличии одной оси симметрии в поперечном сечении во всех трех направлениях

в случае поступательных перемещений возросла по сравнению с формой поперечного сечения, имеющего две оси симметрии.

Перейдем к определению углов поворота корня зуба вокруг трех осей координат. Для этого вычислим интегралы, входящие в четвертое уравнение равновесия:

$$\begin{aligned}
\int_{F_2} y \tau_{xz} n_x ds &= \frac{\pi GH^2 b^3}{32 h_0 a_1 a_2} (a_1 + a_2) \varphi_x \left( (1 - d^2)^2 - d^4 (4 \ln(d) - 1) \right), \\
\int_{F_2} y \tau_{yz} n_y ds &= -\frac{\pi b GH}{6 h_0} (a_1 + a_2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) (1 - 3d^2 + 2d^3) + \\
&+ \frac{\pi GH^2 (a_1 + a_2) b \varphi_x}{8 h_0} \left( \frac{7}{4} (1 - d^2)^2 - 3d^4 \ln(d) - \frac{3}{2} d^2 (1 - d^2) \right) - \\
&- \frac{2GH (a_1^2 - a_2^2) b \varphi_z}{3 h_0} \left( \frac{\sqrt{(1 - d^2)^3}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1 - d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{d} \right) \right), \\
\int_{F_2} y \sigma_z n_z ds &= -\frac{\pi GH \gamma_2 b}{6 h_0} (a_1 + a_2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) (1 - 3d^2 + 2d^3) + \\
&+ \frac{\pi b \varphi_x G}{8 h_0} (a_1 + a_2) (\gamma b^2 + \gamma_2 H^2) (1 - d^2)^2, \\
\int_{F_2} z \tau_{xy} n_x ds &= \frac{\pi GH^3}{6 h_0 a_1 a_2} (a_1 + a_2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) (1 - 3d^2 + 2d^3) - \\
&- \frac{\pi GH^4}{8 h_0 a_1 a_2} (a_1 + a_2) (1 - d^2)^2, \\
\int_{F_2} z \sigma_y n_y ds &= \frac{\pi GH^3}{6 b h_0} \gamma (a_1 + a_2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) (1 - 3d^2 + 2d^3) - \\
&- \frac{\pi \varphi_x GH^2}{8 b h_0} (a_1 + a_2) (\gamma_2 b^2 + \gamma H^2) (1 - d^2)^2 + \\
&+ \frac{2GH^3 \gamma \varphi_z}{3 b h_0} (a_1^2 - a_2^2) \left( \frac{\sqrt{(1 - d^2)^3}}{4} - \frac{3}{8} d^2 \sqrt{1 - d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - d^2}}{d} \right) \right), \\
\int_{F_2} z \tau_{yz} n_z ds &= \frac{\pi GH b}{3 h_0} (a_1 + a_2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) (1 - d^3) - \\
&- \frac{3\pi GH^2 \varphi_x b}{8 h_0} (a_1 + a_2) (1 - d^2)^2 + 4d^2 (1 - d^2) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{GH(a_1^2 - a_2^2)b\varphi_z}{2h_0} \left( \sqrt{(1-d^2)^3} + \frac{d^2}{2}\sqrt{1-d^2} - \frac{d^4}{2} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right).$$

В результате получим следующее уравнение относительно углов поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_z$ :

$$\begin{aligned} \frac{yP_x - (z-z_b)P_y}{a_1+a_2} = & \frac{\pi GH^2 b \varphi_x}{8h_0} \left( (1-d^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a_1a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1-d^2}{2} \left( 5 - \frac{b^2}{a_1a_2} \right) - d^4 \left( 3 + \frac{b^2}{a_1a_2} \right) \ln(d) - \frac{4z_b}{3H} \times \right. \\ & \left. \times \left( 2(1-d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right) + \frac{2GHb\varphi_z}{3h_0} (a_1 - a_2) \times \\ & \times \left( \left( \sqrt{(1-d^2)^3} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3d^2}{8}\sqrt{1-d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \right) \right) + \\ & \left. + \frac{\pi x_b}{4} \left( 2(1-d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right). \end{aligned}$$

Для симметричного профиля с двумя осями симметрии, когда  $a_1 = a_2$ , слагаемое, содержащее  $\varphi_z$ , обращается в нуль, а угол поворота  $\varphi_x$  находится независимо от  $\varphi_z$ . Для профиля с одной осью симметрии углы поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_z$  находятся из совместной системы уравнений.

Рассмотрим оставшиеся два уравнения равновесия. Интегралы, входящие в пятое уравнение, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{F_2} z \sigma_x n_x ds = & \frac{\pi GH^3 b \gamma}{6h_0 a_1 a_2} (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) (1 - 3d^2 + 2d^3) + \\ & + \frac{\pi b \varphi_y GH^2}{8h_0} (a_1 + a_2) \left( \gamma_2 + \frac{\gamma H^2}{a_1 a_2} \right) (1 - d^2)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{F_2} z \tau_{xy} n_y ds = & \frac{\pi GH^3}{6bh_0} (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) (1 - 3d^2 + 2d^3) + \\ & + \frac{\pi \varphi_y GH^4}{8bh_0} (a_1 + a_2) (1 - d^2)^2, \end{aligned}$$

$$\int_{F_2} z \tau_{xz} n_z ds = \frac{\pi GHb}{3h_0} (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) (1 - d^3) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi b \varphi_y G H^2}{8 h_0} (a_1 + a_2) (1 - d^2) (3 + d^2), \\
\int_{F_2} x \tau_{xz} n_x ds & = - \frac{\pi G H b}{6 h_0} (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) (1 - 3d^2 + 2d^3) - \\
& - \frac{\pi G H^2}{8 h_0} (a_1 + a_2) \varphi_y \left( \frac{7}{4} (1 - d^2)^2 - 3d^4 \ln d - \frac{3d^2}{2} (1 - d^2) \right), \\
\int_{F_2} x \tau_{yz} n_y ds & = \frac{2 G H^2}{3 b h_0} (a_1^2 - a_2^2) (w_0 + x_c \varphi_y) \times \\
& \times \left( \frac{\sqrt{(1 - d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1 - d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1 - d^2}}{d} \right) \right) - \\
& - \frac{\pi \varphi_y G H^2}{8 b h_0} (a_1^3 + a_2^3) \left( \frac{(1 - d^2)^2}{4} - d^4 \ln(d) - \frac{d^2}{2} (1 - d^2) \right), \\
\int_{F_2} x \sigma_z n_z ds & = - \frac{\pi G b \gamma_2}{6 h_0} (a_1 + a_2) (u_0 - z_a \varphi_y) (1 - 3d^2 + 2d^3) - \\
& - \frac{\pi \gamma_2 b \varphi_y G H^2}{8 h_0} (a_1 + a_2) (1 - d^2)^2, \\
& + \frac{2 \gamma G}{3 h_0} (a_1^2 - a_2^2) (w_0 + x_c \varphi_y) \sqrt{(1 - d^2)^3} - \frac{\pi b \varphi_y G \gamma}{8 h_0} (a_1^3 + a_2^3) (1 - d^2)^2.
\end{aligned}$$

Из-за наличия в пятом уравнении членов  $z_\alpha \int_{F_2} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) ds$

и  $x_c \int_{F_2} (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) ds$ , слагаемые  $u_0$  и  $w_0$  исчезают, и в результате

получаем уравнение, содержащее только угол поворота  $\varphi_y$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{(z - z_a) P_x - (x - x_c) P_z}{a_1 + a_2} = \frac{\pi b \varphi_y G H^2}{8 h_0} \left( (1 - d^2)^2 \times \right. \\
& \times \left( \frac{H^2}{b^2} + \frac{\gamma H^2}{a_1 a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} + \left( \frac{\gamma}{H^2} + \frac{3}{4b^2} \right) (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) \right) - \\
& - \frac{(1 - d)}{2} \left( \frac{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}{b^2} - 5 \right) - \left( \frac{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2}{b^2} + 3 \right) d^4 \ln(d) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{8(1-d^3)z_a}{3H} - \frac{4z_a}{3H} \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2+2d^3) - \frac{16(a_1-a_2)x_c}{3\pi b^2} \times$$

$$\times \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} + \frac{\gamma b^2}{H^2} \sqrt{(1-d^2)^3} \right).$$

Как видим, при повороте вокруг оси  $Oy$  жесткость  $\mu_y = M_y/\varphi_y$  для сечения с одной осью симметрии несколько уменьшается благодаря наличию слагаемых с выражением  $a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2$  и с координаты  $x_c$ . По-видимому, природа позаботилась об увеличении жесткости при поступательных перемещениях зуба и проявила разумное снижение жесткости зубов при повороте с целью улучшения контакта зубов в процессе жевательного акта.

Вычислим интегралы, входящие в шестое уравнение:

$$\int_{F_2} z \tau_{xy} n_x ds = \frac{\pi b \varphi_z G H^2}{4 h_0} (a_1 + a_2) \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - d^4 \ln(d) - \frac{d^2}{2} (1-d^2) \right),$$

$$\int_{F_2} x \sigma_y n_y ds = \frac{2\gamma G H^2}{3 b h_0} (a_1^2 - a_2^2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + \right.$$

$$\left. + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) + \frac{\pi \varphi_z G H^2}{8 b h_0} (a_1^3 + a_2^3) \left( \gamma - \frac{\gamma_2 b^2}{a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2} \right) \times$$

$$\times \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - d^4 \ln(d) - \frac{d^2}{2} (1-d^2) \right) -$$

$$-\frac{2 G H b \gamma_2 \varphi_x}{3 h_0} (a_1^2 - a_2^2) \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3 d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3 d^4}{8} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right),$$

$$\int_{F_2} x \tau_{yz} n_z ds = \frac{2 G b}{3 h_0} (a_1^2 - a_2^2) (v_0 - x_b \varphi_z + z_b \varphi_x) \sqrt{(1-d^2)^3} +$$

$$+ \frac{\pi b \varphi_z G}{8 h_0} (a_1^3 + a_2^3) (1-d^2)^2 - \frac{2 b \varphi_x G H}{3 h_0} (a_1^2 - a_2^2) \times$$

$$\times \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3 d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3 d^4}{8} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right),$$

$$\int_{F_2} y \sigma_x n_x ds = -\frac{\pi b \phi_z G H^2}{8 h_0 a_1 a_2} (a_1 + a_2) (\gamma b^2 - \gamma_2 a_1 a_2) \times$$

$$\times \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - d^4 \ln(d) - \frac{d^2}{2} (1-d^2) \right),$$

$$\int_{F_2} z \tau_{xy} n_y ds = -\frac{\pi b \phi_z G H^2}{4 h_0} (a_1 + a_2) \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - d^4 \ln(d) - \frac{d^2}{2} (1-d^2) \right),$$

$$\int_{F_2} y \tau_{xz} n_z ds = -\frac{\pi \phi_z G b^3}{8 h_0} (a_1 + a_2) (1-d^2)^2$$

Если подставить полученные интегралы в шестое уравнение, то слагаемое, содержащее поступательное перемещение  $v_0$ , исчезнет, благодаря наличию в уравнении члена  $x_b \int_{F_2} (\tau_{xy} n_x + \tau_{yz} n_z + \sigma_y n_y) ds$ . В результате

получим следующее уравнение относительно углов поворота  $\phi_x$  и  $\phi_z$ :

$$\frac{(x - x_b) P_y - y P_x}{a_1 + a_2} = \frac{2GH(a_1 - a_2)\phi_x}{3h_0} ((1-\gamma) \times$$

$$\times \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\gamma H z_b}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \arctg \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \Bigg) +$$

$$+ \frac{\pi b \phi_z G H^2}{8 h_0} \left( \left( \frac{\gamma(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} - 2\gamma + 8 \right) \times \right.$$

$$\times \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - d^4 \ln(d) - \frac{d^2(1-d^2)}{2} \right) +$$

$$\left. + \frac{(1-d^2)^2}{H^2} (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 + b^2) - \frac{16\gamma x_b}{3\pi b^2} (a_1 - a_2) \sqrt{(1-d^2)^3} \right).$$

Таким образом, четвертое и шестое уравнение определяют углы поворота  $\phi_x$  и  $\phi_z$  в результате их совместного решения. Запишем определители системы:

$$\begin{aligned}
\Delta = & \frac{\pi^2 G^2 H^4 b^2}{64 h_0^2} \left( (1-d^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a_1 a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1-d^2}{2} \left( 5 - \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) - d^4 \left( 3 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \ln(d) - \right. \\
& \left. - \frac{4z_b}{3H} \left( 2(1-d^3) + \left( \gamma - 1 + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right) \times \\
\times & \left( \left( \frac{\gamma(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} - 2\gamma + 8 \right) \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - \frac{d^2(1-d^2)}{2} - d^4 \ln(d) \right) + \right. \\
& \left. + (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 + b^2) \frac{(1-d^2)^2}{H^2} - \frac{16\gamma x_b}{3\pi b^2} (a_1 - a_2) \sqrt{(1-d^2)^3} \right) - \\
& - \frac{4b^2 G^2 H^2}{9h_0^2} (a_1 - a_2) \left( (a_1 - a_2) \left( \sqrt{(1-d^2)^3} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^2}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\pi x_b}{4} \left( 2(1-d^3) + \left( \gamma + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right) \times \\
& \times \left( (1-\gamma) \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\gamma H z_b}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \right), \\
\Delta_x = & \frac{\pi G H^2 b (y P_z - (z - z_b) P_y)}{8 h_0 (a_1 + a_2)} \left( \left( \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2)}{b^2} - 2\gamma + 8 \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{(1-d^2)^2}{4} - \frac{d^2(1-d^2)}{2} - d^4 \ln(d) \right) + \\
& + \frac{1}{H^2} \left( a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 + b^2 \right) (1-d^2)^2 - \frac{16\gamma x_b (a_1 - a_2) \sqrt{(1-d^2)^3}}{3\pi b^2} \Bigg) - \\
& - \frac{2GHb((x-x_b)P_y - yP_x)}{3h_0(a_1+a_2)} \left( (a_1 - a_2) \left( \sqrt{(1-d^2)^3} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\gamma H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \right) \right) + \\
& \left. + \frac{\pi x_b}{4} \left( 2(1-d^3) + \left( \gamma + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right), \\
& \Delta_z = \frac{\pi GH^2 b ((x-x_b)P_y - yP_x)}{8h_0(a_1+a_2)} \left( \frac{1}{2} (1-d^2) \left( 5 - \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) + \right. \\
& \left. + (1-d^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a_1 a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) - d^4 \left( 3 + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) \ln(d) - \right. \\
& \left. - \frac{4z_b}{3H} \left( 2(1-d^3) + \left( \gamma - 1 + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right) - \\
& - \frac{2GHb(a_1 - a_2)(yP_z - (z-z_b)P_y)}{3h_0(a_1+a_2)} \times \\
& \times \left( \frac{\gamma z_b H}{b^2} \left( \frac{1}{4} \sqrt{(1-d^2)^3} - d^2 \sqrt{1-d^2} + d^3 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) - \right. \\
& \left. - (\gamma - 1) \left( \frac{1}{4} \sqrt{(1-d^2)^3} - \frac{3d^2}{8} \sqrt{1-d^2} + \frac{3d^4}{8} \ln \left( \frac{1+\sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Повороты  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  равны соответственно:

$$\varphi_x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad \varphi_z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

При  $a_1 = a_2$  получим повороты для зуба с поперечным сечением, имеющим две оси симметрии [54]. Отметим, что, несмотря на громоздкость и сложность формул для углов  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ , можно заметить уменьшение жесткости при поворотах вокруг осей  $0x$  и  $0z$  для поперечного сечения с одной осью симметрии. Таким образом, все параметры, характеризующие перемещения зуба как абсолютно твердого тела, определены.

Представляет интерес более подробно рассмотреть различные частные случаи моделирования периодонта как этапы на пути усовершенствования модели.

1. Периодонт, ограниченный двумя эллиптическими гиперboloидами [54]. В этом случае периодонт имеет две плоскости симметрии. Вследствие равенства  $a_1 = a_2 = a$  система совместных уравнений для нахождения углов поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_z$  распадается на независимые друг от друга уравнения и, следовательно, все кинематические параметры определяются по следующим формулам:

$$u_0 = \frac{P_x h_0}{\pi G H^2 \left( \left( \frac{a}{2b} + \frac{\gamma b}{2a} + \frac{ab}{H^2} \right) (1-d^2) + \left( \frac{a}{b} + \frac{\gamma b}{a} \right) d^2 \ln(d) \right)},$$

$$v_0 = \frac{P_y h_0}{\pi G H^2 \left( \left( \frac{b}{2a} + \frac{\gamma a}{2b} + \frac{ab}{H^2} \right) (1-d^2) + \left( \frac{\gamma a}{b} + \frac{b}{a} \right) d^2 \ln(d) \right)},$$

$$w_0 = \frac{P_z h_0}{\pi G H^2 \left( \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \left( \frac{1-d^2}{2} + d^2 \ln(d) \right) + \frac{\gamma ab}{H^2} (1-d^2) \right)},$$

$$z_a = \frac{Ha \left( 3(1-d^2) \frac{b^2}{H^2} + \left( \frac{\gamma b^2}{a^2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right)}{3b \left( (1-d^2) \left( \frac{\gamma b}{2a} + \frac{a}{2b} + \frac{ab}{H^2} \right) + \left( \frac{a}{b} + \frac{\gamma b}{a} \right) d^2 \ln(d) \right)},$$

$$z_b = \frac{Hb \left( 3(1-d^2) \frac{a^2}{H^2} + \left( \frac{\gamma a^2}{b^2} + \frac{\gamma_2 a^2}{H^2} + 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right)}{3a \left( (1-d^2) \left( \frac{b}{2a} + \frac{\gamma a}{2b} + \frac{ab}{H^2} \right) + \left( \frac{\gamma a}{b} + \frac{b}{a} \right) d^2 \ln(d) \right)},$$

$$x_b = 0, \quad x_c = 0,$$

$$\frac{\pi ab \varphi_x G H^2}{4h_0} \left( (1-d^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a^2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a^2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(1-d^2) \left( 5 - \frac{b^2}{a^2} \right) - \left( 3 + \frac{b^2}{a^2} \right) d^4 \ln(d) - \\
& - \frac{4z_b}{3H} \left( 2(1-d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a^2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \Bigg) = \\
& = m_x = yP_z - (z-z_b)P_y, \\
& \frac{\pi ab \varphi_y GH^2}{4h_0} \left( (1-d^2)^2 \left( \frac{3a^2}{4b^2} + \frac{\gamma a^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{a^2} + \frac{H^2}{b^2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}(1-d^2) \left( 5 - \frac{a^2}{b^2} \right) - \left( 3 + \frac{a^2}{b^2} \right) d^4 \ln(d) - \right. \\
& \left. - \frac{4z_a}{3H} \left( 2(1-d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{a^2} + \frac{H^2}{b^2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right) \Bigg) = \\
& = m_y = (z-z_a)P_x - xP_z, \\
& \frac{\pi GH^2 ab \varphi_z}{4h_0} \left( \left( \frac{\gamma a^2}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a^2} - 2\gamma + 8 \right) \left( \frac{(1-d^2)(1-3d^2)}{4} - d^4 \ln(d) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{H^2} (a^2 + b^2) (1-d^2)^2 \right) = m_z = xP_y - yP_x.
\end{aligned}$$

2. Периодонт, ограниченный двумя эллиптическими конусами. В статье [15] рассмотрен частный случай, когда сила находится в плоскости симметрии. Для перехода к эллиптическому конусу достаточно приравнять к нулю  $d = 0$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{P_x h_0}{\pi GH^2 \left( \frac{a}{2b} + \frac{\gamma b}{2a} + \frac{ab}{H^2} \right)}, \quad v_0 = \frac{P_y h_0}{\pi GH^2 \left( \frac{b}{2a} + \frac{\gamma a}{2b} + \frac{ab}{H^2} \right)}, \\
w_0 &= \frac{P_z h_0}{\pi GH^2 \left( \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} + \frac{\gamma ab}{H^2} \right)}, \\
z_a &= \frac{H \left( \frac{(\gamma+1)ab}{H^2} + \frac{\gamma b}{a} + \frac{a}{b} \right)}{3 \left( \frac{\gamma b}{2a} + \frac{a}{2b} + \frac{ab}{H^2} \right)}, \quad z_b = \frac{H \left( \frac{(\gamma+1)ab}{H^2} + \frac{\gamma a}{b} + \frac{b}{a} \right)}{3 \left( \frac{\gamma a}{2b} + \frac{b}{2a} + \frac{ab}{H^2} \right)},
\end{aligned}$$

$$M_x = \frac{\pi ab \varphi_x G H^2}{4h_0} \left( \frac{b^2}{4a^2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a^2} + 2\gamma + \frac{3}{4} - \frac{4z_b}{3H} \left( \gamma + 1 + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a^2} \right) \right),$$

$$M_y = \frac{\pi G H^2 ab \varphi_y}{4h_0} \left( \frac{a^2}{4b^2} + \frac{\gamma H^2}{a^2} + \frac{\gamma a^2}{H^2} + \frac{H^2}{b^2} + 2\gamma + \frac{3}{4} - \frac{4z_a}{3H} \left( \gamma + 1 + \frac{\gamma H^2}{a^2} + \frac{H^2}{b^2} \right) \right),$$

$$\frac{\pi ab \varphi_z G H^2}{16h_0} \left( \gamma \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) - 2\gamma + 8 + \frac{4}{H^2} (a^2 + b^2) \right) = M_z.$$

3. Периодонт, ограниченный двумя круговыми конусами. Эта задача была решена методами сопротивления материалов в работах [91, 92]. Из наших формул этот случай получится при  $a_1 = a_2 = a = b$ ,  $d = 0$ . Кроме того, для кругового конуса имеем  $\operatorname{tg}(\alpha) = a/H$ ,  $h = h_0 \sin(\alpha)$ ,  $u_0 = v_0 = \delta$ . Отсюда следует

$$z_a = z_b = \frac{H \left( (\gamma + 1) \operatorname{tg}^2(\alpha) + \gamma + 1 \right)}{3 \left( \operatorname{tg}^2(\alpha) + \frac{\gamma + 1}{2} \right)} = \frac{2H}{3 \left( 1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{3 - 4\nu} \right)},$$

$$P_x = P_y = \frac{\pi \delta H^2 E \sin(\alpha)}{2h(1 + \nu)} \left( \operatorname{tg}^2(\alpha) + \frac{3 - 4\nu}{2(1 - 2\nu)} \right).$$

Последнее выражение при  $\nu = 0,15$  полностью совпадает со следующей формулой Г. П. Соснина [91]:

$$P_x = P_y = \frac{\pi \delta H^2 E \sin(\alpha)}{h} (0.4346 \operatorname{tg}^2(\alpha) + 0.7475),$$

где  $E = 2(1 + \nu)G$ .

Для угла поворота  $\varphi_x$  в результате преобразований получим

$$M_x = \frac{\pi \varphi_x a^2 G H^2}{4h_0} \left( \gamma (2 + \operatorname{tg}^2(\alpha)) + 1 + (\gamma + 1) \operatorname{ctg}^2(\alpha) - \frac{8(\gamma + 1)(1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha))}{9 \left( 1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{3 - 4\nu} \right)} \right),$$

или

$$M_x = \frac{\pi \varphi_x (\gamma + 1) G H^4 \left( 9(1 - 2\nu) \sin^4(\alpha) + 2(3 - 4\nu)(3 - 7\nu) \sin^2(\alpha) + (3 - 4\nu)^2 \right)}{36h_0 \cos^4(\alpha) (3 - 4\nu) (3 - 4\nu - \sin^2(\alpha))}.$$

Отсюда, при  $\nu = 0,15$  получим

$$M_x = \frac{\pi \varphi_x G H^4}{h_0} \frac{0.25 (\sin^4(\alpha) + 1.485 \sin^2(\alpha) + 0.9142)}{(2.4 - \sin^2(\alpha)) \cos^4(\alpha)}.$$

В книге Г. П. Соснина [91] для момента  $M_x$  получена следующая формула для того же значения коэффициента Пуассона

$$M_x = \frac{\pi \varphi_x G H^4}{h_0} \frac{0.25024 (\sin^4(\alpha) + 1.470 \sin^2(\alpha) + 0.9117)}{(2.4 - \sin^2(\alpha)) \cos^4(\alpha)}.$$

Эти незначительные расхождения, видимо, возникли в результате округлений в формулах Г. П. Соснина.

Таким образом, предложенный в статье [15] и получивший развитие в работах [54, 59] аналитический способ решения задачи о равновесии периодонта, основанный на точном выполнении краевых условий на поверхностях, ограничивающих периодонт, получил полное подтверждение на примере равновесия периодонта в виде круговой конической оболочки, для расчета которой был использован другой подход, обычно применяемый в курсе сопротивления материалов. Что касается сравнения угла поворота вокруг вертикальной оси, то в работе Г. П. Соснина он отсутствует, т. е. задача кручения периодонта им не рассматривалась.

### Глава 3

#### Вывод формул для напряжений в области контакта периодонта с корнем зуба

Наибольший интерес представляют напряжения в области контакта периодонта с корнем зуба, т. е. на поверхности [61]:

$$z = H \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}, \quad k = 1, 2.$$

С целью упрощения формул для напряжений воспользуемся обобщенными цилиндрическими координатами  $x = a_k r \cos(\theta)$ ,  $y = br \sin(\theta)$ ,  $z = H \sqrt{r^2 + d^2}$  [31]. Далее рассмотрим определение нормальных и касательных напряжений для различных случаев.

1. Нормальные напряжения будем рассчитывать по следующей формуле:

$$\sigma_n = \frac{(T \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}}{n^2}, \quad (3.1)$$

где  $T$  — тензор напряжений,  $\vec{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности  $F_2(x, y, z)$ , описываемой функцией

$$F_2(x, y, z) = z - H \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2} = 0,$$

$$\vec{n} = \text{grad}(F_2) = -\frac{iHr \cos(\theta)}{a_k \sqrt{r^2 + d^2}} - \frac{jHr \sin(\theta)}{b \sqrt{r^2 + d^2}} + k,$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + \frac{H^2 r^2}{r^2 + d^2} \left( \frac{\cos^2(\theta)}{a_k^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b^2} \right)}.$$

Далее рассмотрим нахождение выражений для нормальных напряжений при поступательных перемещениях и поворотах зуба в различных направлениях в соответствии с формулой (3.1).

1.1. Поступательное перемещение вдоль оси  $0x$ . В этом случае

$$\sigma_n = -\frac{\gamma u_0 r \cos(\theta) GH}{a_k h_0 \sqrt{r^2 + d^2}}, \quad \gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad (3.2)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига,  $r = \sqrt{x^2/a_k^2 + y^2/b^2}$ ,  $\text{tg}(\theta)b/a_k = y/x$ ,  $k=1$ , если  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ,  $k=2$ , если  $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ .

Анализ формулы (3.2) показывает, что происходит перераспределение напряжений, а именно: большие напряжения наблюдаются на стороне с меньшей полуосью  $a$ , а меньшие — на стороне с большей полуосью  $a$ . Это означает, что костная ткань испытывает меньшие напряжения при действии силы во фронтальном направлении при несимметричном поперечном сечении по сравнению с симметричным. По-видимому, природа позаботилась об этом, создавая несимметричный профиль корня зуба.

1.2. При поступательном перемещении вдоль оси  $0y$  нормальные напряжения (3.1) принимают вид:

$$\sigma_n = -\frac{\gamma GH v_0 r \sin(\theta)}{b h_0 \sqrt{r^2 + d^2}}. \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) показывает, что характер изменения напряжений при поступательном перемещении зуба вдоль оси  $0y$  для несимметричного профиля такой же, как и для симметричного профиля. Однако следует заметить, что при поступательных перемещениях вдоль всех трех осей координат вследствие несимметричного поперечного сечения имеет место уменьшение параметров  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$ . Поэтому для несимметричного профиля наблюдается общее снижение уровня нормальных напряжений. Таким образом, нормальные напряжения при поступательных перемещениях вдоль осей  $0x$  и  $0y$  переменны, причем в области вершины корня зуба равны нулю, а наибольшие значения принимают при  $z = H$  ( $r = \sqrt{1 - d^2}$ ).

1.3. При поступательном перемещении вдоль оси  $Oz$  нормальное выражается формулой

$$\sigma_n = \gamma w_0 G / h_0 .$$

Отсюда следует, что нормальные напряжения при поступательном перемещении зуба вдоль оси  $Oz$  постоянные для всех точек.

1.4. При повороте вокруг оси  $Ox$  из формулы (3.1) имеем

$$\sigma_n = \frac{\gamma r \varphi_x \sin(\theta) H}{bh_0} \left( \frac{z - z_b}{\sqrt{r^2 + d^2}} + \frac{b^2}{H} \right).$$

Нормальные напряжения при повороте вокруг оси  $Ox$  меняют знак по высоте корня зуба. В частности, они обращаются в нуль в вершине корня зуба при  $z = Hd$  ( $r = 0$ ) и в точке  $z = \frac{z_b}{1 + b^2/H^2}$ . Наибольшие значения они принимают при  $z = H$ .

1.5. При повороте вокруг оси  $Oy$  из формулы (3.1) получаем

$$\sigma_n = -\frac{\gamma \varphi_y G}{h_0} \left( \frac{Hr(z - z_a) \cos(\theta)}{a_k \sqrt{r^2 + d^2}} + x - x_c \right).$$

Вследствие несимметричности поперечного сечения относительно оси  $Oy$  характер изменения нормальных напряжений достаточно сложен. Они обращаются в нуль на линии пересечения поверхностей

$z = H \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}$  и  $\frac{H^2 x (z - z_a)}{a_k^2} + z(x - x_c) = 0$ . В частности эти напря-

жения равны нулю в точках  $x = x_c$ ,  $z = z_a$  и  $y = \pm b \sqrt{\frac{z_a^2}{b^2} - \frac{x_c^2}{a_k^2} - d^2}$ .

1.6. При повороте вокруг оси  $Oz$  нормальные напряжения (3.1) принимают вид

$$\sigma_n = -\frac{\gamma r \varphi_z \sin(\theta) GH}{bh_0 \sqrt{r^2 + d^2}} \left( \frac{r(a_k^2 - b^2) \cos(\theta)}{a_k} - x_b \right). \quad (3.4)$$

По сравнению с симметричным профилем [54], нормальные напряжения (3.4) при кручении несколько уменьшаются при  $a_k > b$ .

2. Касательные напряжения вдоль образующей эллиптического гипербоида определим следующим образом

$$\tau_{ns} = \frac{(T \cdot \vec{n}) \cdot \vec{s}}{ns}, \quad (3.5)$$

где  $n, s$  — модули,  $\vec{s} = a_k \cos(\theta) \vec{i} + b \sin(\theta) \vec{j} + \frac{Hr}{\sqrt{r^2 + d^2}} \vec{k}$ .

2.1. При поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$  касательные напряжения (3.6) записываются в виде:

$$\tau_{ns} = \frac{u_0 n a_k \cos(\theta) G}{h_0 s}. \quad (3.6)$$

Наличие в числителе формулы (3.6) модуля нормали  $\vec{n}$ , а в знаменателе модуля касательной к образующей  $\vec{s}$  несколько искажает косинусоидальный закон изменения касательных напряжений вдоль образующей. Наибольшие значения касательные напряжения принимают при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ .

2.2. При поступательном перемещении вдоль оси  $Oy$  из выражения (3.5) получим

$$\tau_{ns} = \frac{v_0 n b \sin(\theta) G}{h_0 s}.$$

Отсюда следует, что характер изменения касательных напряжений имеет тот же вид, что и при поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$ , только косинусоидальный закон заменяется синусоидальным. Наибольшие значения касательные напряжения  $\tau_{ns}$  принимают для углов  $\theta = \pm \pi/2$ .

2.3. При поступательном перемещении вдоль оси  $Oz$  имеем

$$\tau_{ns} = \frac{w_0 r n G H}{h_0 s \sqrt{r^2 + d^2}}.$$

Полученные касательные напряжения обращаются в нуль при  $r = 0$  (в вершине корня зуба), наибольшие значения достигаются при  $z = H$ . Вдоль контура сечения напряжения изменяются согласно отношению  $n/s$ .

2.4. При повороте вокруг оси  $Ox$  выражение (3.5) для касательных напряжений принимает следующий вид:

$$\tau_{ns} = \frac{b n \varphi_x G}{h_0 s} \left( \frac{H r^2}{\sqrt{r^2 + d^2}} - z + z_b \right) \sin(\theta). \quad (3.7)$$

Закон изменения напряжений является синусоидальным с точностью до множителя  $n/s$ . Напряжения  $\tau_{ns} = 0$  при любом  $\theta$  за пределами поверхности корня зуба, т. е. при  $z = H^2 d^2 / z_b$ .

2.5. При повороте вокруг оси  $Oy$  из формулы (3.5) получим

$$\tau_{ns} = -\frac{a_k n \varphi_y G}{h_0 s} \left( \frac{H r (x - x_c)}{a_k \sqrt{r^2 + d^2}} - (z - z_\alpha) \cos(\theta) \right).$$

Отсюда следует, что напряжение  $\tau_{ns}$  обращается в нуль на линии пересечения поверхностей  $z = H \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + d^2}$  и  $z(x z_\alpha - x_c z) - H^2 d^2 (x - x_c) = 0$ .

В частности эти напряжения равны нулю в точках  $x = x_c$ ,  $z = z_a$  и  $y = \pm b \sqrt{\frac{z_a^2}{H^2} - \frac{x_c^2}{a_k^2} - d^2}$ .

2.6. При повороте вокруг оси  $Oz$  будем иметь

$$\tau_{ns} = -\frac{nbx_b\varphi_z \sin(\theta)G}{h_0s}.$$

При кручении для сечения с двумя осями симметрии  $\tau_{ns} = 0$ , для сечения с одной осью симметрии  $\tau_{ns} \neq 0$ . Это говорит о более равномерном распределении объемных напряжений.

3.3. Касательные напряжения вдоль направляющей можно представить в следующем виде

$$\tau_{n\theta} = \frac{(T \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t}}{nt}, \quad (3.8)$$

$$\vec{t} = -\vec{i} \sin(\theta) \left( \frac{H^2 r^2}{b(r^2 + d^2)} + b \right) + \vec{j} \cos(\theta) \left( \frac{H^2 r^2}{a_k(r^2 + d^2)} + a_k \right) + \vec{k} \frac{Hr(a_k^2 - b^2) \sin(2\theta)}{2a_k b \sqrt{r^2 + d^2}}.$$

3.1. При поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$  из выражения (3.8) следует

$$\tau_{n\theta} = -\frac{Gu_0 \sin(\theta)}{h_0s} \left( \frac{H^2 r^2}{b(r^2 + d^2)} + b \right). \quad (3.9)$$

Закон (3.9) изменения касательных напряжений является синусоидальным с точностью до множителя  $1/s$ . При больших  $a_k$  напряжения уменьшаются, при малых  $a_k$  увеличиваются.

3.2. При поступательном перемещении вдоль оси  $Oy$  напряжения (3.8) запишутся в виде

$$\tau_{n\theta} = \frac{v_0 \cos(\theta)G}{h_0s} \left( \frac{H^2 r^2}{a_k(r^2 + d^2)} + a_k \right).$$

Полученная зависимость от полуоси  $a_k$  имеет достаточно сложный вид, поскольку имеются слагаемые, содержащие  $a_k$  как в числителе, так и в знаменателе. Однако, учитывая, что  $H > a_k$  все же можно констатировать уменьшение напряжений при увеличении  $a_k$ .

3.3. При поступательных перемещениях вдоль оси  $Oz$  из выражения (3.8) имеем

$$\tau_{n\theta} = \frac{w_0 r (a_k^2 - b^2) \sin(2\theta) GH}{2a_k b h_0 s \sqrt{r^2 + d^2}}. \quad (3.10)$$

Для несимметричного профиля из выражения (3.10) следует увеличение касательных напряжений для больших значений  $a_k$  и их уменьшение при малых  $a_k$ .

3.4. При повороте вокруг оси  $0x$  формула (3.8) принимает вид

$$\tau_{n\theta} = \frac{G\varphi_x \cos(\theta)}{h_0 s} \left( \frac{r^2 H (a_k^2 - b^2) \sin^2(\theta)}{a_k \sqrt{r^2 + d^2}} - (z - z_b) \left( \frac{H^2 r^2}{a_k (r^2 + d^2)} + a_k \right) \right). \quad (3.11)$$

Напряжения (3.11) для больших значений  $a_k$  уменьшаются, для малых значений — увеличиваются.

3.5. При повороте вокруг оси  $0y$  получаем

$$\tau_{n\theta} = \frac{G\varphi_y \sin(\theta)}{h_0 s} \left( \frac{Hr (b^2 - a_k^2) (x - x_c) \cos(\theta)}{a_k b \sqrt{r^2 + d^2}} - (z - z_\alpha) \left( \frac{H^2 r^2}{b (r^2 + d^2)} + b \right) \right).$$

3.6. При повороте вокруг оси  $0z$  напряжения (3.8) запишутся в виде

$$\tau_{n\theta} = \frac{G\varphi_z}{h_0} \left( rs - \frac{x_b \cos(\theta)}{s} \left( \frac{H^2 r^2}{a_k (r^2 + d^2)} + a_k \right) \right).$$

Приблизительные эпюры нормальных и касательных напряжений при поступательных перемещениях вдоль трех осей координат и трех поворотах вокруг тех же осей координат приведены на рис. 3.1. Сплошные линии показывают вид корня зуба сбоку и сверху, штриховые линии описывают эпюры напряжения. В точках, где штриховые линии пересекают контур корня зуба, напряжения равны нулю. Если штриховые линии находятся внутри контура, то величины напряжений отрицательны. Штриховые линии вне контура характеризуют положительные напряжения. Более точный характер распределения напряжений показан в главе 9.

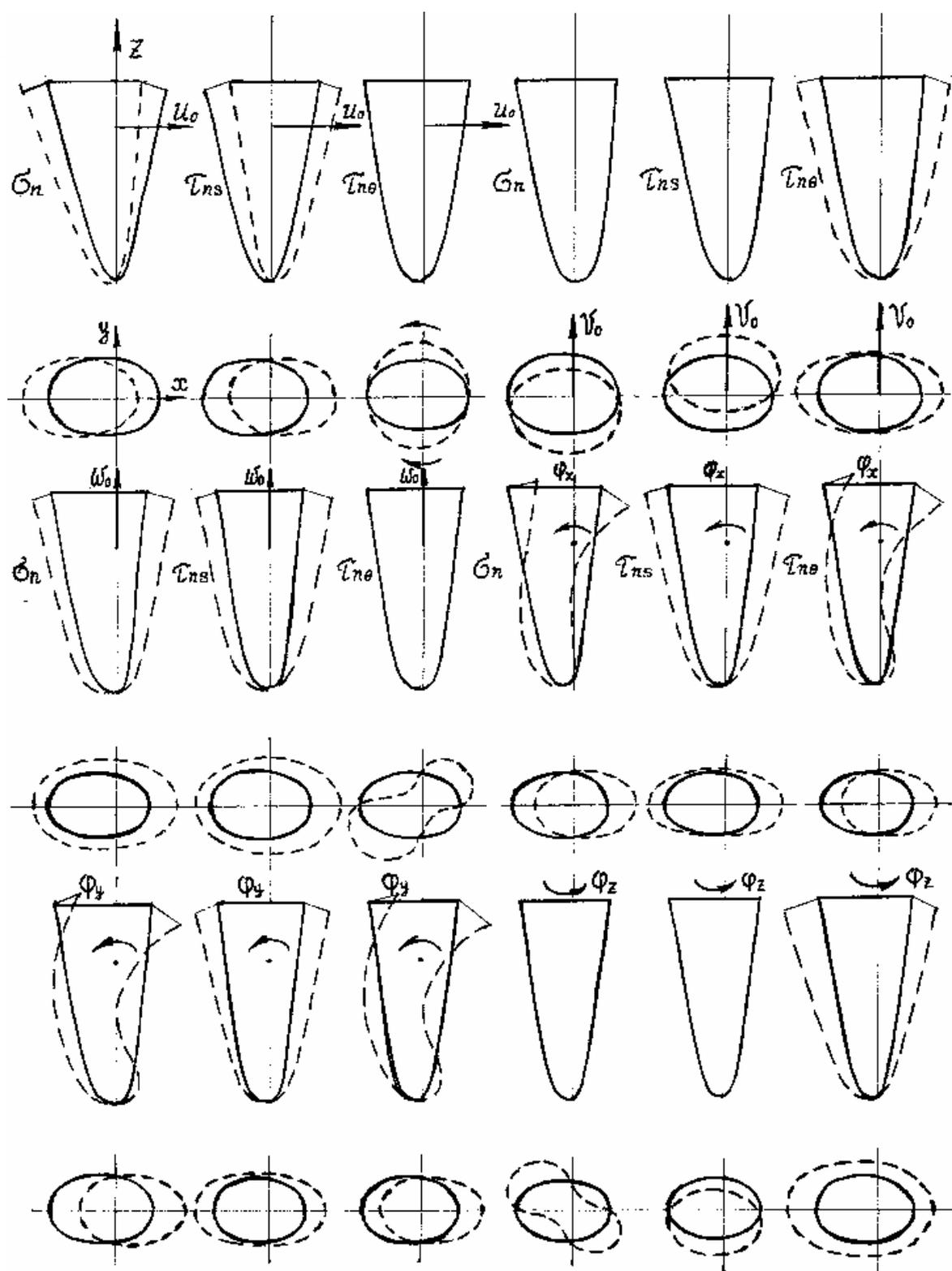


Рис. 3.1. Эпюры нормальных и касательных напряжений при поступательных перемещениях и поворотах вокруг осей координат в области контакта периодонта и корня зуба

## Глава 4

### Исследование жесткости зуба и напряженно-деформированного состояния периодонта в области контакта с корнем зуба при поступательном перемещении вдоль горизонтальной оси симметрии

Формулы, полученные в предыдущих параграфах для перемещений и напряжений, содержат параметры, связанные с выбранной системой координат, что представляет собой неудобство при практическом применении, особенно при наличии атрофии костной ткани, когда изменяется глубина закрепления корня зуба. Поэтому преобразуем формулы, заменив [73, 74] геометрические параметры согласно следующим выражениям:

$$a_k = \frac{a_{0k}(l_0 + h)}{\sqrt{h_H(2l_0 + h_H)}}, \quad b = \frac{b_0(l_0 + h)}{\sqrt{h_H(2l_0 + h_H)}},$$

$$d = \frac{l_0}{l_0 + h}, \quad H = l_0 + h, \quad r = \frac{\sqrt{z^2 - l_0^2}}{l_0 + h},$$

где  $h$  — рабочая высота корня зуба при атрофии,  $h_H$  — глубина корня зуба при норме,  $l_0$  — расстояние от начала координат до вершины корня зуба (в случае модели в виде конуса  $l_0 = 0$ ),  $a_{k0}$ ,  $b_0$  — полуоси эллипсов верхнего поперечного сечения при норме, т. е. при  $z = l_0 + h_H$ .

В результате преобразований получим следующие формулы для жесткости  $c_x$  и напряжений  $\sigma_n$ ,  $\tau_{ns}$  и  $\tau_{n\theta}$  при поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$ :

$$c_x = \frac{\pi(a_{10} + a_{20})b_0G}{2h_0} \left( h(2l_0 + h) \left( \frac{\gamma}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{1}{H_0^2} \right) - l_0^2 \left( \frac{\gamma}{a_{10}a_{20}} + \frac{1}{b_0^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{h}{l_0} \right) \right), \quad (4.1)$$

$$\sigma_n = - \frac{\gamma \cos(\theta) P_x G \sqrt{(H_0^2 - l_0^2)(z^2 - l_0^2)}}{a_{k0} z h_0 c_x}, \quad (4.2)$$

$$\tau_{ns} = \frac{G a_{k0} P_x \cos(\theta)}{h_0 c_x} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2) \left( \frac{\cos^2(\theta)}{a_{k0}^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b_0^2} \right) + z^2}{z^2 (a_{k0}^2 \cos^2(\theta) + b_0^2 \sin^2(\theta)) + (z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2)}}, \quad (4.3)$$

$$\tau_{n\theta} = - \frac{\sin(\theta) GP_x \left( (z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2) + b_0^2 z^2 \right)}{b_0 h_0 c_x z \sqrt{z \left( a_{k0} \cos^2(\theta) + b_0^2 \sin^2(\theta) \right) + (z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2)}}, \quad (4.4)$$

Наибольший интерес представляют напряжения у верхнего края периодонта при  $z = l_0 + h$  в точках  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pm\pi/2$  и  $\theta = \pi$ . Формулы для напряжений в этих точках на основании выражений (4.2)–(4.4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_n|_{\theta=0} &= - \frac{\gamma P_x G \sqrt{(H_0^2 - l_0^2) h (h + 2l_0)}}{a_{10} h_0 c_x (h + l_0)}, \\ \sigma_n|_{\theta=\pi} &= \frac{\gamma P_x G \sqrt{h (H_0^2 - l_0^2) (h + 2l_0)}}{a_{20} h_0 c_x (h + l_0)}, \quad \sigma_n|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \\ \tau_{ns}|_{\theta=0} &= \frac{GP_x}{h_0 c_x}, \quad \tau_{ns}|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \tau_{ns}|_{\theta=\pi} = - \frac{GP_x}{h_0 c_x}, \\ \tau_{n\theta}|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} &= \pm \frac{GP_x}{h_0 c_x} \sqrt{1 + \frac{h(2l_0 + h)(H_0^2 - l_0^2)}{b_0^2 (l_0 + h)^2}}, \quad \tau_{n\theta}|_{\theta=0} = \tau_{n\theta}|_{\theta=\pi} = 0. \end{aligned}$$

Для случая модели корня зуба в виде конуса ( $l_0 = 0$ ), все полученные напряжения в указанных точках строго обратно пропорциональны жесткости  $c_x$ , причем касательные напряжения вдоль образующей  $\tau_{ns}$  обратно пропорциональны жесткости  $c_x$  и при  $l_0 \neq 0$ , т. е. для эллиптического гиперboloида.

Нормальные напряжения  $\sigma_n$  для эллиптического гиперboloида обратно пропорциональны жесткости с точностью до множителя  $\sqrt{\frac{h_H h (2l_0 + h_H)(2l_0 + h)}{(l_0 + h)^2}}$ , который изменяется в пределах от  $h_H$  при  $l_0 = 0$  до  $2\sqrt{h_H h}$  при  $l_0 \rightarrow \infty$ . При этом жесткость  $c_x$  при  $l_0 = 0$  и  $l_0 \rightarrow \infty$  согласно формуле (4.1) равна соответственно

$$c_x = \frac{\pi b_0 h^2 (a_{10} + a_{20}) G}{2 h_0} \left( \frac{\gamma}{2 a_{10} a_{20}} + \frac{1}{2 b_0^2} + \frac{1}{h_H^2} \right), \quad (4.5)$$

$$c_x = \frac{G \pi (a_{10} + a_{20}) b_0 h}{2 h_0} \left( \frac{1}{h_H} + \frac{h}{2} \left( \frac{\gamma}{a_{10} a_{20}} + \frac{1}{b_0^2} \right) \right). \quad (4.6)$$

Приведем выражения для нормальных напряжений при  $l_0 = 0$  и при  $l_0 \rightarrow \infty$  соответственно

$$\sigma_n = \frac{2\gamma h_H P_x}{a_{k0}\pi(a_{10} + a_{20})b_0 h^2 \left( \frac{\gamma}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{1}{h_H^2} \right)},$$

$$\sigma_n = \frac{4\gamma P_x \sqrt{h_H}}{a_{k0}\pi b_0 \sqrt{h} (a_{10} + a_{20}) \left( \frac{1}{h_H} + \frac{h}{2} \left( \frac{\gamma}{a_{10}a_{20}} + \frac{1}{b_0^2} \right) \right)}.$$

Таким образом, нормальные напряжения при  $l_0 = 0$  обратно пропорциональны квадрату высоты  $h$  корня зуба, при  $l_0 \rightarrow \infty$  приблизительно обратно пропорциональны корню квадратному из куба высоты корня зуба. Следовательно, наличие закругления при атрофии костной ткани увеличивает напряжения  $\sigma_n$  не столь значительно, как при отсутствии закругления. Так, при отсутствии закругления при уменьшении высоты корня зуба в два раза напряжения  $\sigma_n$  возрастают в 4 раза, а при наличии закругления в случае  $l_0 \rightarrow \infty$  напряжение возрастает в  $2\sqrt{2}$  раз. Разумеется, при конкретных значениях  $l_0$  возрастание напряжений  $\sigma_n$  в случае 50 % атрофии происходит в пределах от  $2\sqrt{2}$  до 4 раз.

В связи с существенным влиянием закругления на напряженное состояние периодонта найдем зависимость радиусов закругления от параметров корня зуба. Так, радиус закругления в вершине корня зуба в плоскости симметрии  $xOz$  равен  $R_1 = \frac{a_{k0}^2 l_0}{h_H (2l_0 + h_H)}$  и может меняться от нуля

до  $R_1 = \frac{a_{k0}^2}{2h_H}$ , в частности при  $a_{k0} = 0.4$ ,  $h_H = 1.4$  получаем

$R_1 = 0.4/7 \approx 0,057$ . В плоскости  $yOz$  радиус вершины корня зуба вычисляется

по формуле  $R_2 = \frac{b_0^2 l_0}{h_H (2l_0 + h_H)}$  и может изменяться в пределах от нуля

до  $R_2 = \frac{b_0^2}{2h_H}$ .

Ввиду того, что напряженное состояние области контакта периодонта и корня зуба при поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$  прежде всего зависит от жесткости  $c_x$ , изучим влияние рабочей высоты  $h$  корня, закругления, описываемого параметром  $l_0$ , и овальности формы поперечного сечения, которую характеризуют параметры  $a_{10}$  и  $a_{20}$ . Анализ формулы для жесткости  $c_x$  показывает, что при  $l_0 = 0$ , т. е. для составного эллиптического конуса, жесткость  $c_x$  прямо пропорциональна квадрату высоты периодонта. При наличии закругления  $l_0 \neq 0$  корня зуба зависимость жест-

кости зуба от высоты периодонта достаточно сложная, поскольку имеются кроме квадратичных слагаемых еще и логарифмические. Однако на основании исследования формулы для жесткости можно утверждать, что жесткость  $c_x$  корня зуба для модели эллиптического гиперboloида больше жесткости эллиптического конуса. В этом достаточно убедиться, установив, что  $h/l_0 > \ln(1 + h/l_0)$  при любых  $h$  и  $l_0$ . Кроме того, отношение

$$\frac{\tilde{n}_x|_{l_0 \rightarrow \infty}}{\tilde{n}_x|_{l_0=0}} = 1 + \frac{h_H - h}{h_H^2 h \left( \frac{\gamma}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{1}{h_H^2} \right)} > 1$$

всегда больше единицы, т. е. наличие закругления повышает жесткость и тем больше, чем меньше рабочая высота  $h$ . Это означает, что в случае атрофии костной ткани при наличии закругления жесткость не столь резко снижается, как для модели в виде конуса.

В формуле для жесткости  $c_x$  в качестве множителя входит модуль сдвига  $G$ , площадь поперечного сечения корня зуба в норме, а в качестве делителя параметр  $h_0$ , характеризующий толщину периодонта. Изучим влияние высоты периодонта  $h$  на жесткость  $c_x$  зуба при различных параметрах эллиптического гиперboloида  $a_{10}$ ,  $a_{20}$ ,  $b_0$  и  $l_0$  с учетом постоянства площади поперечного сечения в норме  $S = \frac{\pi b_0 (a_{10} + a_{20})}{2}$ , а также с учетом данных для модуля сдвига  $G = 0.435E = 46.545$  кг/см<sup>2</sup> и толщины периодонта  $\delta = 0.025$  см [91].

Зависимость между толщиной периодонта  $\delta$  и расстоянием  $h_0$  по вертикали между корнем зуба и костной тканью для конуса с углом равенства  $\alpha = 12^\circ$  может быть записана в следующем виде

$$h_0 = \frac{\delta}{\sin(\alpha)} = \frac{0.025}{\sin 12^\circ} = \frac{0.025}{0.2079} \approx 0.12 \text{ см.}$$

С учетом этого зависимость между жесткостью  $c_x$  и геометрическими параметрами корня может быть записана в форме:

$$c_x = 387S \left( h(h + 2l_0) \left( \frac{\gamma}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{1}{h_H(2l_0 + h_H)} \right) - l_0^2 \left( \frac{\gamma}{a_{10}a_{20}} + \frac{1}{b_0^2} \right) \ln \left( 1 + \frac{h}{l_0} \right) \right), \quad (4.7)$$

где  $S = \pi b_0 (a_{10} + a_{20})/2$  — площадь поперечного сечения верхнего края корня зуба.

Приведем числовые значения жесткости  $c_x$  для различных значений  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  и  $l_0$  при условии постоянства площади поперечного сечения в норме  $S = 0.09\pi$  см<sup>2</sup>. Как уже отмечалось, для корня зуба в виде конуса жесткость

$c_x$  прямо пропорциональна квадрату высоты  $h$ . В частности, при  $a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$  см и  $l_0 = 0$  получаем  $c_x = 2140,6h^2$ , при  $a_{10} = 0,25$  см,  $a_{20} = 0,35$  см,  $b_0 = 0,3$  см и  $l_0 = 0$  имеем  $c_x = 2182,8h^2$  и т. д. Значения жесткостей  $c_x$ , рассчитанные для различных параметров  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  и  $l_0$ , а также различных высот корня зуба, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

**Значения жесткости  $c_x$  зуба при поступательном перемещении вдоль горизонтальной оси симметрии  $Ox$  в зависимости от степени атрофии костной ткани и параметров корня зуба**

Высота корня зуба $h$ , см	Закругление вершины корня зуба, $l_0$	Полуоси эллипса в сечении корня, см			
		$a_{10} = 0,3$ $a_{20} = 0,3$ $b_0 = 0,3$	$a_{10} = 0,25$ $a_{20} = 0,35$ $b_0 = 0,3$	$a_{10} = 0,2$ $a_{20} = 0,4$ $b_0 = 0,3$	$a_{10} = 0,15$ $a_{20} = 0,45$ $b_0 = 0,3$
0.1	0	21,41	21,83	23,25	26,33
	0,1	35,11	35,79	38,09	43,05
	0,2	38,79	39,5	42,3	47,7
0.2	0	85,62	87,31	93	105,3
	0,1	124,9	127,3	135,6	153,4
	0,2	139,8	142,5	152,3	172,2
0.3	0	192,7	196,5	209,2	237
	0,1	239,9	267,4	284,8	322,4
	0,2	294,1	299,9	320,5	362,5
0.4	0	342,5	349,2	372	421,3
	0,1	445	453,7	483,3	547,3
	0,2	497,8	507,6	542,4	613,8
0.5	0	535,2	545,7	581,3	658,3
	0,1	672	687,6	730,1	826,7
	0,2	748,8	763,5	815,8	923,4
0.6	0	770,6	785,8	837,1	947,8
	0,1	943	961,6	1024	1160
	0,2	1046	1066	1139	1290
0.7	0	1049	1070	1139	1290
	0,1	1257	1282	1366	1547
	0,2	1388	1415	1512	1712
0.8	0	1370	1397	1488	1685
	0,1	1615	1647	1755	1987
	0,2	1775	1810	1933	2189
0.9	0	1734	1768	1883	2133
	0,1	2016	2056	2191	2481
	0,2	2206	2249	2403	2721
1.0	0	2141	2183	2325	2633
	0,1	2459	2509	2673	3027
	0,2	2681	2734	2920	3307
1.1	0	2590	2641	2813	3186
	0,1	2951	3009	3206	3631
	0,2	3199	3263	3485	3947

Высота корня зуба $h$ , см	Закругление вершины корня зуба, $l_0$	Полуоси эллипса в сечении корня, см			
		$a_{10} = 0,3$ $a_{20} = 0,3$ $b_0 = 0,3$	$a_{10} = 0,25$ $a_{20} = 0,35$ $b_0 = 0,3$	$a_{10} = 0,2$ $a_{20} = 0,4$ $b_0 = 0,3$	$a_{10} = 0,15$ $a_{20} = 0,45$ $b_0 = 0,3$
1.2	0	3082	3143	3348	3791
	0,1	3478	3546	3778	4279
	0,2	3762	3836	4098	4640
1.3	0	3618	3689	3930	4450
	0,1	4051	4131	4401	4984
	0,2	4367	4454	4757	5388
1.4	0	4196	4278	4511	5160
	0,1	4666	4685	5070	5742
	0,2	5016	5116	5464	6188

Анализ табл. 4.1 подтверждает вывод об увеличении жесткости  $c_x$  с увеличением радиуса закругления для всех рассмотренных примеров. Кроме того, отмечаем увеличение жесткости  $c_x$  с увеличением овальности поперечного сечения, т. е. чем больше различие между полуосями эллипсов  $a_{10}$  и  $a_{20}$ , тем больше жесткость  $c_x$ . Так, для кругового гиперболоида  $a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$ ,  $l_0 = 0,1$  и жесткость при норме составляет  $c_x = 4666$  кг/см; для составного эллиптического гиперболоида  $a_{10} = 0,25$  см,  $a_{20} = 0,35$  см,  $b_0 = 0,3$  см,  $l_0 = 0,1$  и жесткость при норме равна  $c_x = 4685$  кг/см, для составного эллиптического гиперболоида  $a_{10} = 0,2$  см,  $a_{20} = 0,4$  см,  $b_0 = 0,3$  см,  $l_0 = 0,1$  и жесткость в норме  $c_x = 5070$  кг/см, для составного эллиптического гиперболоида  $a_{10} = 0,15$  см,  $a_{20} = 0,45$  см,  $b_0 = 0,3$  см,  $l_0 = 0,1$  и жесткость в норме  $c_x = 5742$  кг/см.

Помимо непосредственного расчета жесткостей, формулы (4.5)–(4.7) позволяют выполнить построение зависимостей  $c_x$  от рабочей высоты корня зуба (от степени атрофии костной ткани). На рис. 4.1–4.7 представлены результаты построения для различных геометрических параметров, характеризующих корень зуба (принимая  $\nu = 0.15$ ,  $h_H = 0.14$  см).

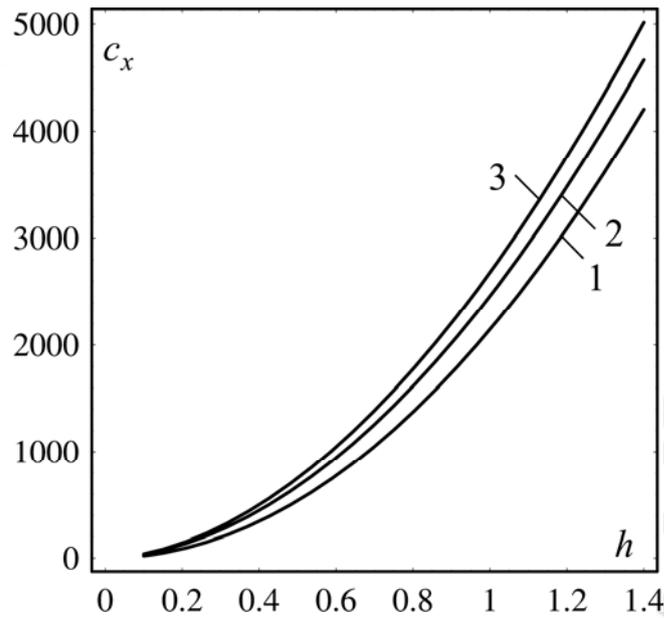


Рис. 4.1. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

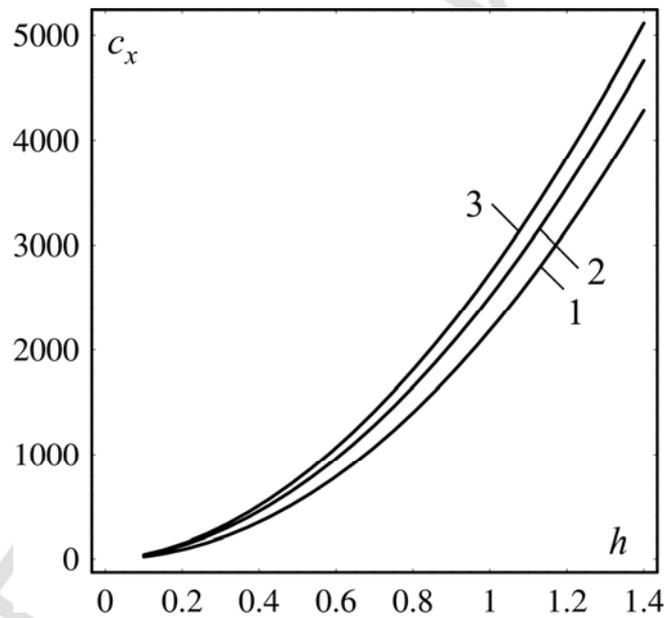


Рис. 4.2. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

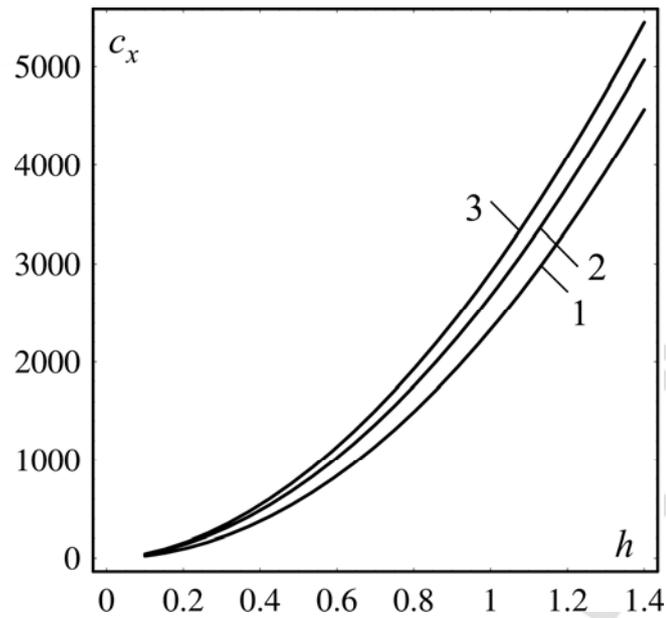


Рис. 4.3. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

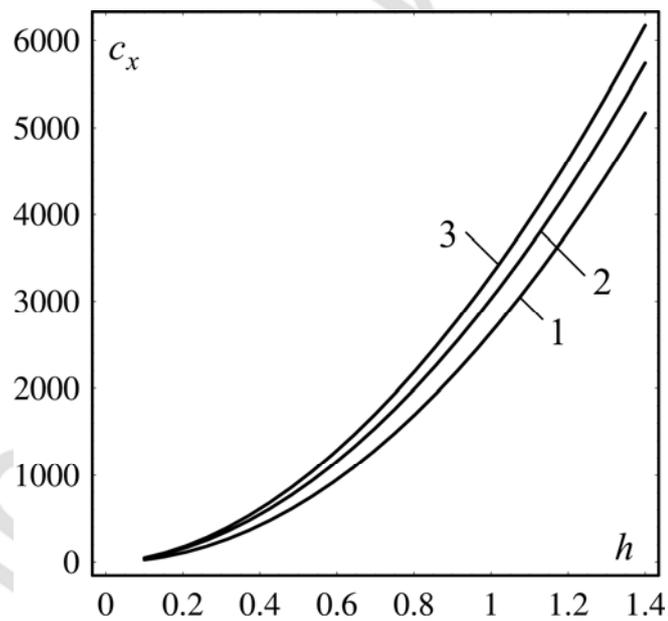


Рис. 4.4. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

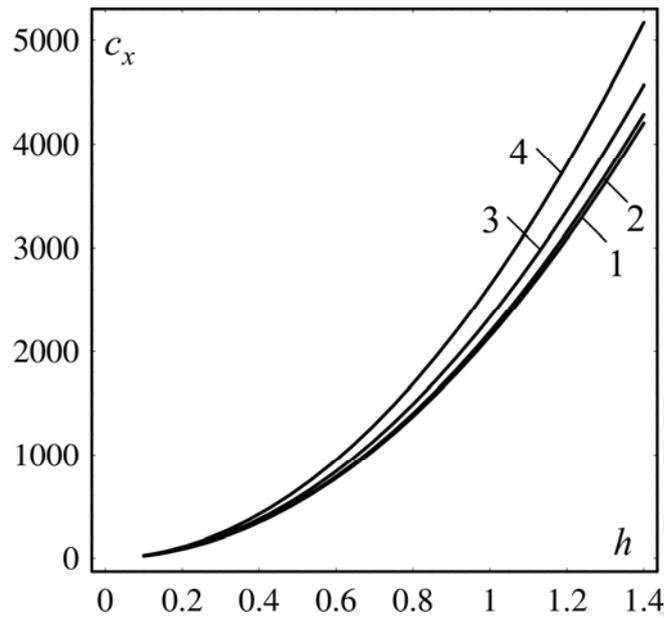


Рис. 4.5. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $l_0 = 0$  для различных параметров поперечного сечения корня:

- 1 —  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$ ;  
 3 —  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$ ; 4 —  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$

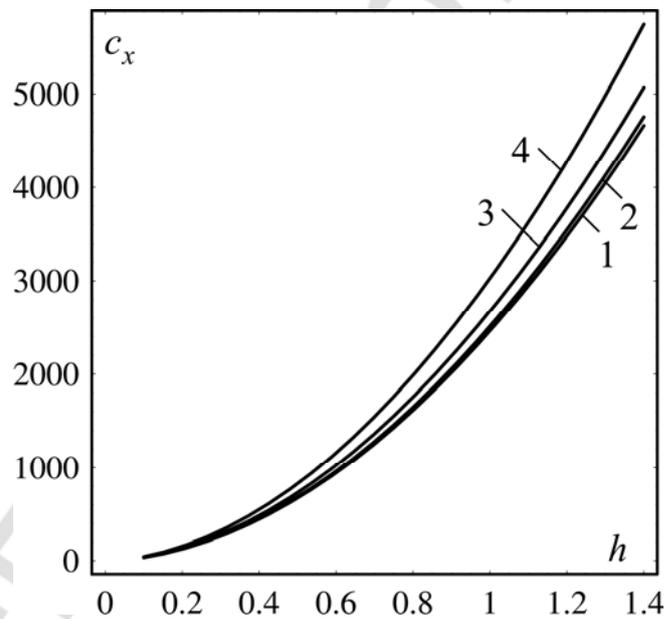


Рис. 4.6. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $l_0 = 0,1$  для различных параметров поперечного сечения корня:

- 1 —  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$ ;  
 3 —  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$ ; 4 —  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$

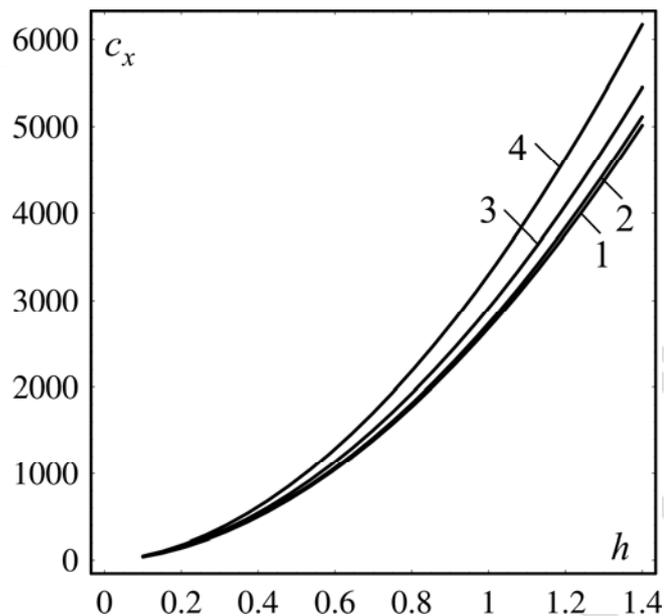


Рис. 4.7. Зависимость жесткости от рабочей высоты зуба при  $l_0 = 0,2$  для различных параметров поперечного сечения корня:

- 1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$ ;  
 3 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ ; 4 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$

Исследование формул для напряжений показывает, что напряжения в области соединения периодонта с корнем зуба не зависят от модуля сдвига  $G$  и от толщины  $h_0$  периодонта, а зависят от коэффициента Пуассона, а также от всех геометрических параметров корня зуба. В частности, напряжения зависят от высоты корня  $h$ , от радиуса закругления вершины корня, от размеров поперечного сечения в норме. Влияние этих геометрических параметров при условии постоянства площади поперечного сечения в норме демонстрируют результаты расчета напряжений, представленные в табл. 4.2.

Таблица 4.2

**Зависимости нормальных напряжений  $\sigma_n$  от степени атрофии костной ткани и параметров корня зуба при поступательном перемещении вдоль оси симметрии  $Ox$  под действием силы  $P = 1$  кг**

Зона	$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$ см			$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$ см				
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
В	0,1	204,5	115,96	95,4	0,1	241,7	136,2	112,6
	0,2	51,26	35,4	30,8	0,2	60,275	41,68	36,3
	0,3	24,16	18,92	15,5	0,3	26,8	20,38	18,24
	0,4	12,8	10,32	9,42	0,4	15,08	12,15	11,08
	0,5	8,2	6,88	6,37	0,5	9,66	8,07	7,49
	0,6	5,7	4,9	4,6	0,6	6,7	5,79	5,42
	0,7	4,19	3,7	3,49	0,7	4,92	4,35	4,1
	0,8	3,2	2,9	2,75	0,8	3,77	3,39	3,23
	0,9	2,53	2,3	2,2	0,9	2,98	2,72	2,6

Продолжение табл. 4.2

Зона	$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3 \text{ см}$				$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3 \text{ см}$			
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
	1	2,05	1,9	1,83	1	2,41	2,23	2,15
	1,1	1,7	1,58	1,54	1,1	1,99	1,86	1,8
	1,2	1,4	1,34	1,3	1,2	1,67	1,58	1,54
	1,3	1,22	1,15	1,13	1,3	1,43	1,36	1,33
	1,4	1,05	1	0,98	1,4	1,23	1,19	1,16
A	1,4	-1,05	-1	-0,98	1,4	-0,88	-0,85	-0,83
	1,3	-1,22	-1,15	-1,13	1,3	-1,02	-0,97	-0,95
	1,2	-1,4	-1,34	-1,3	1,2	-1,2	-1,13	-1,1
	1,1	-1,7	-1,58	-1,54	1,1	-1,42	-1,33	-1,29
	1	-2,05	-1,9	-1,83	1	-1,72	-1,59	-1,54
	0,9	-2,53	-2,3	-2,2	0,9	-2,13	-1,94	-1,86
	0,8	-3,2	-2,9	-2,75	0,8	-2,69	-2,42	-2,3
	0,7	-4,19	-3,7	-3,49	0,7	-3,52	-3,1	-2,94
	0,6	-5,7	-4,9	-4,6	0,6	-4,78	-4,14	-3,87
	0,5	-8,2	-6,88	-6,37	0,5	-6,9	-5,76	-5,35
	0,4	-12,8	-10,32	-9,42	0,4	-10,77	-8,68	-7,92
	0,3	-24,16	-18,92	-15,5	0,3	-19,14	-14,5	-13,9
	0,2	-51,26	-35,4	-30,8	0,2	-43,05	-29,8	-25,9
	0,1	-204,5	-116	-95,4	0,1	-172,7	-97,3	-80,4
B	$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3 \text{ см}$				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3 \text{ см}$			
	$h$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
	0,1	286,3	160	131,6	0,1	334	189	155,4
	0,2	70,7	48,9	42,5	0,2	83,5	57,6	50
	0,3	31,6	23,9	21,3	0,3	36,9	28,12	25,2
	0,4	17,7	14,25	12,96	0,4	20,8	16,79	15,3
	0,5	11,3	9,5	8,77	0,5	13,36	11,19	10,3
	0,6	7,86	6,79	6,35	0,6	9,29	8	7,47
	0,7	5,78	5,1	4,81	0,7	6,85	6	5,7
	0,8	4,42	3,98	3,78	0,8	5,2	4,7	4,45
	0,9	3,5	3,19	3,05	0,9	4,13	3,76	3,6
	1	2,84	2,62	2,52	1	3,34	3,08	2,97
	1,1	2,34	2,18	2,1	1,1	2,75	2,57	2,49
	1,2	1,96	1,86	1,8	1,2	2,32	2,18	2,12
	1,3	1,67	1,59	1,55	1,3	1,97	1,88	1,83
	1,4	1,45	1,38	1,35	1,4	1,7	1,63	1,6
	A	1,4	-0,725	-0,69	-0,68	1,4	-0,567	-0,54
1,3		-0,835	-0,79	-0,78	1,3	-0,657	-0,68	-0,61
1,2		-0,98	-0,93	-0,9	1,2	-0,772	-0,73	-0,707
1,1		-1,17	-1,09	-1,06	1,1	-0,918	-0,86	-0,83
1		-1,42	-1,31	-1,26	1	-1,11	-1,03	-0,99
0,9		-1,75	-1,598	-1,53	0,9	-1,38	-1,25	-1,2
0,8		-2,21	-1,99	-1,89	0,8	-1,73	-1,57	-1,48
0,7		-2,89	-2,55	-2,4	0,7	-2,28	-2	-1,9

Зона	$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$ см			
	$h$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
	0,6	-3,93	-3,4	-3,17	0,6	-3,09	-2,67	-2,49
	0,5	-5,65	-4,75	-4,38	0,5	-4,45	-3,73	-3,44
	0,4	-8,85	-7,12	-6,48	0,4	-6,94	-5,6	-5,1
	0,3	-15,8	-11,97	-10,7	0,3	-12,3	-9,38	-8,4
	0,2	-35,36	-24,44	-21,2	0,2	-27,8	-19,2	-16,7
	0,1	-143	-80	-65,8	0,1	-111,3	-63	-51,8

Представим числовые данные табл. 4.2 в виде зависимостей напряжений  $\sigma_n$  от высоты корня зуба  $h$  (значения напряжений приведены в  $\text{кг}/\text{см}^2$ , высота корня в см). Результаты построения приведены на рис. 4.8–4.14.

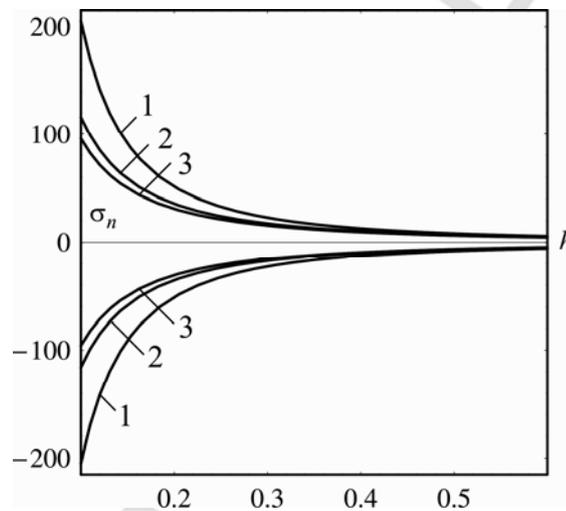


Рис. 4.8. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см для радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

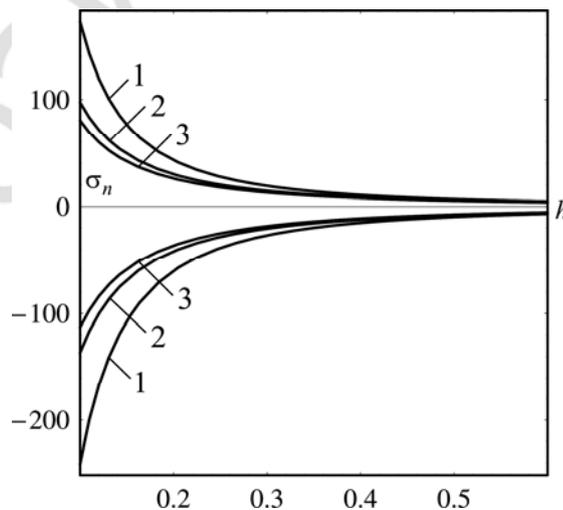


Рис. 4.9. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$  см для радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

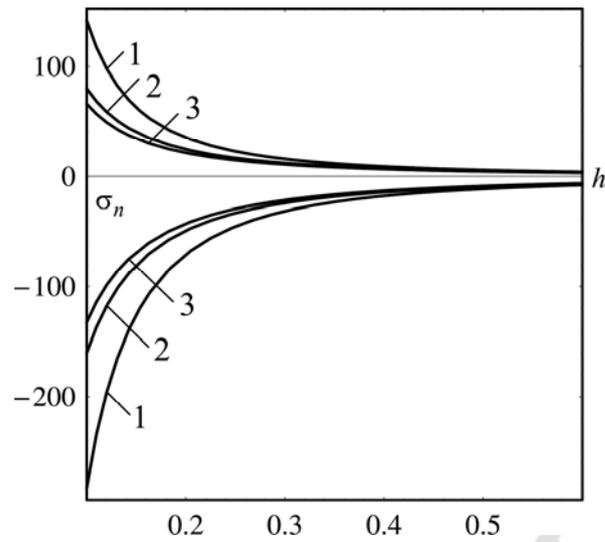


Рис. 4.10. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  см для радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

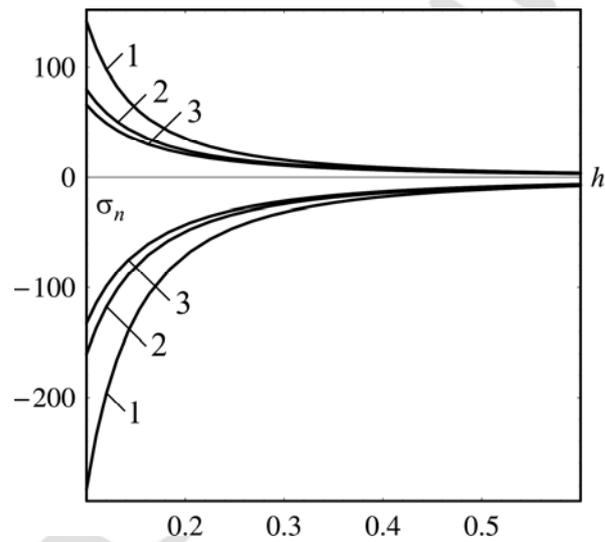


Рис. 4.11. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  см для радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

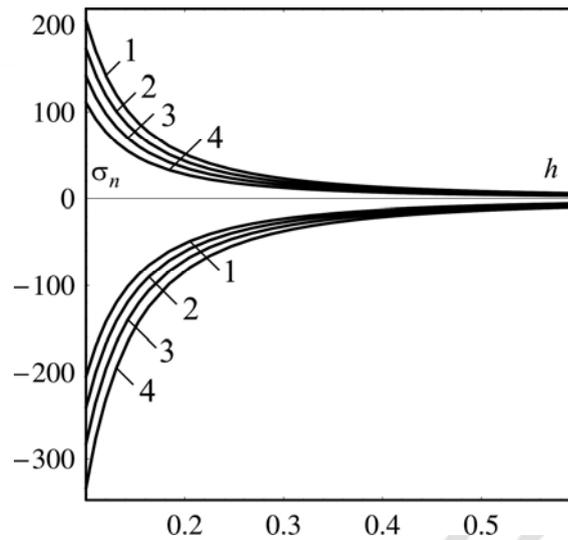


Рис. 4.12. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$  см;  
 3 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$  см; 4 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  см

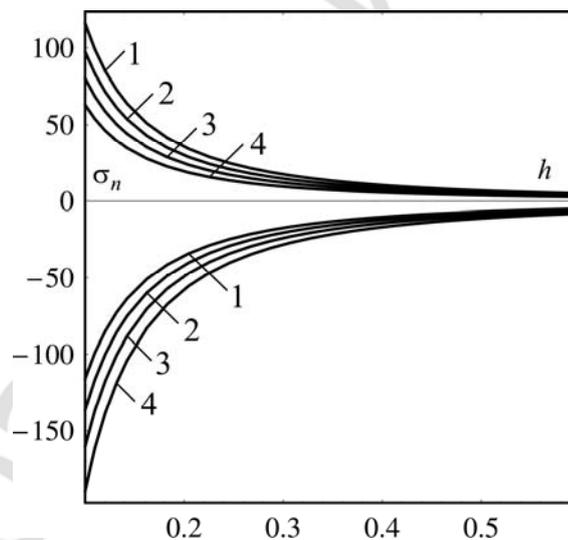


Рис. 4.13. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,1$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$  см;  
 3 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$  см; 4 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  см

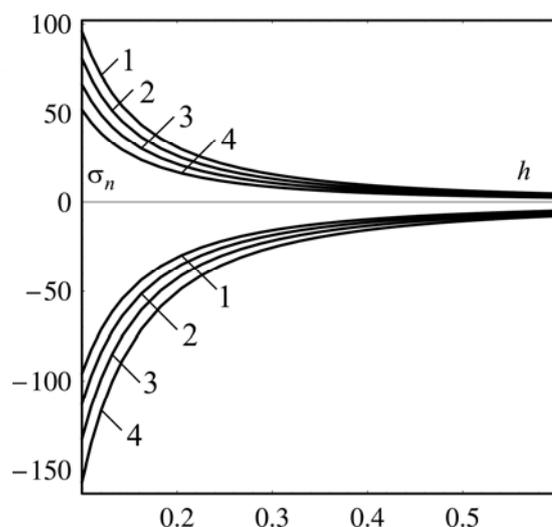


Рис. 4.14. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n < 0$  при  $\theta = 0$  и  $\sigma_n > 0$  при  $\theta = \pi$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,2$  для различных параметров поперечного сечения корня:

- 1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$  см;  
 3 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$  см; 4 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  см

В частности, табл. 4.2 и рис. 4.8–4.14 показывает, что закругление вершины корня зуба уменьшает нормальные напряжения при любой степени атрофии, а овальность только перераспределяет их, а именно, увеличивает их на стороне с меньшим значением полуоси эллипса  $a_{k0}$  и уменьшает на стороне с большой полуосью. Этот, парадоксальный на первый взгляд, факт, свидетельствующий о том, что нормальные напряжения на тупой стороне поперечного сечения больше, чем на заостренной стороне профиля корня зуба, объясняется возникновением касательных напряжений, перераспределяющих нормальные напряжения в данной области. Это перераспределение нормальных напряжений в зонах А (зона давления) и В (зона растяжения) следует из табл. 4.2 и соответствующих ему зависимостей нормальных напряжений от высоты корня зуба.

Закругление вершины корня зуба способствует уменьшению нормальных напряжений тем больше, чем больше степень атрофии костной ткани. В частности, при  $a_{10} = 0,2$  см,  $a_{20} = 0,4$  см,  $b_0 = 0,3$  см в случае 50 % атрофии при  $l_0 = 0$  нормальные увеличиваются в 4 раза, при  $l_0 = 0,1$  — в 3,7 раза, при  $l_0 = 0,2$  — в 3,56 раза.

Аналогично, выясняется влияние закругления и при других степенях атрофии. В случае 78,5 % степени атрофии в том же примере имеем: при  $l_0 = 0$  увеличение нормальных напряжений в 21,8 раза, при  $l_0 = 0,1$  — в 17,3 раза, при  $l_0 = 0,2$  — в 15,8 раза. Таким образом, при больших степенях атрофии влияние закругления существенное. Наоборот, при малой степени атрофии имеем слабое влияние закругления. Например, при 28,5 % степени атрофии для  $l_0 = 0$  нормальные напряжения увеличиваются в 1,96 раза, при  $l_0 = 0,1$  — в 1,9 раза, при  $l_0 = 0,2$  — в 1,87 раза.

В табл. 4.3 представлены результаты расчета касательных напряжений  $\tau_{ns}$ , возникающих в периодонте при поступательных перемещениях корня вдоль оси  $Ox$  под действием силы  $P = 1$  кг.

Таблица 4.3

Зависимости касательных напряжений вдоль образующей от степени атрофии костной ткани и параметров корня зуба при поступательном перемещении вдоль оси симметрии  $Ox$  под действием силы  $P = 1$  кг

Зона	Геометрические параметры, характеризующие корень зуба							
	$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$ см			
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
В	0,1	18,08	11,03	9,8	0,1	17,73	10,8	9,79
	0,2	4,52	3,1	2,77	0,2	4,43	3,04	2,72
	0,3	2	1,64	1,32	0,3	1,97	1,45	1,29
	0,4	1,13	0,87	0,778	0,4	1,108	0,85	0,763
	0,5	0,723	0,576	0,517	0,5	0,709	0,56	0,507
	0,6	0,502	0,41	0,37	0,6	0,493	0,403	0,363
	0,7	0,369	0,308	0,279	0,7	0,362	0,302	0,274
	0,8	0,283	0,24	0,213	0,8	0,277	0,235	0,214
	0,9	0,223	0,192	0,177	0,9	0,219	0,188	0,172
	1	0,181	0,157	0,144	1	0,177	0,154	0,142
	1,1	0,149	0,131	0,121	1,1	0,147	0,129	0,119
	1,2	0,126	0,111	0,103	1,2	0,123	0,109	0,101
	1,3	0,107	0,096	0,089	1,3	0,105	0,094	0,087
	1,4	0,092	0,083	0,077	1,4	0,09	0,083	0,076
А	1,4	-0,092	-0,083	-0,077	1,4	-0,09	-0,083	-0,076
	1,3	-0,107	-0,096	-0,089	1,3	-0,105	-0,094	-0,087
	1,2	-0,126	-0,111	-0,103	1,2	-0,123	-0,109	-0,101
	1,1	-0,149	-0,131	-0,121	1,1	-0,147	-0,129	-0,119
	1	-0,181	-0,157	-0,144	1	-0,177	-0,154	-0,142
	0,9	-0,223	-0,192	-0,177	0,9	-0,219	-0,188	-0,172
	0,8	-0,283	-0,24	-0,213	0,8	-0,277	-0,235	-0,214
	0,7	-0,369	-0,308	-0,279	0,7	-0,362	-0,302	-0,274
	0,6	-0,502	-0,41	-0,37	0,6	-0,493	-0,403	-0,363
	0,5	-0,723	-0,576	-0,517	0,5	-0,709	-0,56	-0,507
	0,4	-1,13	-0,87	-0,778	0,4	-1,108	-0,85	-0,763
	0,3	-2	-1,64	-1,32	0,3	-1,97	-1,45	-1,29
	0,2	-4,52	-3,1	-2,77	0,2	-4,43	-3,04	-2,72
	0,1	-18,08	-11,03	-9,8	0,1	-17,73	-10,8	-9,79
В	$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$ см			
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
	0,1	16,65	10,16	9,15	0,1	14,7	8,99	8,11
	0,2	4,16	2,85	2,54	0,2	3,68	2,52	2,25
	0,3	1,85	1,36	1,21	0,3	1,63	1,2	1,07
	0,4	1,04	0,8	0,714	0,4	0,92	0,707	0,631
	0,5	0,666	0,53	0,475	0,5	0,588	0,468	0,419
	0,6	0,462	0,379	0,34	0,6	0,408	0,334	0,3
0,7	0,34	0,283	0,257	0,7	0,3	0,25	0,226	

Зона	Геометрические параметры, характеризующие корень зуба							
	$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$ см			
	$h, \text{см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
В	0,8	0,26	0,22	0,2	0,8	0,23	0,195	0,177
	0,9	0,206	0,177	0,161	0,9	0,182	0,156	0,142
	1	0,167	0,145	0,133	1	0,147	0,128	0,117
	1,1	0,138	0,121	0,111	1,1	0,122	0,107	0,098
	1,2	0,116	0,102	0,094	1,2	0,102	0,09	0,083
	1,3	0,099	0,088	0,081	1,3	0,087	0,078	0,072
	1,4	0,085	0,076	0,071	1,4	0,075	0,067	0,063
	А	1,4	-0,085	-0,076	-0,071	1,4	-0,075	-0,067
1,3		-0,099	-0,088	-0,081	1,3	-0,087	-0,078	-0,072
1,2		-0,116	-0,102	-0,094	1,2	-0,102	-0,09	-0,083
1,1		-0,138	-0,121	-0,111	1,1	-0,122	-0,107	-0,098
1		-0,167	-0,145	-0,133	1	-0,147	-0,128	-0,117
0,9		-0,206	-0,177	-0,161	0,9	-0,182	-0,156	-0,142
0,8		-0,26	-0,22	-0,2	0,8	-0,23	-0,195	-0,177
0,7		-0,34	-0,283	-0,257	0,7	-0,3	-0,25	-0,226
0,6		-0,462	-0,379	-0,34	0,6	-0,408	-0,334	-0,3
0,5		-0,666	-0,53	-0,475	0,5	-0,588	-0,468	-0,419
0,4		-1,04	-0,8	-0,714	0,4	-0,92	-0,707	-0,631
0,3		-1,85	-1,36	-1,21	0,3	-1,63	-1,2	-1,07
0,2	-4,16	-2,85	-2,54	0,2	-3,68	-2,52	-2,25	
0,1	-16,65	-10,16	-9,15	0,1	-14,7	-8,99	-8,11	

Результаты таблицы в виде зависимостей  $\tau_{ns}$  от высоты корня зуба представлены на рис. 4.15–4.21 (значения напряжений приведены в  $\text{кг/см}^2$ , высота корня в см).

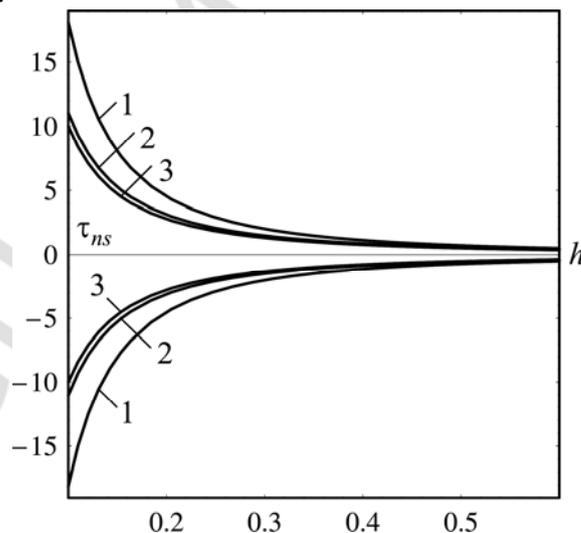


Рис. 4.15. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

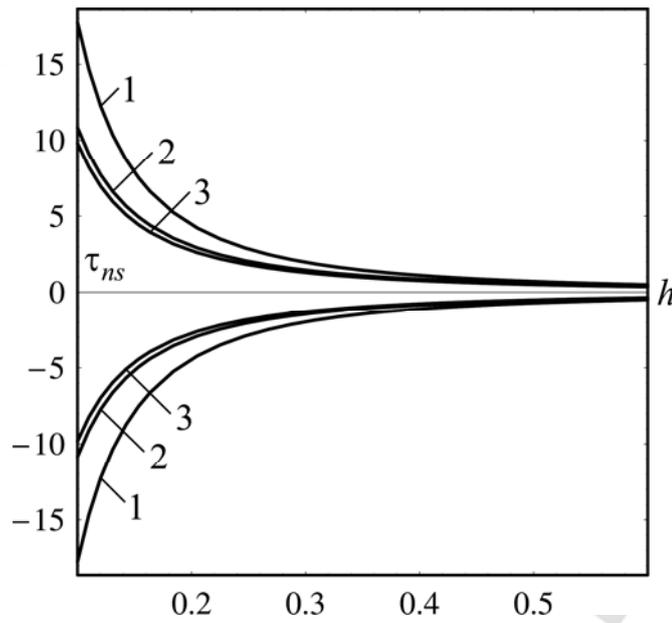


Рис. 4.16. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

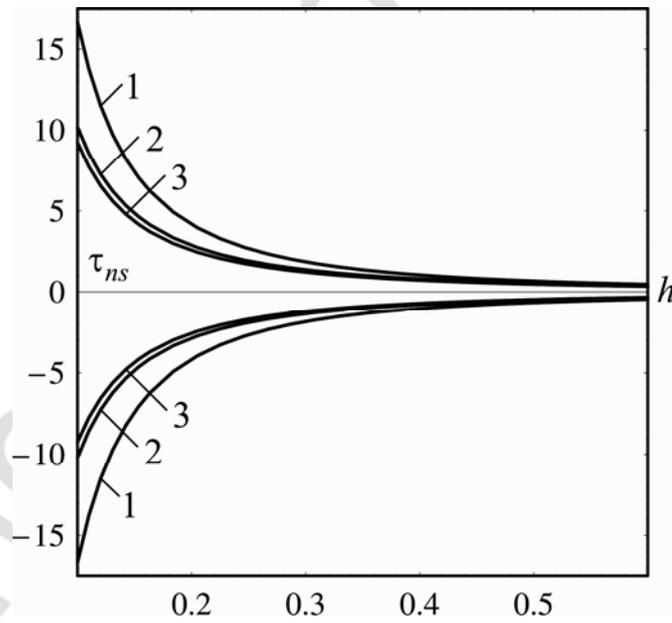


Рис. 4.17. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

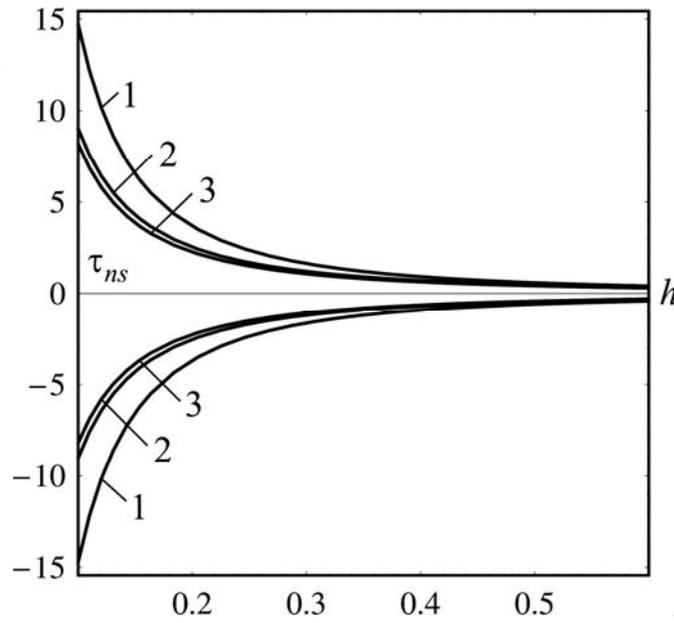


Рис. 4.18. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

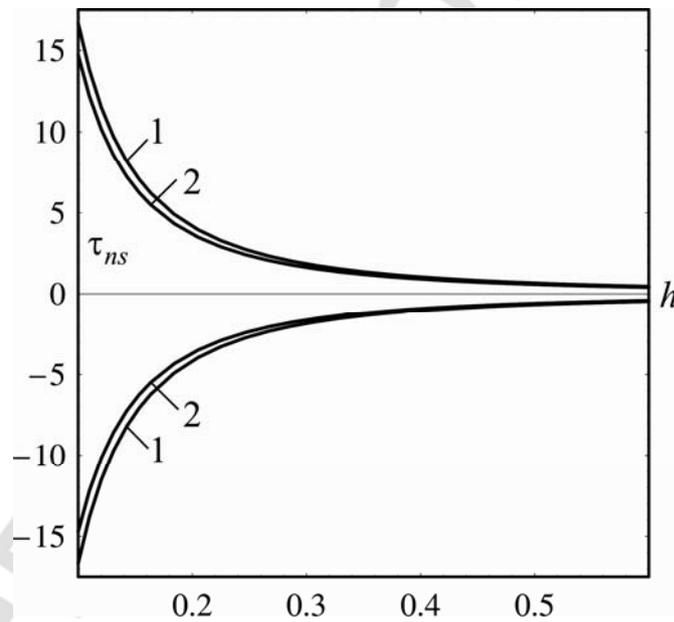


Рис. 4.19. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
1 —  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$

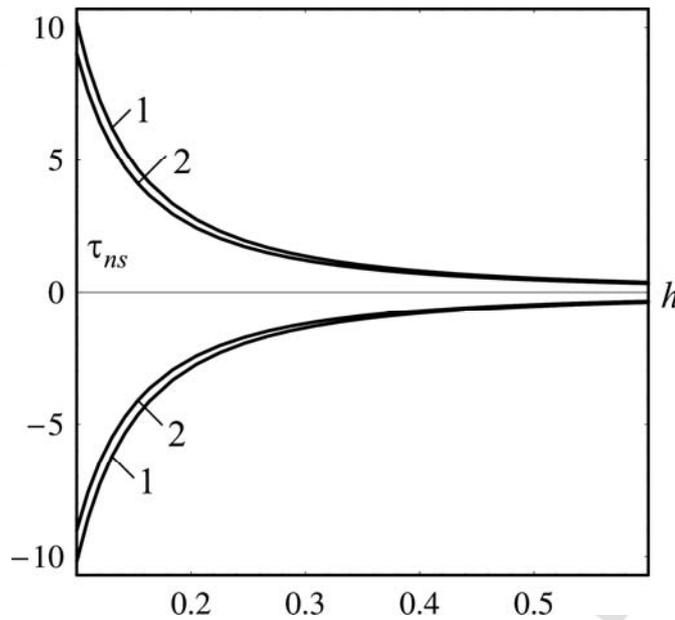


Рис. 4.20. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,1$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$

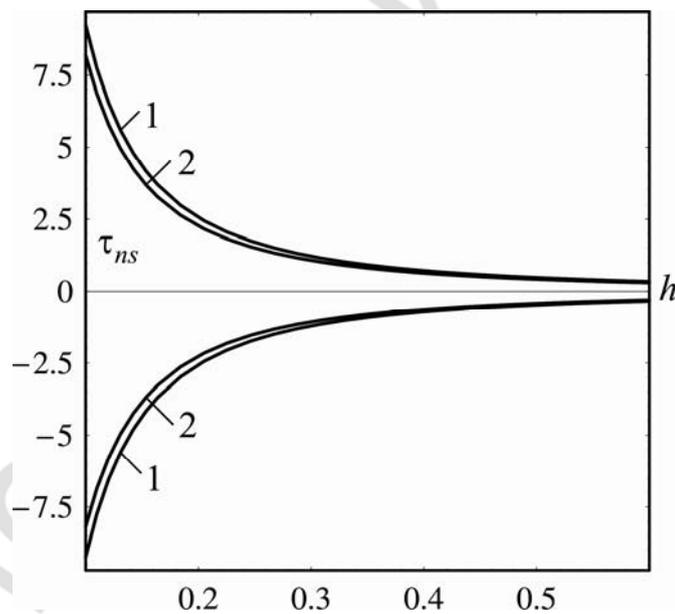


Рис. 4.21. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns} < 0$  при  $\theta = \pi$  и  $\tau_{ns} > 0$  при  $\theta = 0$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,2$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$

Из результатов, представленных в табл. 4.3 и зависимостей, показанных на рис. 4.15–4.21, видно, что, значения касательных напряжений  $\tau_{ns}$  на порядок меньше, чем нормальные напряжения при одной и той же нагрузке и степени атрофии. Их значения в точках А и В одинаковые, но

с различными знаками. Влияние закругления вершины корня зуба такое же, как и для нормальных напряжений, т. е. с увеличением радиуса закругления величина касательных напряжений  $\tau_{ns}$  уменьшается. Наличие овальности контура ( $a_{10} \neq a_{20}$ ) способствует уменьшению напряжений  $\tau_{ns}$  как для модели эллиптического гиперboloида ( $l_0 \neq 0$ ), так и для модели эллиптического конуса ( $l_0 = 0$ ).

Касательные напряжения  $\tau_{n\theta}$  вдоль направляющей в среднем в три раза меньше нормальных напряжений  $\sigma_n$  и в среднем в 5 раз больше касательных напряжений вдоль образующей  $\tau_{ns}$ . Касательные напряжения вдоль направляющей  $\tau_{n\theta}$  в зонах А и В отличаются лишь своими знаками. При отсутствии закругления напряжения обратно пропорциональны квадрату рабочей высоты корня. При наличии закругления, как указывалось выше, увеличение напряжений  $\tau_{n\theta}$  с увеличением степени атрофии не столь значительно, как при отсутствии закругления. Чем больше несимметричность профиля, тем меньше значения напряжений  $\tau_{n\theta}$ , хотя влияние несимметричности незначительно. Результаты расчета касательных напряжений при поступательном горизонтальном перемещении корня зуба вдоль оси  $Ox$  под действием силы  $P = 1$  кг для различных геометрических характеристик корня зуба приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

**Зависимости касательных напряжений вдоль направляющей  $\tau_{n\theta}$  от степени атрофии костной ткани и параметров корня зуба при поступательном горизонтальном перемещении вдоль оси симметрии  $Ox$  под действием силы  $P = 1$  кг**

Зона	$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$ см			
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
В	0,1	86,3	48,9	40,6	0,1	84,64	47,97	39,8
	0,2	21,58	14,9	12,99	0,2	21,16	14,62	12,74
	0,3	9,59	7,96	6,52	0,3	9,4	7,14	6,39
	0,4	5,39	4,34	3,96	0,4	5,29	4,26	3,88
	0,5	3,45	2,89	2,67	0,5	3,39	2,83	2,62
	0,6	2,4	2,07	1,93	0,6	2,35	2,03	1,89
	0,7	1,76	1,55	1,47	0,7	1,73	1,52	1,44
	0,8	1,35	1,21	1,15	0,8	1,32	1,19	1,13
	0,9	1,07	0,97	0,93	0,9	1,04	0,95	0,91
	1	0,863	0,798	0,77	1	0,846	0,782	0,752
	1,1	0,713	0,665	0,644	1,1	0,7	0,652	0,632
	1,2	0,6	0,565	0,549	1,2	0,588	0,554	0,538
	1,3	0,51	0,485	0,473	1,3	0,501	0,476	0,464
	1,4	0,44	0,42	0,41	1,4	0,43	0,42	0,4
А	1,4	-0,44	-0,42	-0,41	1,4	-0,43	-0,42	-0,4
	1,3	-0,51	-0,485	-0,473	1,3	-0,501	-0,476	-0,464
	1,2	-0,6	-0,565	-0,549	1,2	-0,588	-0,554	-0,538
	1,1	-0,713	-0,665	-0,644	1,1	-0,7	-0,652	-0,632
	1	-0,863	-0,798	-0,77	1	-0,846	-0,782	-0,752

Зона	$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$ см			
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
А	0,9	-1,07	-0,97	-0,93	0,9	-1,04	-0,95	-0,91
	0,8	-1,35	-1,21	-1,15	0,8	-1,32	-1,19	-1,13
	0,7	-1,76	-1,55	-1,47	0,7	-1,73	-1,52	-1,44
	0,6	-2,4	-2,07	-1,93	0,6	-2,35	-2,03	-1,89
	0,5	-3,45	-2,89	-2,67	0,5	-3,39	-2,83	-2,62
	0,4	-5,39	-4,34	-3,96	0,4	-5,29	-4,26	-3,88
	0,3	-9,59	-7,96	-6,52	0,3	-9,4	-7,14	-6,39
	0,2	-21,58	-14,9	-12,99	0,2	-21,16	-14,62	-12,74
	0,1	-86,3	-48,9	-40,6	0,1	-84,64	-47,97	-39,8
В	$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$ см			
	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
	0,1	79,45	45,07	37,24	0,1	70,17	39,88	33,02
	0,2	19,83	13,73	11,92	0,2	17,54	12,13	10,54
	0,3	8,83	6,7	5,98	0,3	7,8	5,92	5,29
	0,4	4,97	4	3,63	0,4	4,39	3,53	3,21
	0,5	3,18	2,66	2,45	0,5	2,81	2,35	2,17
	0,6	2,21	1,9	1,77	0,6	1,95	1,68	1,57
	0,7	1,62	1,43	1,35	0,7	1,43	1,26	1,19
	0,8	1,24	1,11	1,06	0,8	1,1	0,985	0,934
	0,9	0,98	0,895	0,854	0,9	0,866	0,79	0,754
	1	0,795	0,734	0,704	1	0,702	0,648	0,622
	1,1	0,657	0,612	0,59	1,1	0,58	0,541	0,522
	1,2	0,552	0,52	0,504	1,2	0,487	0,459	0,445
	1,3	0,47	0,446	0,434	1,3	0,415	0,394	0,384
1,4	0,41	0,39	0,379	1,4	0,358	0,342	0,334	
А	1,4	-0,41	-0,39	-0,379	1,4	-0,358	-0,342	-0,334
	1,3	-0,47	-0,446	-0,434	1,3	-0,415	-0,394	-0,384
	1,2	-0,552	-0,52	-0,504	1,2	-0,487	-0,459	-0,445
	1,1	-0,657	-0,612	-0,59	1,1	-0,58	-0,541	-0,522
	1	-0,795	-0,734	-0,704	1	-0,702	-0,648	-0,622
	0,9	-0,98	-0,895	-0,854	0,9	-0,866	-0,79	-0,754
	0,8	-1,24	-1,11	-1,06	0,8	-1,1	-0,985	-0,934
	0,7	-1,62	-1,43	-1,35	0,7	-1,43	-1,26	-1,19
	0,6	-2,21	-1,9	-1,77	0,6	-1,95	-1,68	-1,57
	0,5	-3,18	-2,66	-2,45	0,5	-2,81	-2,35	-2,17
	0,4	-4,97	-4	-3,63	0,4	-4,39	-3,53	-3,21
	0,3	-8,83	-6,7	-5,98	0,3	-7,8	-5,92	-5,29
	0,2	-19,83	-13,73	-11,92	0,2	-17,54	-12,13	-10,54
0,1	-79,45	-45,07	-37,24	0,1	-70,17	-39,88	-33,02	

Представим числовые результаты табл. 4.4 в виде зависимостей касательных напряжений  $\tau_{n0}$  от рабочей высоты корня зуба  $h$  (напряжения

измеряются в  $\text{кг/см}^2$ , высота задана в см). Результаты построения представлены на рис. 4.22–4.28.

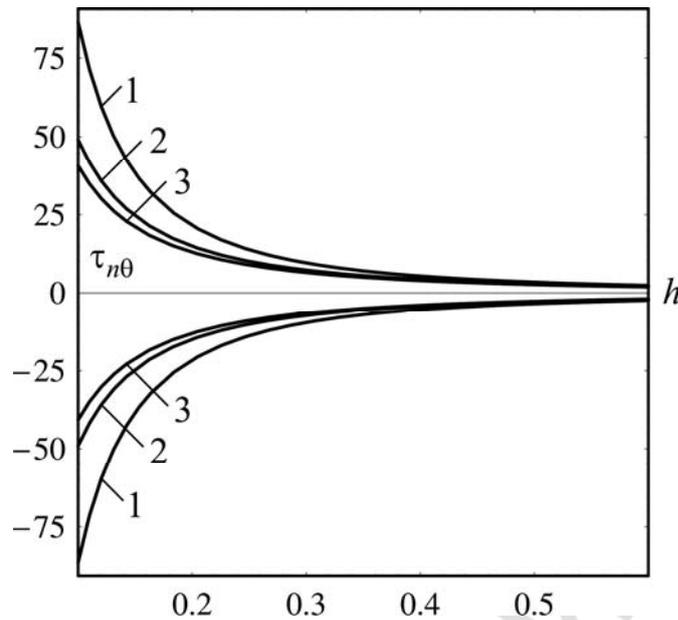


Рис. 4.22. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

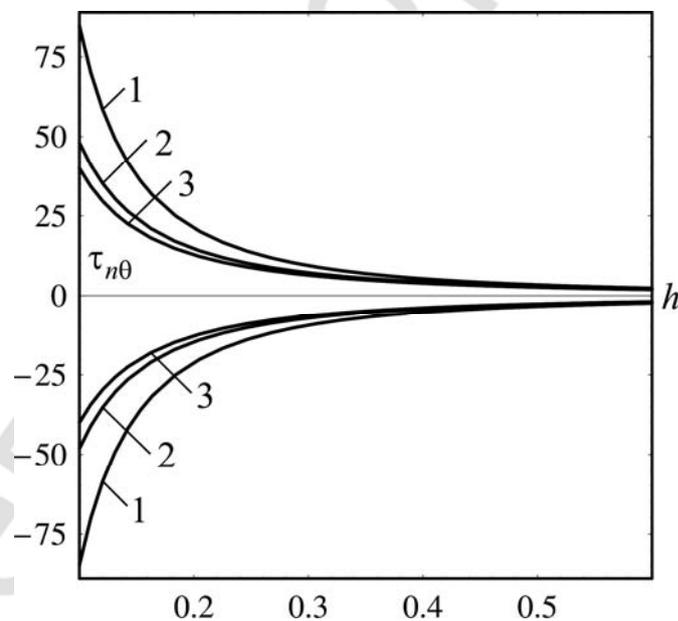


Рис. 4.23. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

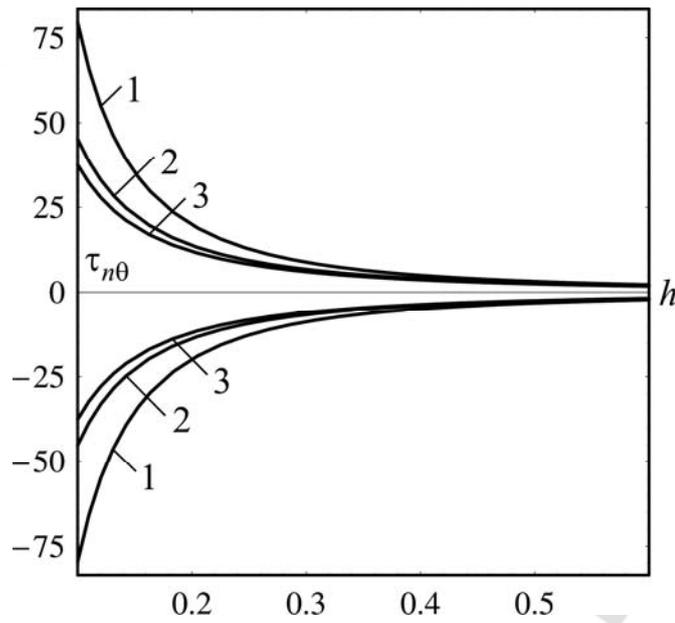


Рис. 4.24. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

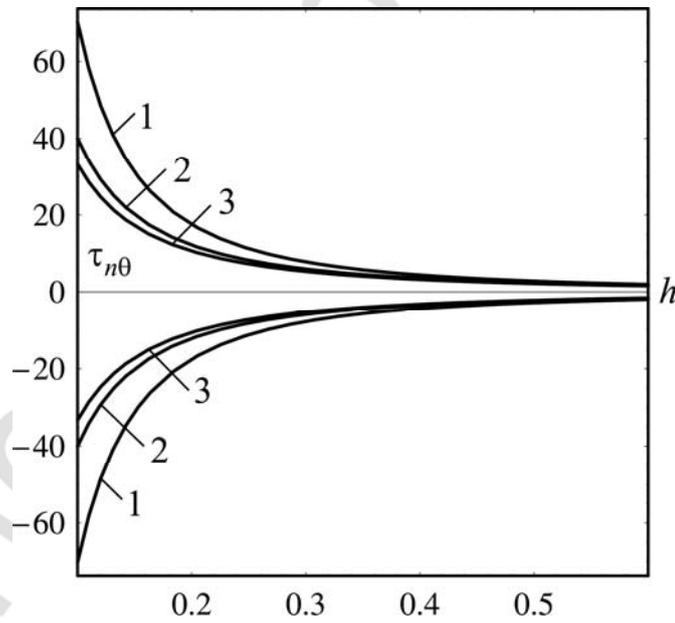


Рис. 4.25. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты зуба при  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  для радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

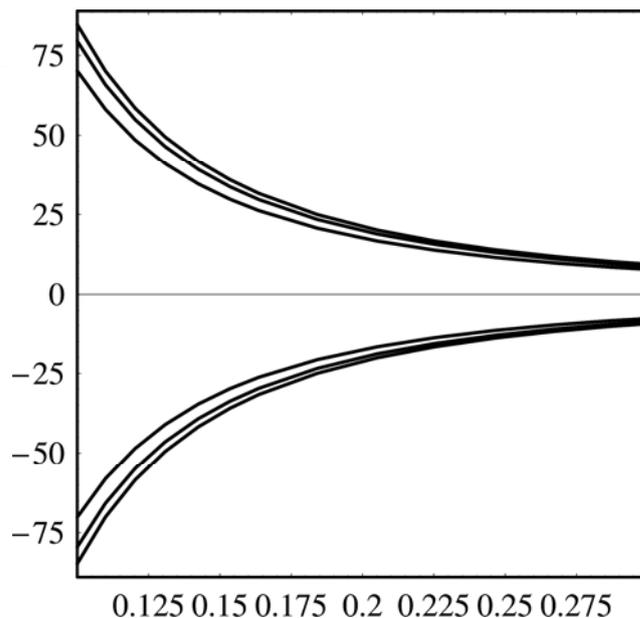


Рис. 4.26. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$

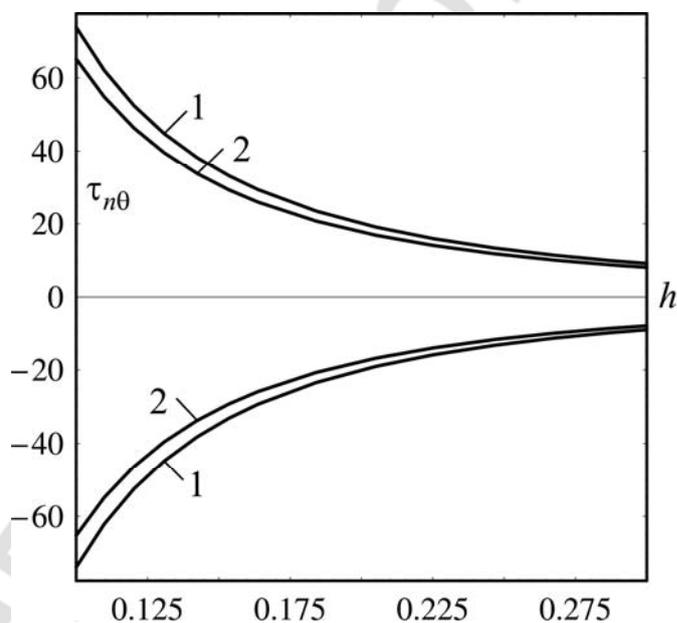


Рис. 4.27. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,1$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$

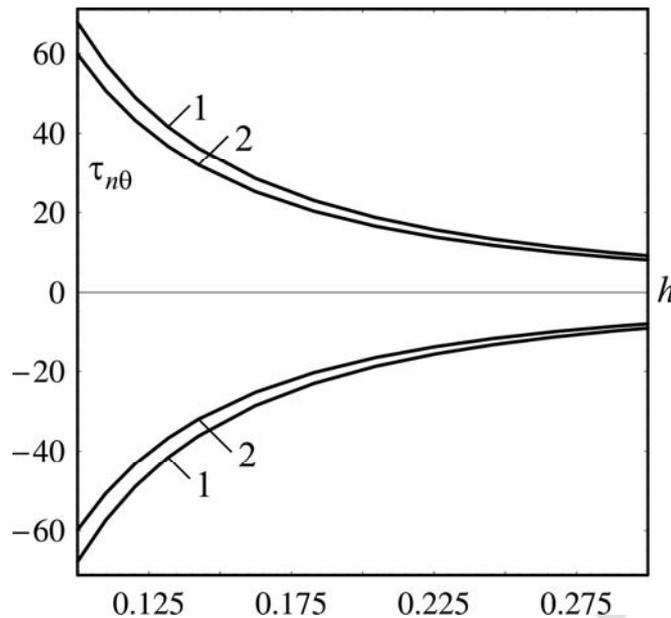


Рис. 4.28. Зависимость касательных напряжений  $\tau_{n\theta} < 0$  при  $\theta = -\pi/2$  и  $\tau_{n\theta} > 0$  при  $\theta = \pi/2$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,2$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ ; 2 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$

Заметим, что зависимость касательных напряжений  $\tau_{ns}$  и  $\tau_{n\theta}$  от рабочей высоты корня зуба для геометрических параметров  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  и  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  для значений  $l_0 = 0, l_0 = 0,1$  и  $l_0 = 0,2$  совпадают с зависимостями 1, представленными на рис. 4.19–4.21 и рис. 4.26–4.28 соответственно.

Суммарные напряжения в точках А и В вычисляются по формуле:

$$t = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_{ns}^2 + \tau_{n\theta}^2}.$$

В частности при горизонтальной силе в 1 кг суммарное напряжение  $t$  при  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  и  $l_0 = 0$  в точке А при норме составляет  $1,7 \text{ кг/см}^2$ .

Принимая во внимание данные Г. П. Соснина [91] о возникновении болевого ощущения при суммарном напряжении  $t = 2,7 \text{ кг/см}^2$ , можно утверждать, что горизонтальная сила может достичь значения, равного  $15,9 \text{ кг}$ , при котором в зоне давления А могут возникнуть болевые ощущения.

## Глава 5

### Исследование жесткости и напряженно-деформированного состояния периодонта в области контакта с корнем зуба при поступательном перемещении вдоль вертикальной оси OZ

При поступательном перемещении корня зуба под действием силы, действующей вдоль оси аппликат, формулы для нормальных и касательных напряжений, а также жесткости принимают следующий вид:

$$\sigma_n = \frac{\gamma GP_z}{h_0 c_x}, \quad (5.1)$$

$$\tau_{ns} = \frac{GP_z \sqrt{(z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2)}}{h_0 c_z z} \times \quad (5.2)$$

$$\times \frac{\sqrt{(z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2) \left( \frac{\cos^2(\theta)}{a_{k0}^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b_0^2} \right) + z^2}}{\sqrt{z^2 (a_{k0}^2 \cos^2(\theta) + b_0^2 \sin^2(\theta)) + (z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2)}},$$

$$c_z = \frac{\pi b_0 G (a_{10} + a_{20})}{2h_0} \left( h(h + 2l_0) \left( \frac{1}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{\gamma}{H_0^2 - l_0^2} \right) - \right. \quad (5.3)$$

$$\left. - l_0^2 \left( \frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{a_{10}a_{20}} \right) \ln \left( 1 + \frac{h}{l_0} \right) \right),$$

$$\tau_{n\theta} = \frac{GP_z \sqrt{z^2 - l_0^2} \sin(2\theta) (a_{k0}^2 - b_0^2) \sqrt{H_0^2 - l_0^2}}{2a_{k0}b_0h_0c_z \sqrt{z^2 (a_{k0}^2 \cos^2(\theta) + b_0^2 \sin^2(\theta)) + (H_0^2 - l_0^2)(z^2 - l_0^2)}}, \quad (5.4)$$

$$\tau_{ns} = \frac{GP_z \sqrt{(z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2)}}{h_0 c_z (l_0 + h)} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{(z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2) \left( \frac{\cos^2(\theta)}{a_{k0}^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b_0^2} \right) + z^2}}{\sqrt{z^2 (a_{k0}^2 \cos^2(\theta) + b_0^2 \sin^2(\theta)) + (z^2 - l_0^2)(H_0^2 - l_0^2)}}. \quad (5.5)$$

Из формулы (5.1) следует, что нормальные напряжения не зависят от угла  $\theta$  и постоянны для всех точек области соединения периодонта и корня зуба.

При  $z = l_0 + h$  из выражений (5.4), (5.5) получим соотношения для касательных напряжений у верхнего края периодонта.

$$\tau_{ns} = \frac{GP_z \sqrt{h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}}{h_0 c_z (l_0 + h)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2) \left( \frac{\cos^2(\theta)}{a_{k0}^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{b_0^2} \right) + (l_0 + h)^2}{2(l_0 + h)(a_{k0}^2 \cos^2 \theta + b_0^2 \sin^2 \theta) + (h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}},$$

$$\tau_{n\theta} = \frac{GP_z (a_{k0}^2 - b_0^2) \sqrt{h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)} \sin 2(\theta)}{2a_{k0} b_0 h_0 c_z \sqrt{(l_0 + h)^2 (a_{k0}^2 \cos^2(\theta) + b_0^2 \sin^2(\theta)) + h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}}.$$

Касательные напряжения вдоль образующей  $\tau_{ns}$  обращаются в нуль только в вершине корня зуба, а максимальные значения принимают у верхнего края периодонта при  $z = l_0 + h$  для четырех значений угла  $\theta$ :

$$\tau_{ns}|_{\theta=0} = \frac{GP_z \sqrt{h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}}{a_{10} h_0 c_z (l_0 + h)}$$

$$\tau_{ns}|_{\theta=\pi} = \frac{GP_z \sqrt{h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}}{a_{20} h_0 c_z (l_0 + h)},$$

$$\tau_{ns}|_{\theta=\pm\pi/2} = \frac{GP_z \sqrt{h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}}{b_0 h_0 c_z (l_0 + h)}.$$

Касательные напряжения вдоль направляющей  $\tau_{n\theta}$  также обращаются в нуль в вершине корня зуба ( $z = l_0$ ). Кроме того, касательные напряжения  $\tau_{n\theta}$  равны нулю для углов  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = -\pi/2$ . Определим наибольшие и наименьшие значения напряжений  $\tau_{n\theta}$ , соответствующие точкам  $\theta = \pm\pi/4$  и  $\theta = \pm3\pi/4$ :

$$\tau_{n\theta}|_{\theta=\pm\pi/4} = \pm \frac{GP_z (a_{10}^2 - b_0^2) \sqrt{h_H h (h+2l_0) (h_H + 2l_0)}}{a_{10} b_0 h_0 c_z \sqrt{0,5(l_0 + h)^2 (a_{10}^2 + b_0^2) + h(h+2l_0)(H_0^2 - l_0^2)}},$$

$$\tau_{n0}|_{\theta=\pm 3\pi/4} = - \frac{GP_z (a_{20}^2 - b_0^2) \sqrt{h_H h (h + 2l_0) (h_H + 2l_0)}}{a_{20} b_0 h_0 c_z \sqrt{\frac{(l_0 + h)^2}{2} (a_{10}^2 + b_0^2) + (h + 2l_0) (H_0^2 - l_0^2)}}.$$

Для количественного исследования напряженно-деформированного состояния периодонта под действием вертикальной силы рассмотрим зависимость жесткости  $c_z$  от степени атрофии костной ткани и геометрических параметров корня зуба. В табл. 5.1 представлены значения жесткости  $c_z$ , рассчитанные для различных значений  $h$  при различной степени асимметрии профиля сечения. При проведении вычислений принимаем  $\nu = 0,15$ ,  $G = 46,545 \text{ кг/см}^2$ ,  $h_0 = 0,12 \text{ см}$ .

Таблица 5.1

**Значения жесткости  $c_z$  при поступательном перемещении вдоль вертикальной оси Oz от степени атрофии костной ткани и параметров корня зуба**

$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3 \text{ см}$				$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3 \text{ см}$			
$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
0,1	13,52	23,18	26,63	0,1	13,69	23,46	26,94
0,2	54,07	80,06	91,16	0,2	54,76	81,07	92,28
0,3	121,66	166,5	188,39	0,3	123,22	168,62	190,76
0,4	216,28	281,2	316,03	0,4	219,06	284,81	320,06
0,5	337,93	423,59	472,84	0,5	342,28	429,05	478,91
0,6	486,62	543,37	658,09	0,6	492,88	601,03	666,58
0,7	662,35	790,33	871,3	0,7	670,86	800,56	882,58
0,8	865,11	1014,38	1112,15	0,8	876,23	1027,52	1126,59
0,9	1094,9	1265,43	1380,41	0,9	1108,98	1281,83	1398,37
1	1351,73	1543,41	1675,91	1	1369,11	1563,43	1697,75
1,1	1635,6	1848,29	1998,53	1,1	1656,62	1872,27	2024,59
1,2	1946,49	2180,04	2348,15	1,2	1971,51	2208,34	2378,8
1,3	2284,43	2538,63	2724,7	1,3	2313,79	2571,59	2825,96
1,4	2649,39	2924,04	3128,11	1,4	2683,45	2962,02	3169
$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3 \text{ см}$				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3 \text{ см}$			
$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
0,1	14,28	24,41	27,97	0,1	15,54	26,46	30,19
0,2	57,11	84,47	96,06	0,2	62,18	91,82	101,32
0,3	128,5	175,79	198,78	0,3	139,9	187,79	216,1
0,4	228,44	297	323,16	0,4	248,7	323,32	363,07
0,5	356,93	447,47	499,42	0,5	388,6	487,27	543,73
0,6	513,99	626,89	695,26	0,6	559,6	682,77	757,22
0,7	699,59	835,06	920,68	0,7	761,7	909,6	1002,98
0,8	913,75	1071,85	1175,33	0,8	994,8	1167,62	1280,63
0,9	1156,47	1337,18	1458,98	0,9	1259,1	1456,75	1589,91
1	1427,74	1630,98	1771,43	1	1554,4	1776,92	1930,62
1,1	1727,56	1953,21	2112,56	1,1	1880,8	2128,06	2302,61
1,2	2055,94	2303,84	2482,25	1,2	2238,4	2510,16	2705,75
1,3	2412,88	2682,84	2880,42	1,3	2626,9	2923,17	3139,96
1,4	2798,37	3090,18	3307	1,4	3046,7	3367,08	3605,16

Зависимости жесткости  $c_z$  от рабочей высоты корня зуба  $h$  при отсутствии и наличии закругления для различных значений параметров, описывающих геометрическую форму корня зуба, представлены на рис. 5.1–5.7 (значения жесткости приведены в кг/см, рабочей высоты в см). При построении принимаем  $\nu = 0,15$ ,  $G = 46,545 \text{ кг/см}^2$ ,  $h_0 = 0,12 \text{ см}$ .

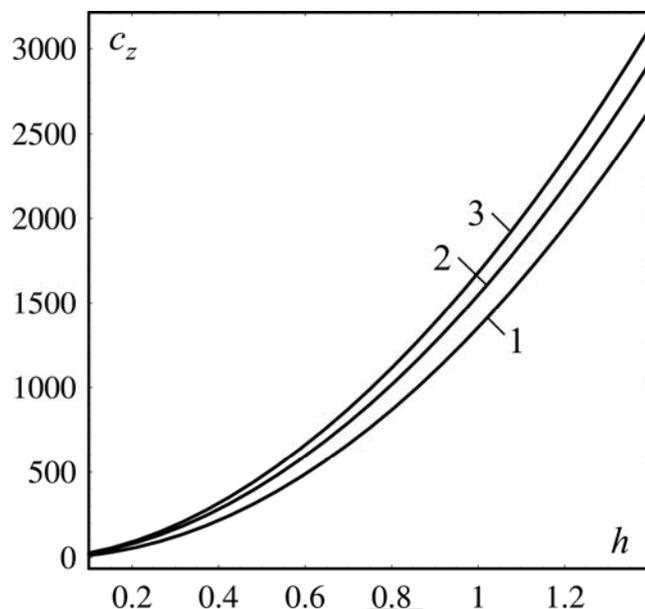


Рис. 5.1. Зависимость жесткости  $c_z$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3 \text{ см}$  для различных радиусов закругления вершины корня:

1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

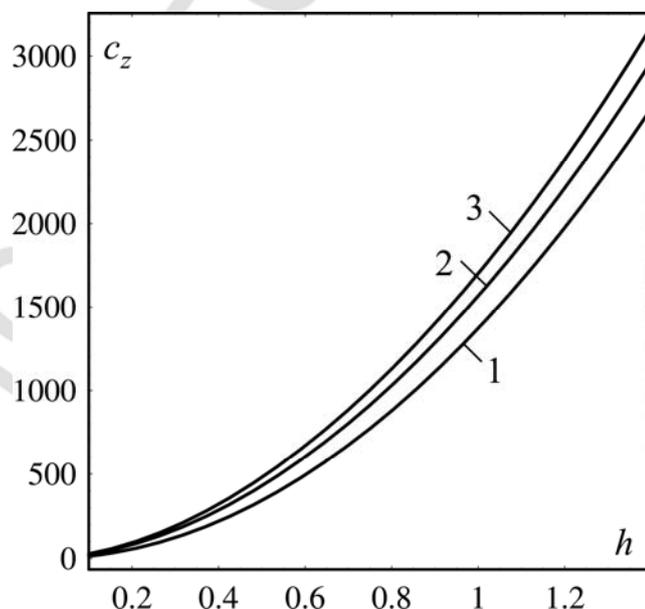


Рис. 5.2. Зависимость жесткости  $c_z$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3 \text{ см}$  для различных радиусов закругления вершины корня:

1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

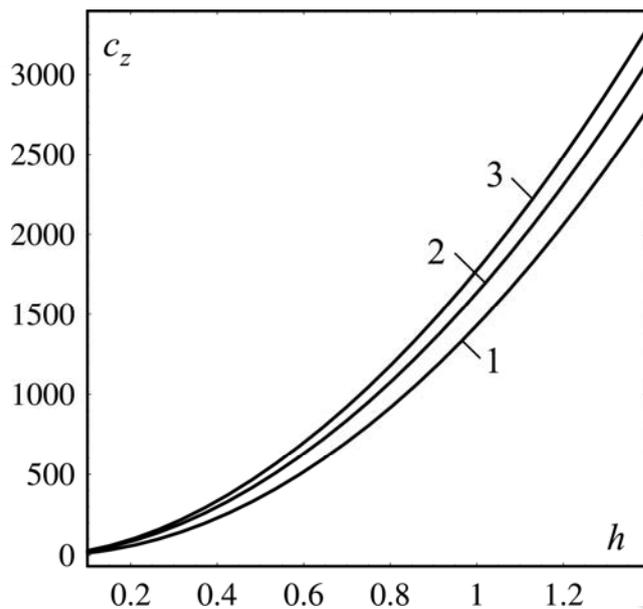


Рис. 5.3. Зависимость жесткости  $c_z$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  см для различных радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

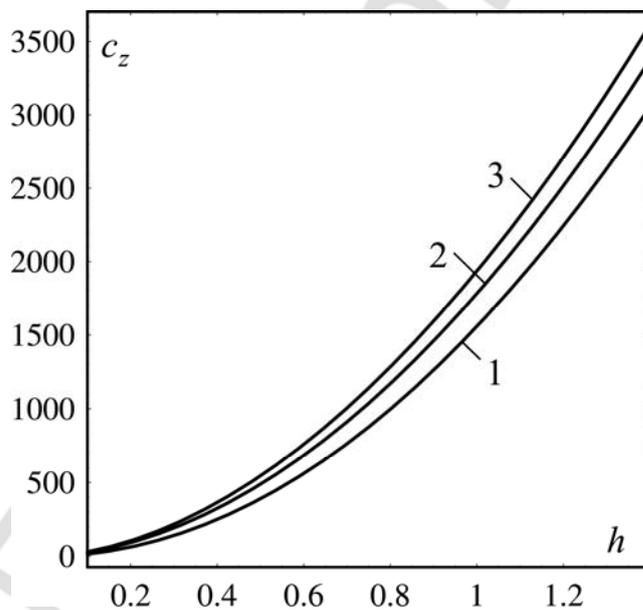


Рис. 5.4. Зависимость жесткости  $c_z$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  см для различных радиусов закругления вершины корня:  
 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

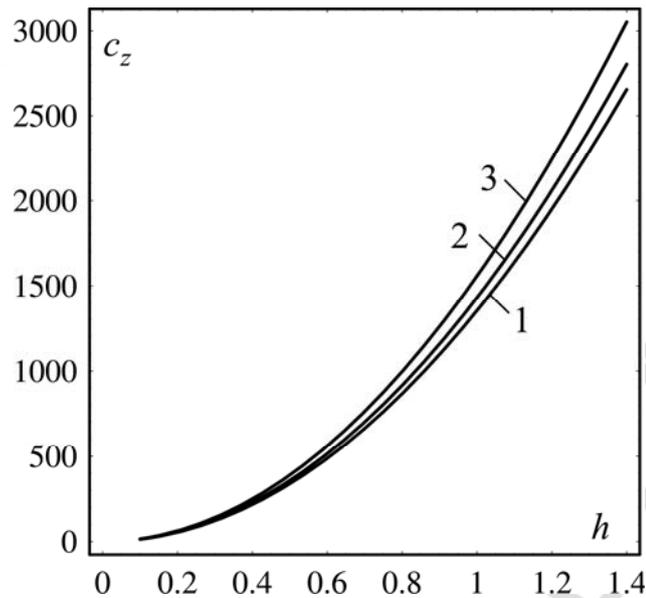


Рис. 5.5. Зависимость жесткости  $c_z$  от рабочей высоты зуба  $h$  при  $l_0 = 0$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  см; 3 —  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  см

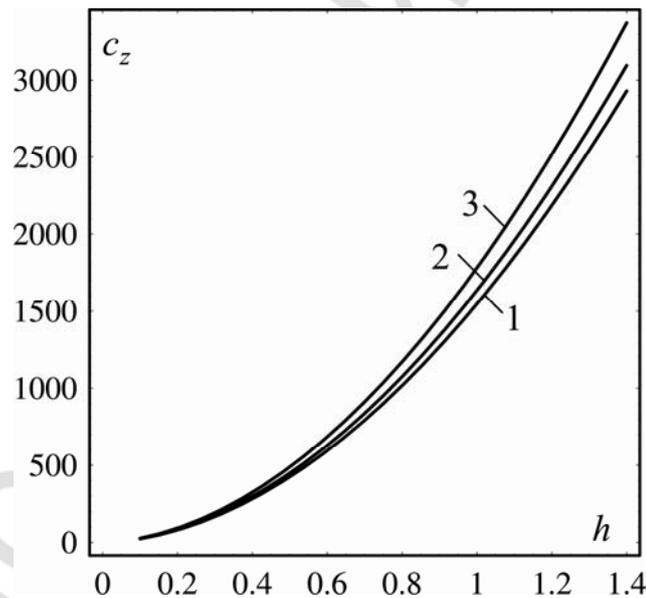


Рис. 5.6. Зависимость жесткости  $c_z$  от рабочей высоты зуба  $h$  при  $l_0 = 0,1$  для различных параметров поперечного сечения корня:  
 1 —  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  см; 3 —  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  см

Отметим, что зависимости жесткости  $c_z$  от высоты  $h$  в случае  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$  см и  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$  см практически совпадает друг с другом для трех значений радиусов закругления вершины корня зуба  $l_0 = 0$ ,  $l_0 = 0,1$ ,  $l_0 = 0,2$ .

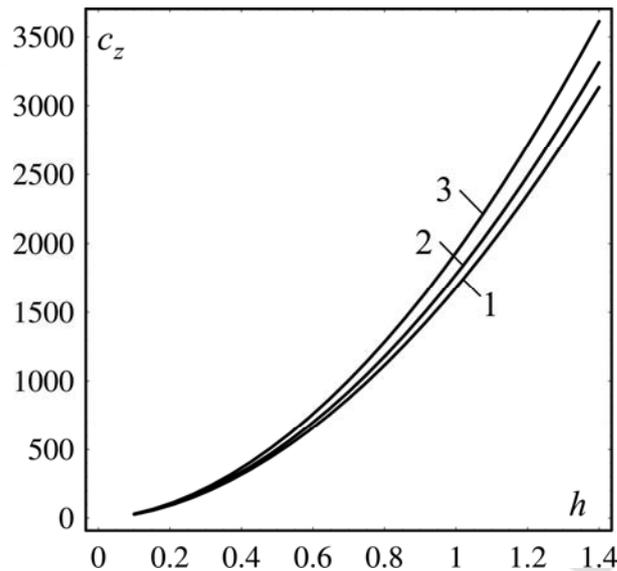


Рис. 5.7. Зависимость жесткости  $c_z$  от рабочей высоты зуба  $h$  при  $l_0 = 0,2$

для различных параметров поперечного сечения корня:

1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$  см; 3 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  см

Воспользуемся найденными значениями жесткости  $c_z$  для расчета нормальных напряжений  $\sigma_n$ , возникающих в периодонте под действием сосредоточенной нагрузки. Результаты вычислений для значения силы  $P_z = 1$  кг и различных параметров, характеризующих геометрическую форму корня зуба представлены в табл. 5.2 (значения напряжений сформулированы в  $\text{кг}/\text{см}^2$ ). При расчете напряжений принимаем  $\nu = 0,15, G = 46,545 \text{ кг}/\text{см}^2, h_0 = 0,12$  см.

Таблица 5.2

**Значения нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении вдоль оси Oz от степени атрофии и параметров корня зуба под действием силы  $P_z = 1$  кг**

$a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$ см			
$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{ см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
0,1	69,5	40,55	35,3	0,1	68,7	40,06	34,9
0,2	17,39	11,74	10,3	0,2	17,17	11,6	11,86
0,3	7,73	5,65	5	0,3	7,63	5,58	4,93
0,4	4,35	3,35	2,97	0,4	4,29	3,3	2,94
0,5	2,78	2,219	1,99	0,5	2,75	2,19	1,96
0,6	1,93	1,58	1,43	0,6	1,907	1,56	1,41
0,7	1,42	1,19	1,08	0,7	1,4	1,17	1,07
0,8	1,09	0,93	0,85	0,8	1,07	0,91	0,83
0,9	0,86	0,74	0,68	0,9	0,85	0,73	0,67
1	0,695	0,61	0,56	1	0,69	0,6	0,55
1,1	0,57	0,51	0,47	1,1	0,567	0,5	0,46
1,2	0,48	0,43	0,4	1,2	0,477	0,43	0,4
1,3	0,41	0,37	0,345	1,3	0,406	0,37	0,33

1,4	0,35	0,32	0,3	1,4	0,35	0,32	0,3
-----	------	------	-----	-----	------	------	-----

Окончание табл. 5.2

$a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$ см				$a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$ см			
$h, \text{см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$	$h, \text{см}$	$l_0 = 0$	$l_0 = 0,1$	$l_0 = 0,2$
0,1	65,8	38,51	33,6	0,1	60,48	35,54	31,14
0,2	16,46	11,13	9,79	0,2	15,12	10,24	9,28
0,3	7,32	5,35	4,73	0,3	6,72	4,91	4,35
0,4	4,12	3,17	2,91	0,4	3,78	2,91	2,59
0,5	2,63	2,1	1,88	0,5	2,42	1,93	1,73
0,6	1,83	1,5	1,35	0,6	1,68	1,38	1,24
0,7	1,34	1,13	1,02	0,7	1,23	1,03	0,94
0,8	1,03	0,88	0,8	0,8	0,94	0,805	0,73
0,9	0,82	0,7	0,64	0,9	0,75	0,645	0,59
1	0,658	0,58	0,53	1	0,6	0,529	0,49
1,1	0,54	0,48	0,45	1,1	0,5	0,44	0,4
1,2	0,46	0,41	0,38	1,2	0,42	0,37	0,35
1,3	0,39	0,35	0,33	1,3	0,36	0,32	0,3
1,4	0,34	0,3	0,28	1,4	0,31	0,28	0,27

Зависимости, демонстрирующие изменение нормальных напряжений  $\sigma_n$  с увеличением рабочей высоты корня зуба  $h$ , для различных значений полуосей эллипсов в сечении корня и радиуса закругления вершины приведены на рис. 5.8–5.14. Материальные константы примем равными  $\nu = 0,15, G = 46,545 \text{ кг/см}^2, h_0 = 0,12 \text{ см}$ .

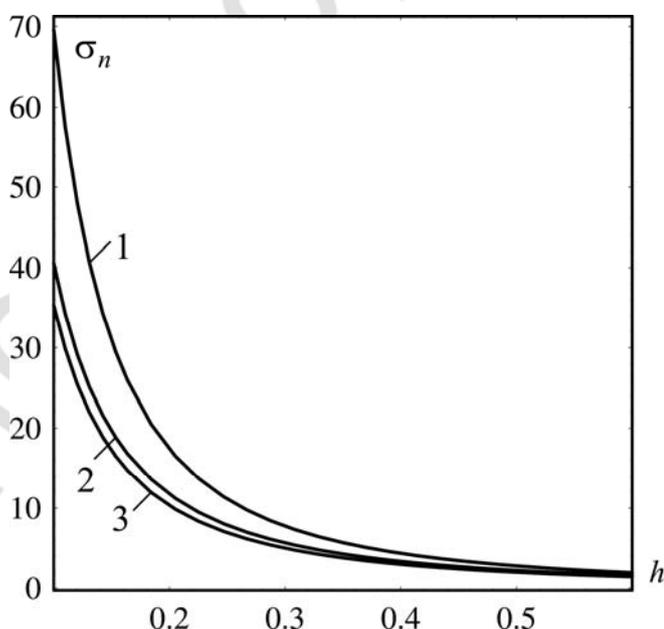


Рис. 5.8. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см для различных радиусов закругления вершины корня:  
1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

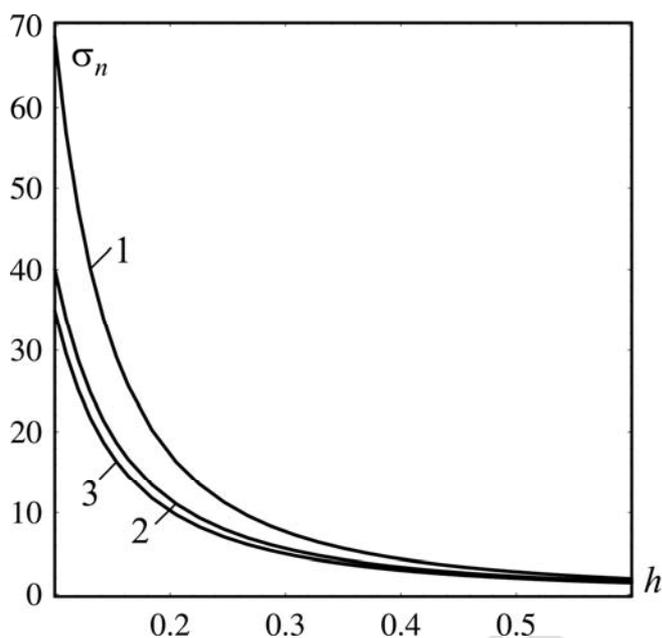


Рис. 5.9. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,25$ ,  $a_{20} = 0,35$ ,  $b_0 = 0,3$  см для различных радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

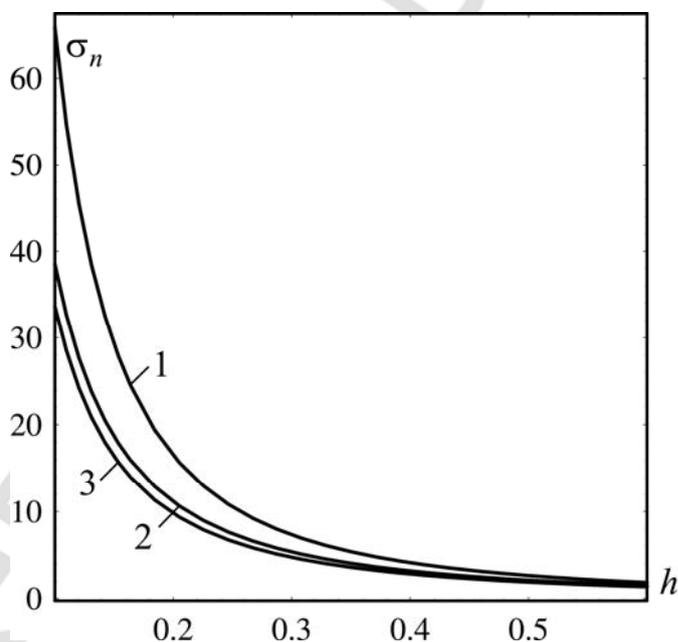


Рис. 5.10. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  см для различных радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

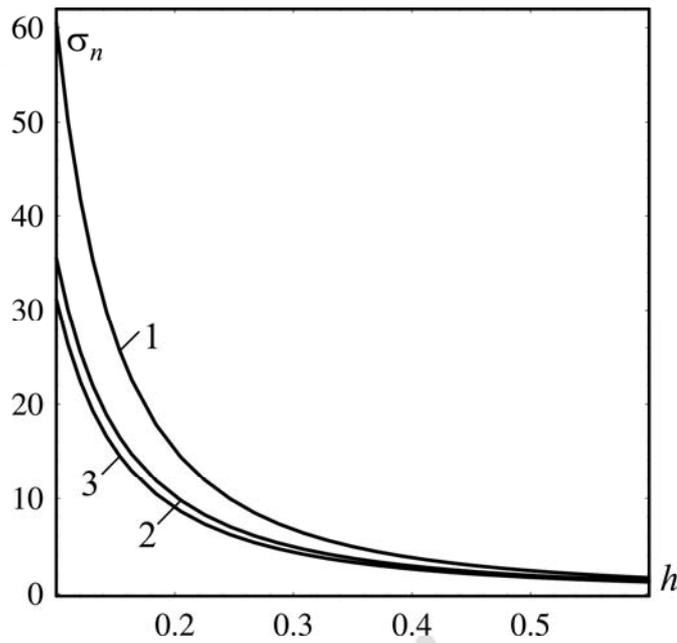


Рис. 5.11. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  см для различных радиусов закругления вершины корня: 1 —  $l_0 = 0$ ; 2 —  $l_0 = 0,1$ ; 3 —  $l_0 = 0,2$

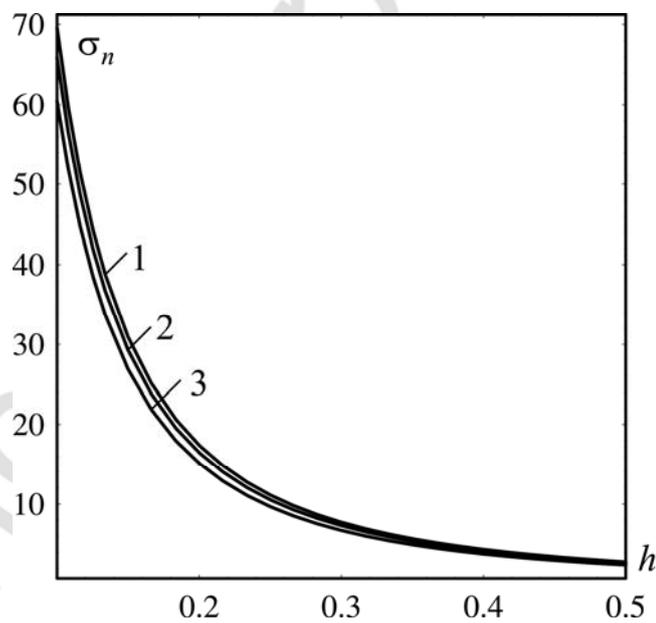


Рис. 5.12. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0$  для различных параметров поперечного сечения корня: 1 —  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,3$ ,  $b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,2$ ,  $a_{20} = 0,4$ ,  $b_0 = 0,3$  см; 3 —  $a_{10} = 0,15$ ,  $a_{20} = 0,45$ ,  $b_0 = 0,3$  см

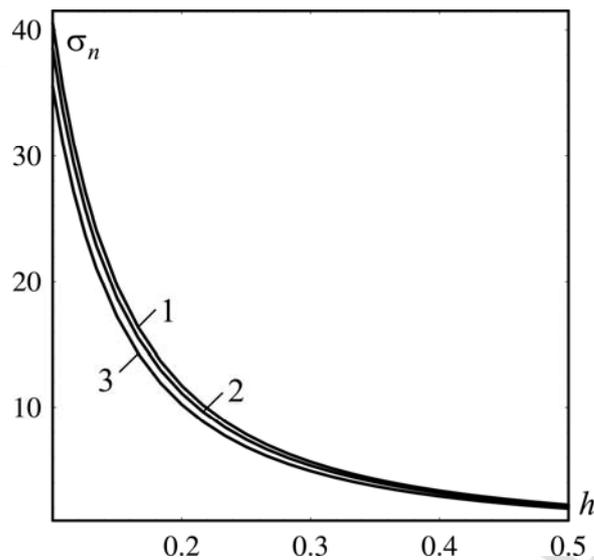


Рис. 5.13. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,1$  для различных параметров поперечного сечения корня:

- 1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$  см;  
3 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  см

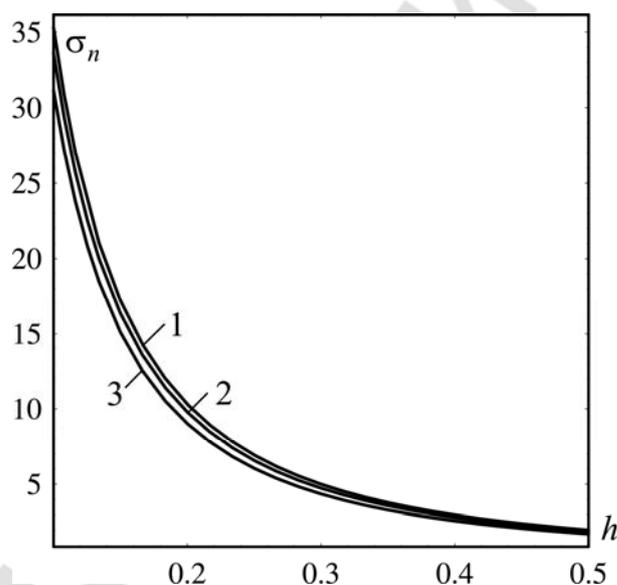


Рис. 5.14. Зависимость нормальных напряжений  $\sigma_n$  при поступательном перемещении корня вдоль оси  $Oz$  от рабочей высоты корня зуба при  $l_0 = 0,2$  для различных параметров поперечного сечения корня:

- 1 —  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см; 2 —  $a_{10} = 0,2, a_{20} = 0,4, b_0 = 0,3$  см;  
3 —  $a_{10} = 0,15, a_{20} = 0,45, b_0 = 0,3$  см

Зависимости нормальных напряжений  $\sigma_n$  от высоты  $h$  в случае  $a_{10} = 0,3, a_{20} = 0,3, b_0 = 0,3$  см и  $a_{10} = 0,25, a_{20} = 0,35, b_0 = 0,3$  см практически совпадает друг с другом для трех значений радиусов закругления вершины корня зуба  $l_0 = 0, l_0 = 0,1, l_0 = 0,2$ .

**Глава 6**  
**Исследование влияния атрофии костной ткани**  
**и параметров корня на жесткость зуба при повороте под действием**  
**пары сил, лежащей в плоскости симметрии**

При атрофии костной ткани высота корня зуба, связанного с периодонтом уменьшается, а подвижность зуба увеличивается. Исследуем влияние величин, характеризующих геометрическую форму корня зуба, в частности высоты  $h$  корня зуба, параметра  $l_0$ , характеризующего закругление вершины корня, и овальность формы поперечного сечения  $a_{10} \neq a_{20}$  на жесткость при повороте вокруг оси, перпендикулярной к плоскости симметрии зуба.

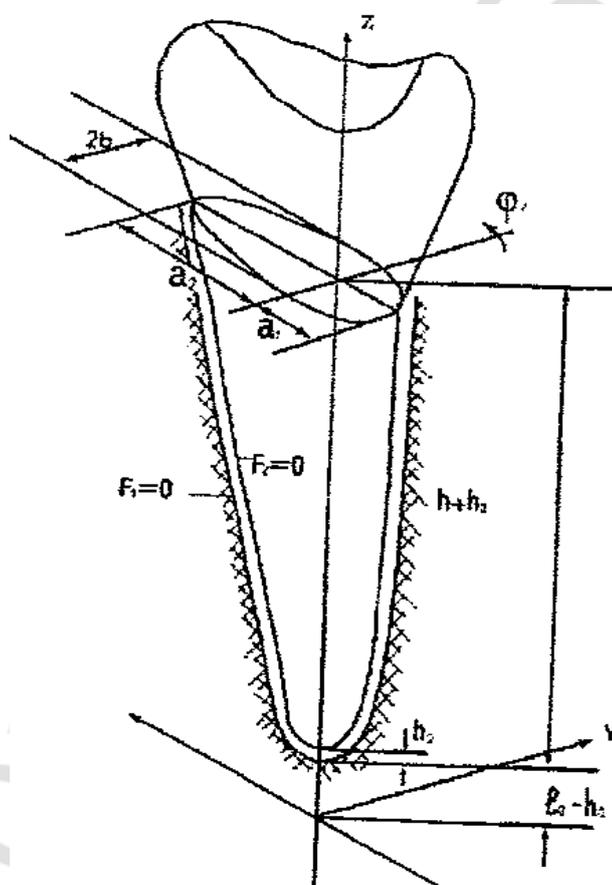


Рис. 6.1. Действие на зуб пары сил, лежащей в плоскости  $yOz$

Обозначим  $H_0 = l_0 + h_H$  расстояние от начала координат до сечения корня зуба на верхнем уровне периодонта в норме ( $l_0$  — расстояние от начала координат до вершины корня зуба,  $h_H$  — высота корня зуба при норме,  $h$  — высота корня зуба при атрофии костной ткани,  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  и  $b_0$  — полуоси эллипса в сечении  $z = H_0$ ). Обозначения характерных геометрических параметров, характеризующих форму корня зуба, а также угол пово-

рота, который получает корень зуба под действием пары сил, лежащих в плоскости  $yOz$ , выполнены на рис. 6.1.

Выполним преобразование выражений для жесткости корня зуба при повороте, жесткостей при поступательном движении и координат центров сопротивления с учетом новых обозначений. В результате получим:

$$\begin{aligned} \mu_y = & \frac{\pi G(\dot{a}_{10} + \dot{a}_{20})b_0}{8h_0(H_0^2 - l_0^2)} \left( h^2(2l_0 + h)^2 \left( \frac{\gamma(H_0^2 - l_0^2)}{a_{10}a_{20}} + 2\gamma - \frac{7}{4} + \frac{H_0^2 - l_0^2}{b_0^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{\gamma}{H_0^2 - l_0^2} + \frac{3}{4b_0^2} \right) (a_{10}^2 - a_{10}a_{20} + a_{20}^2) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{h}{2}(2l_0 + h)(l_0 + h)^2 \left( \frac{a_{10}^2 - a_{10}a_{20} + a_{20}^2}{b_0^2} - 5 \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{a_{10}^2 - a_{10}a_{20} + a_{20}^2}{b_0^2} + 3 \right) l_0^4 \ln \left( \frac{l_0}{l_0 + h} \right) - \frac{8z_a}{3} \left( (l_0 + h)^3 - l_0^3 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{4(H_0^2 - l_0^2)z_a}{3} \left( \frac{\gamma - 1}{H_0^2 - l_0^2} + \frac{\gamma}{a_{10}a_{20}} + \frac{1}{b_0^2} \right) \times \right. \\ & \left. \times h^2(3l_0 + h) - \frac{16x_c(a_{10} - a_{20})}{3\pi b_0^2 \sqrt{H_0^2 - l_0^2}} \left( \frac{1}{3} \sqrt{h^3(2l_0 + h)^3} - l_0^2 \sqrt{h(2l_0 + h)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + l_0^3 \arctg \left( \frac{\sqrt{l_0(2l_0 + h)}}{l_0} \right) + \frac{\gamma b_0^2}{H_0^2 - l_0^2} \sqrt{h^3(2l_0 + h)^3} \right) \right), \\ x_c = & \frac{2\pi b_0(a_{10}^2 - a_{20}^2) \sqrt{h^3(2l_0 + h)^3}}{3h_0 c_z \sqrt{H_0^2 - l_0^2}} \left( \frac{1}{3b^2} - \frac{l_0^2}{h(2l_0 + h)b_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{l_0^3}{b_0^2 \sqrt{h^3(2l_0 + h)^3}} \arctg \left( \frac{\sqrt{h(2l_0 + h)}}{l_0} \right) + \frac{\gamma}{H_0^2 - l_0^2} \right), \\ z_a = & \frac{\pi b_0 G(a_{10} + a_{20})(l_0 + h)}{6h_0 c_x (H_0^2 - l_0^2)} (3(2l_0 + h) + \\ & + \left( \frac{\gamma}{a_{10}a_{20}} + \frac{1}{b_0^2} + \frac{\gamma_2}{H_0^2 - l_0^2} \right) \frac{h(3l_0 + h)(H_0^2 - l_0^2)}{(l_0 + h)} \Big), \end{aligned}$$

$$c_x = \frac{\pi b_0 G (a_{10} + a_{20})}{2h_0} \left( h(2l_0 + h) \left( \frac{\gamma}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{1}{H_0^2 - l_0^2} \right) - l_0^2 \left( \frac{1}{b_0^2} + \frac{\gamma}{a_{10}a_{20}} \right) \ln \left( 1 + \frac{h}{l_0} \right) \right),$$

$$c_z = \frac{\pi b_0 G (a_{10} + a_{20})}{2h_0} \left( h(2l_0 + h) \left( \frac{1}{2a_{10}a_{20}} + \frac{1}{2b_0^2} + \frac{\gamma}{H_0^2 - l_0^2} \right) - l_0^2 \left( \frac{1}{b_0^2} + \frac{1}{a_{10}a_{20}} \right) \ln \left( 1 + \frac{h}{l_0} \right) \right),$$

где  $\mu_y$  — жесткость при повороте вокруг оси  $Oy$ ,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона (для периодонта принимаем  $\nu = 0,15$ ),  $\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$ ,  $\gamma_2 = \gamma - 2$ ,  $c_x$  — жесткость при поступательном перемещении вдоль горизонтальной оси симметрии  $Ox$  сечения корня зуба,  $c_z$  — жесткость при поступательном перемещении вдоль оси  $Oz$ ,  $z_a$  — аппликата центра сопротивления зуба при действии горизонтальной силы вдоль оси  $Ox$ ,  $x_c$  — абсцисса центра сопротивления зуба при действии вертикальной силы вдоль оси  $Oz$ ,  $h_0$  — толщина периодонта при  $x = y = 0$ .

Рассмотрим частные случаи полученных формул.

1. Наличие двух плоскостей симметрии  $a_{10} = a_{20} = a_0$ . В этом случае формулы совпадают после несложных преобразований с формулами, полученными в статье [14].

2. Корень зуба имеет форму кругового конуса, для которого  $\operatorname{tg}(\alpha) = a_0/H_0$ , где  $\alpha$  — половина угла раствора конуса. В результате преобразований получим формулу для жесткости в следующем виде:

$$\mu_y = \frac{\pi G (\gamma + 1) H_0^4 \left( 9(1-2\nu) \sin^4(\alpha) + 2(3-4-\nu)(3-7\nu) \sin^2(\alpha) + (3-4\nu)^2 \right)}{36h_0 \cos^4(\alpha) (3-4\nu) (3-4\nu - \sin^2(\alpha))}.$$

Отсюда при  $\nu = 0,15$  имеем:

$$\mu_y = \frac{\pi G H_0^4}{4h_0 \cos^4(\alpha)} \left( \sin^4(\alpha) + 1,485 \sin^2(\alpha) + 0,9142 \right). \quad (6.1)$$

Согласно формуле, полученной Г. П. Сосниным в работе [91], жесткость при повороте относительно оси ординат  $\nu = 0,15$  рассчитывается следующим образом:

$$\mu_y = \frac{\pi G H_0^4}{4h_0 \cos^4(\alpha)} \left( 1,00096 \sin^4(\alpha) + 1,4714 \sin^2(\alpha) + 0,9126 \right). \quad (6.2)$$

Нетрудно видеть, что найденные значения жесткости (6.1) и (6.2) совпадают друг с другом с точностью до третьего знака. Это различие незначительное, что говорит о достоверности полученных сложных формул для формы корня зуба в виде составного эллиптического гиперboloида. Важно отметить, что вывод формулы для угла поворота в работе [91] осуществлен другим способом, основанным на гипотезах, применяемых в сопротивлении материалов. Здесь же результат получен дедуктивным методом с помощью аналитической структуры решения, точно выполняющего условие неподвижности наружной поверхности периодонта и условие жесткой связи внутренней поверхности с корнем зуба.

Предварительный анализ полученных формул показывает, что для эллиптического конуса с одной или двумя плоскостями симметрии жесткость при повороте прямо пропорциональна четвертой степени рабочей высоты  $h$  корня зуба. Это означает, что при уменьшении корня зуба на  $1/4$  (I степень атрофии) жесткость при повороте уменьшается в 3,16 раза. При уменьшении высоты корня в два раза (II степень атрофии) жесткость при повороте уменьшается в 16 раз, а при уменьшении высоты корня зуба на  $3/4$  (III степень атрофии), жесткость зуба уменьшается в 256 раз. Таким образом, жесткость при повороте зуба выполняет исключительно важную роль при действии функциональной нагрузки. Как видим, даже незначительная атрофия костной ткани, резко увеличивает подвижность зуба, что способствует быстрому его выпадению.

Приведем некоторые числовые примеры вычисления жесткости зуба при повороте для различных параметров. Для всех рассматриваемых случаев будем считать,  $\alpha = 12^\circ$  и  $H_0 = 1,4$  см.

1.  $a_{10} = a_{20} = b_0 = 0,298$  см,  $l_0 = 0$ . В результате расчета по формуле (6.1) получаем  $\mu_y = 0,357Gh^4/h_0$ . Согласно расчету, выполненному для тех же данных в работе Г. П. Соснина [32], имеем  $\mu_y = 0,354Gh^4/h_0$ .

2.  $a_0 = 0,25$  см,  $b_0 = 0,4$  см,  $l_0 = 0$ . По формуле (6.1) получаем  $\mu_y = 0,452Gh^4/h_0$ .

3.  $a_0 = 0,4$  см,  $b_0 = 0,25$  см,  $l_0 = 0$ . Согласно формуле (6.1) имеем  $\mu_y = 0,356Gh^4/h_0$ .

Сравнение второго и третьего примера показывает, что при сохранении площади поперечного сечения для эллиптического конуса с двумя плоскостями симметрии угол поворота возрастает при действии момента в плоскости, проходящей через большую ось эллипса, и уменьшается при действии момента в плоскости, проходящей через меньшую ось эллипса.

4.  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,5$ ,  $b_0 = 0,25$  см,  $l_0 = 0$ . Из формулы (6.1) следует  $\mu_y = 0,367Gh^4/h_0$ .

Сравнение третьего и четвертого примера показывает, что жесткость при повороте для модели в виде эллиптического конуса с одной плоскостью симметрии при сохранении длины осей эллипса возрастает по срав-

нению с моделью в виде конуса с двумя осями симметрии. В частности, при  $l_0 = 0$ ,  $a_0 = 0,4$ ,  $b_0 = 0,25$  см, имеем  $\mu_{y1} = 0,356Gh^4/h_0$ , при  $l_0 = 0$ ,  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,5$ ,  $b_0 = 0,25$  см, жесткость  $\mu_{y2} = 0,367Gh^4/h_0$ . Нетрудно видеть, что  $a_{10} + a_{20} = 2a_0 = 0,8$  см и  $\mu_{y2} > \mu_{y1}$ .

5.  $a_0 = 0,4$ ,  $b_0 = 0,25$ ,  $l_0 = 0,5$  см. В этом случае из формулы (6.1) получим  $\mu_y = 0,512Gh^4/h_0$ .

6.  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,5$ ,  $b_0 = 0,25$ ,  $l_0 = 0,5$  см. На основании соотношения (6.1) находим  $\mu_y = 0,464Gh^4/h_0$ .

Третий и пятый примеры, также четвертый и шестой примеры обнаруживают увеличение жесткости корня зуба в виде эллиптического гиперboloида по сравнению с эллиптическим конусом, т. е. наличие закругления в вершине корня зуба увеличивает его жесткость при повороте. Пятый и шестой пример указывают, что профиль с одной осью симметрии обладает меньшей жесткостью по сравнению с профилем с двумя осями симметрии при наличии закругления в вершине корня. Заметим, что при отсутствии закругления имеем, наоборот, увеличение жесткости, как следует из примеров 3 и 4. Это означает, что природа, заботясь о достаточной жесткости при повороте корня зуба, создала корни зубов с небольшими радиусами закругления для несимметричного профиля.

7.  $a_0 = 0,4$ ,  $b_0 = 0,25$ ,  $l_0 = 53/55$  см. В соответствии с формулой (6.1) находим  $\mu_y = 0,577Gh^4/h_0$ .

8.  $a_{10} = 0,3$ ,  $a_{20} = 0,5$ ,  $b_0 = 0,25$ ,  $l_0 = 63/66$  см. В этом случае из выражения (6.1) получаем  $\mu_y = 0,379Gh^4/h_0$ .

Из примеров 7 и 8 следует, что при увеличении радиуса закругления, то есть с увеличением  $l_0$ , возникает резкое снижение жесткости для несимметричного профиля по сравнению с симметричным (для симметричного профиля  $\mu_y = 0,379Gh^4/h_0$ , для несимметричного профиля  $\mu_y = 0,577Gh^4/h_0$ ).

Как уже отмечалось, при  $l_0 = 0$ , т. е. для корня зуба в виде конуса, жесткость при повороте прямо пропорциональна высоте корня в четвертой степени. При  $l_0 \neq 0$  (для эллиптического гиперboloида), как показывают вычисления, снижение жесткости при повороте в случае атрофии костной ткани несколько меньше. В частности, при  $a_0 = 0,4$ ,  $b_0 = 0,25$ ,  $l_0 = 63/55$  см,  $h = h_H/2$  и  $a_0 = 0,4$ ,  $b_0 = 0,25$ ,  $l_0 = 53/55$  см и  $h = h_H$  жесткость при повороте равна  $\mu_y = 0,045Gh^4/h_0$  и  $\mu_y = 0,577Gh^4/h_0$  соответственно. Таким образом жесткость уменьшается в 12,75 раза вместо 16 раз.

Интересно отметить, что с увеличением радиуса закругления вершины корня сначала увеличивается жесткость при повороте в случае атрофии, а затем уменьшается, т. е. имеется максимум при некотором значении  $l_0$ . Так при параметрах  $a_0 = 0,4$ ,  $b_0 = 0,25$  см,  $h = h_H/2$  жесткость равна  $\mu_y = 0,106Gh^4/h_0$ , т. е. наблюдается снижение жесткости в 4,82 раза (вместо 12,75 при  $l_0 = 63/55$  см и 16 раз при  $l_0 = 0$ ). Это означает, что с точки зрения

жесткости и при атрофии костной ткани предпочтительны корни зубов с малым закруглением их вершин.

Сформулируем зависимость радиуса закругления вершины от параметров корня в плоскостях  $x = 0$  и  $y = 0$ . В плоскости  $y = 0$  имеем

$$R_1 = \frac{a_{k0}^2 l_0}{h_H (2l_0 + h_H)}, \text{ в плоскости } x = 0 \text{ радиус составляет } R_2 = \frac{b_0^2 l_0}{h_H (2l_0 + h_H)}.$$

Отсюда следует, что радиусы закругления на основании принятой модели должны находиться соответственно в пределах  $0 < R_1 < 0.5a_{k0}^2/h_H$  и  $0 < R_2 < 0.5b_0^2/h_H$ .

## Глава 7

### Моделирование оси поворота зуба

#### в ортопедической стоматологии под действием произвольной силы

При различных ортопедических стоматологических вмешательствах (перемещение зубов в вертикальной, сагиттальной, трансверсальной плоскостях), а также при устранении дефектов зубов несъемными (мостовидными) и съемными конструкциями (частичные и бюгельные) зубных протезов, необходимо знать кинематику зуба под действием произвольных сил. Кроме указанных целей, необходимость в определении винтовой оси зуба возникает в хирургической стоматологии, например, при операции удаления зуба.

Рассматривая зуб как абсолютно твердое тело, вследствие упругости периодонта, под действием различных силовых факторов в процессе жевания зуб получает три поступательных перемещения вдоль выбранных трех осей координат и три поворота вокруг этих осей координат. Формулы для определения шести указанных параметров перемещения зуба приводятся в работах [59, 60, 62]. Используя более совершенную модель периодонта, ограниченного двумя составными эллиптическими гиперболоидами [62], выведем уравнение винтовой оси поворота зуба, а также найдем перемещение зуба вдоль этой оси и угол поворота при вращении зуба вокруг винтовой оси.

Пусть  $\vec{U} = (u_0, v_0, w_0)$  — вектор поступательных перемещений вдоль осей координат,  $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  — вектор углов поворота зуба вокруг этих осей. Вектор поступательных перемещений и вектор углов поворота обозначены на рис. 7.1.

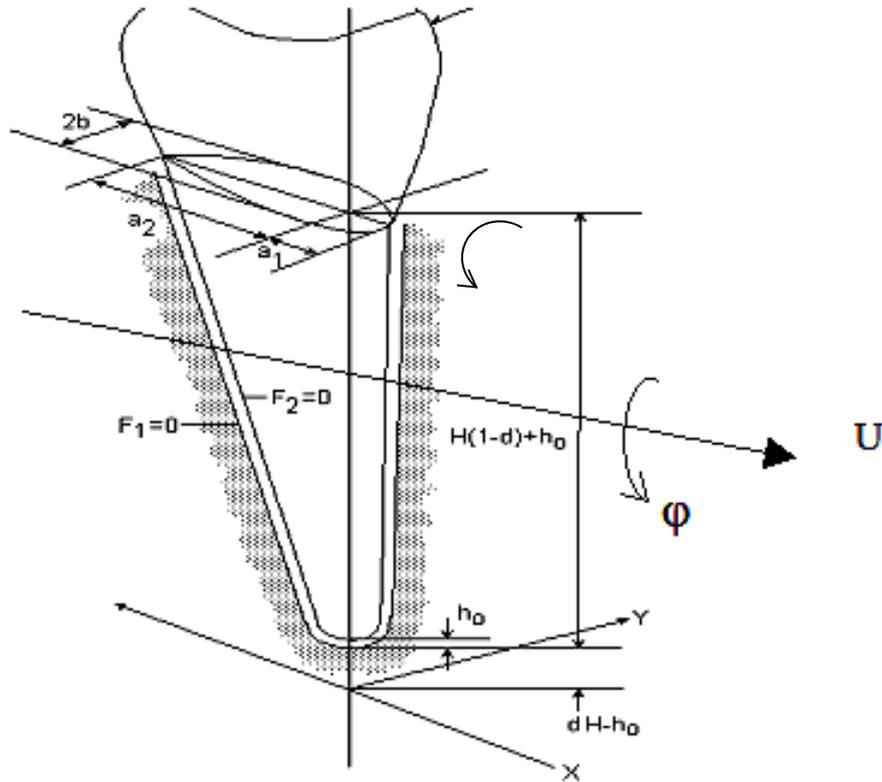


Рис. 7.1. Винтовое перемещение зуба, состоящее из поступательного перемещения  $\vec{U}$  и поворота  $\vec{\varphi}$  вдоль этой оси

По-прежнему будем обозначать  $z_a$  аппликату центра сопротивления зуба при действии силы вдоль оси  $Ox$ ,  $x_b, z_b$  — координаты центра сопротивления зуба при действии силы параллельно оси  $Oy$ ,  $x_c$  — абсцисса центра сопротивления зуба при действии силы вдоль оси  $Oz$ . Тогда уравнение винтовой оси запишем из условия параллельности вектора поступательного перемещения и вектора угла поворота:

$$\frac{u_0 - (y\varphi_z - (z - z_a)\varphi_y)}{\varphi_x} = \frac{v_0 - ((z - z_b)\varphi_x - (x - x_b)\varphi_z)}{\varphi_y} = \frac{w_0 - ((x - x_c)\varphi_y - y\varphi_x)}{\varphi_z}.$$

Полученное уравнение винтовой оси отличается от соответствующей винтовой оси кинематики твердого тела, где обычно в качестве полюса используется одна точка. Здесь, как указано выше, используются в качестве полюсов три точки, совпадающие с центрами сопротивления. Поступательное перемещение зуба вдоль винтовой оси

$$u^{tr} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|} = \frac{u_1\varphi_x + v_1\varphi_y + w_1\varphi_z}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}},$$

где  $u_1 = u_0 - z_a\varphi_y$ ,  $v_1 = v_0 + z_b\varphi_x - x_b\varphi_z$ ,  $w_1 = w_0 + x_c\varphi_y$ ,  $\varphi = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$  — угол поворота зуба вокруг винтовой оси,  $x$ ,  $y$  и  $z$  — текущие координаты точек, лежащих на винтовой оси. Далее рассмотрим частные случаи формулировки уравнения винтовой линии.

1. Сила расположена в плоскости симметрии  $xOz$ . Тогда поступательное перемещение  $v_0$  и углы поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_z$  равны нулю и зуб совершает плоско-параллельное движение. Координаты точки пересечения оси поворота зуба с плоскостью  $xOz$  определяются из следующих уравнений:

$$u_0 + (z - z_a)\varphi_y = 0, \quad w_0 - (x - x_c)\varphi_y = 0.$$

$$\text{Отсюда находим } x = x_c + \frac{w_0}{\varphi_y}, \quad y = 0, \quad z = z_a - \frac{u_0}{\varphi_y}.$$

Указанная точка получила название центра вращения, причем ось вращения проходит через эту точку перпендикулярно плоскости симметрии  $xOz$ . Если при этом равно нулю вертикальное перемещение  $w_0$ , то центр вращения лежит в плоскости  $xOz$  в точке с координатами  $x = x_c$ ,  $z = z_a - u_0/\varphi_y$ . Если известны перемещения двух точек зуба в плоскости  $xOz$ , центр вращения можно определить геометрическим путем, проводя перпендикуляры к перемещениям так, как это показано на рис. 7.2.

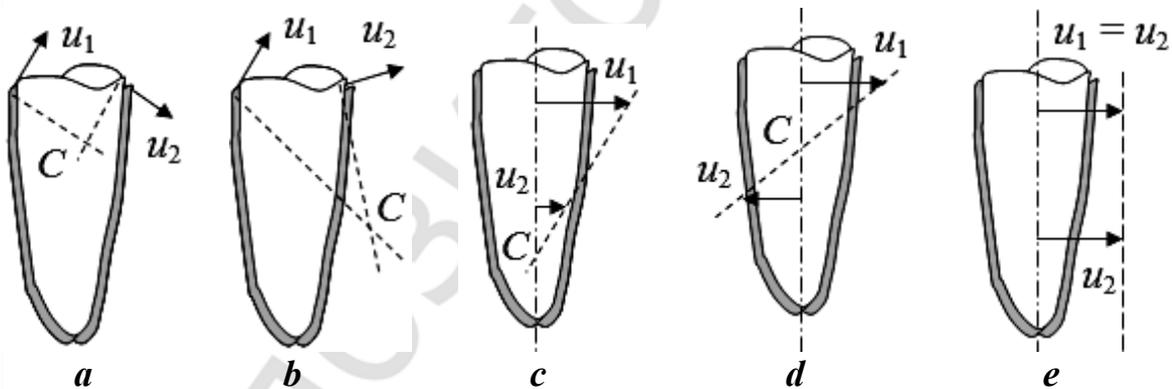


Рис. 7.2. Определение центра вращения геометрическим способом

Из рис. 7.2, *b* видно, что центр вращения  $C$  может находиться и вне зуба. В случае, когда перпендикуляры сливаются, центр поворота определяем на основании линейного закона изменения перемещений зуба как абсолютно твердого тела. Такой подход продемонстрирован на рис. 7.2, *c*, *d*. Заметим, что ось вращения, проходящая через центр поворота, в рассматриваемом случае не является винтовой, т. е. перемещение зуба вдоль оси вращения равно нулю.

Отметим случай, показанный на рис. 7.2, *e*, когда ось вращения зуба отсутствует, поскольку две точки зуба имеют равные по модулю и одинаковые по направлению перемещения. Центр поворота уходит в бесконечность, и зуб получает поступательное перемещение.

2. Представляет интерес равенство нулю главного вектора сил, приложенных к зубу. Это означает, что зуб находится под действием пары сил. Поступательные перемещения  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$  вместе с центрами сопротивления равны нулю, и уравнение оси вращения записывается в виде:

$$\frac{y\varphi_z - (z - z_a)\varphi_y}{\varphi_x} = \frac{(z - z_b)\varphi_x - (x - x_b)\varphi_z}{\varphi_y} = \frac{(x - x_c)\varphi_y - y\varphi_x}{\varphi_z}.$$

Ось вращения в этом случае является винтовой, т. е. вдоль оси зуб получает перемещение, равное следующему отношению

$$u^{tr} = \frac{(z_b - z_a)\varphi_x\varphi_y + (x_c - x_b)\varphi_y\varphi_z}{\sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}}.$$

Исследуя полученную формулу, отметим случай, когда ось вращения не является винтовой. Это выполняется при равенстве  $\varphi_y = 0$ , т. е. при действии на зуб лишь пар с неравными нулю моментами  $M_x$ ,  $M_z$  и  $M_y = 0$ . При этом ось вращения проходит через центр сопротивления с координатами  $x = x_b$ ,  $y = 0$ ,  $z = z_b$ . Это означает, что центр сопротивления в данном случае является одновременно и центром вращения. Второй случай, когда ось вращения не является винтовой, следует из равенства нулю углов поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ . Это означает, что зуб находится только под действием пары сил, параллельной плоскости симметрии  $xOz$ , т. е.  $M_y \neq 0$ ,  $M_x = M_z = 0$ . Во всех остальных случаях действия пар сил на зуб, ось вращения является винтовой. В частности, при действии на зуб пар сил  $M_y \neq 0$ ,  $M_z \neq 0$ , что имеет место при удалении зуба, ось вращения оказывается винтовой, т. е. наряду с поворотом зуба вокруг оси  $Oz$  возникает осевое перемещение вдоль этой оси. Поэтому опытный стоматолог-хирург удаляет зуб или корень зуба без чрезмерных усилий исключительно за счет приложения крутящих моментов.

3. Если все повороты равны нулю, то зуб совершает только поступательное перемещение. Это означает, что зуб находится под действием нагрузки, моменты которой  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  равны нулю. Ось вращения в этом случае отсутствует.

4. Следует отметить и общий случай, когда ось вращения зуба не является винтовой. Этот случай следует из равенства нулю следующей суммы

$$u_1\varphi_x + v_1\varphi_y + w_1\varphi_z = 0,$$

или 
$$(u_0 - z_a\varphi_y)\varphi_x + (v_0 + z_b\varphi_x - x_b\varphi_z)\varphi_y + (w_0 + x_c\varphi_y)\varphi_z = 0.$$

Если подставить в эти уравнения значения для компонент  $u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, x_b, x_c, z_a, z_b$ , можно найти соотношения между компонентами вектора силы и координатами точки приложения силы при условии отсутствия скольжения зуба вдоль винтовой оси вращения.

Таким образом, в общем случае зуб получает винтовое движение, состоящее из поступательного перемещения вдоль оси вращения и вращательного вокруг оси вращения. Поступательное перемещение вдоль оси вращения отсутствует лишь в некоторых частных случаях, отмеченных выше, для которых имеет смысл понятие центра вращения. Поэтому утверждения некоторых авторов в известной литературе, например [91, 102], о наличии одного центра сопротивления и одного центра вращения не соответствуют модели абсолютно твердого тела. Дело в том, что центр сопротивления зависит не только от геометрии корня зуба, но и от направления действия силы, другими словами, от выбора направления осей координат. В частности, если геометрическая форма корня зуба имеет вид двух составных эллиптических гиперболоидов, получаем три центра сопротивления. При данном выборе осей координат ими являются центр сопротивления при действии горизонтальной силы, параллельной оси  $Oy$  точка  $A(x_b, 0, z_b)$ , центр сопротивления при действии горизонтальной силы, параллельной оси  $Ox$  точка  $B(0, 0, z_a)$ , и центр сопротивления при действии вертикальной силы, параллельной оси  $Oz$  точка  $C(x_c, 0, 0)$ . Что касается центра вращения, то правильнее говорить об оси вращения, которая в общем случае является винтовой. Это означает, что в общем случае центра вращения, являющегося неподвижной точкой, не существует.

## Глава 8

### Определение реакций опор и перемещений мостовидного протеза

В стоматологической практике необходимо знать распределение нагрузки на опоры при конструировании различных протезов и приспособлений для выполнения жевательной функции. Распределение нагрузки на опоры определяется реакциями, которые в общем случае имеют шесть составляющих: три силы  $R_x, R_y, R_z$  и три пары сил с моментами  $M_x, M_y, M_z$ . При решении этой задачи предполагаем, что мостовидный протез представляет собой абсолютно твердое тело вместе с корнями зубов, которые служат упругими податливыми опорами. Жесткость опор определяется жесткостью периодонта, являющегося упругой прослойкой, которая находится между корнем зуба и костной тканью челюсти. Жесткость зубов определяется в соответствии с результатами, полученными в работе [62] на основании модели корня как абсолютно твердого тела, состоящего из двух эллиптических гиперболоидов, состыкованных в вершинах полуэллипсов

поперечного сечения корня зуба. Обозначим жесткости корня при поступательных перемещениях зуба вдоль трех осей координат  $c_x, c_y, c_z$ , жесткости при поворотах вокруг осей координат  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  соответственно.

Рассмотрим мостовидный протез с четырьмя опорами и составим шесть уравнений равновесия. Из них тремя уравнениями являются уравнения проекций сил на оси координат:

$$\begin{aligned} R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} + R_{4x} - P_x &= 0, \\ R_{1y} + R_{2y} + R_{3y} + R_{4y} - P_y &= 0, \\ R_{1z} + R_{2z} + R_{3z} + R_{4z} - P_z &= 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Дополняют уравнения (8.1) следующие три уравнения моментов сил относительно осей координат:

$$\begin{aligned} M_{1x} + M_{2x} + M_{3x} + M_{4x} + \\ + R_{2z}b_1 + R_{3z}(b_1 + b_2) + R_{4z}(b_1 + b_2 + b_3) - M_x &= 0, \\ M_{1y} + M_{2y} + M_{3y} + M_{4y} - M_y &= 0, \\ M_{1z} + M_{2z} + M_{3z} + M_{4z} - M_z &= 0. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Схема мостовидного протеза с четырьмя опорами представлена на рис. 8.1.

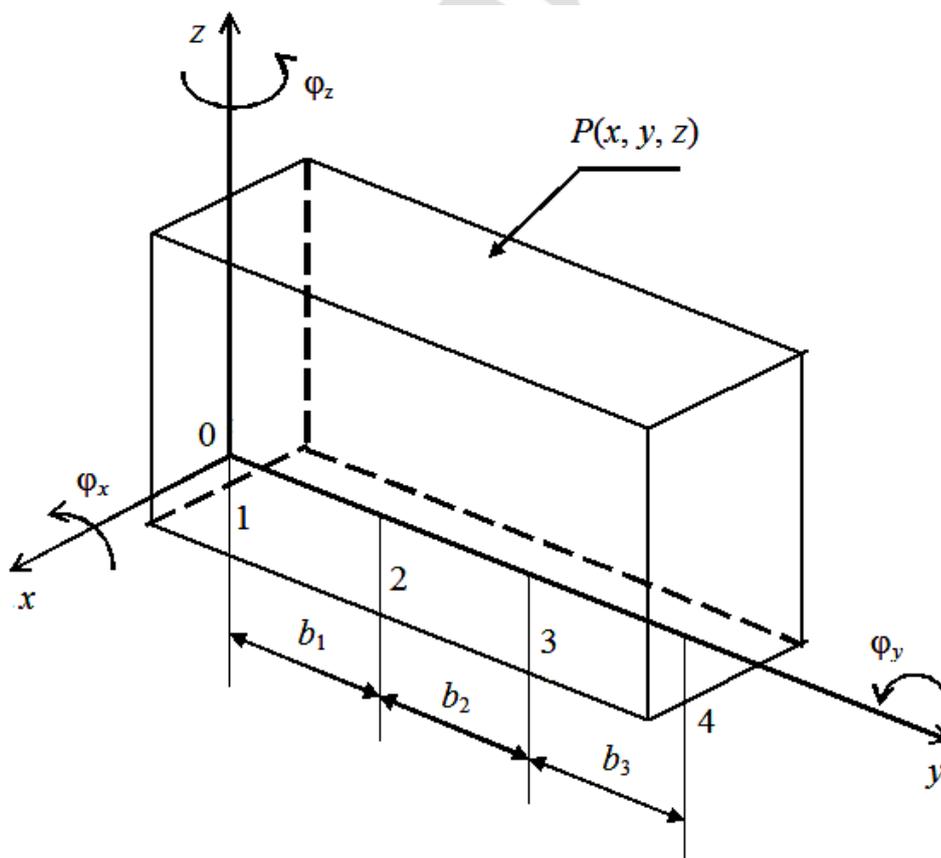


Рис. 8.1. Схема мостовидного протеза с четырьмя опорами

Поскольку составляющие реакций опор пропорциональны соответствующим жесткостям, то второе уравнение системы (8.1) и второе уравнение системы (8.2) позволяют определить реакции опор, а также перемещение  $v_0$  вдоль оси  $Oy$  и угол поворота  $\varphi_y$  относительно этой оси:

$$\varphi_y = \frac{M_y}{\mu_{1y} + \mu_{2y} + \mu_{3y} + \mu_{4y}}, \quad v_0 = \frac{P_y}{c_{1y} + c_{2y} + c_{3y} + c_{4y}},$$

$$R_{1y} = c_{1y}v_0, \quad R_{2y} = c_{2y}v_0, \quad R_{3y} = c_{3y}v_0, \quad R_{4y} = c_{4y}v_0,$$

$$M_{1y} = \mu_{1y}\varphi_y, \quad M_{2y} = \mu_{2y}\varphi_y, \quad M_{3y} = \mu_{3y}\varphi_y, \quad M_{4y} = \mu_{4y}\varphi_y,$$

где  $c_{1y}, c_{2y}, c_{3y}, c_{4y}$  — жесткости опор в направлении оси  $Oy$  при поступательном перемещении,  $\mu_{1y}, \mu_{2y}, \mu_{3y}, \mu_{4y}$  — жесткости опор при повороте вокруг оси  $Oy$ .

Для определения остальных составляющих реакций опор запишем уравнения совместности из условий равенства углов поворота для каждой опоры:

$$\varphi_x = \frac{w_2 - w_1}{b_1} = \frac{w_3 - w_2}{b_2} = \frac{w_4 - w_3}{b_3},$$

$$\varphi_z = \frac{u_2 - u_1}{b_1} = \frac{u_3 - u_2}{b_2} = \frac{u_4 - u_3}{b_3}.$$

Здесь  $u_i$  — поступательные перемещения опор вдоль оси  $Ox$ ,  $w_i$  — поступательные перемещения опор вдоль оси  $Oz$ ,  $i = \overline{1,4}$ .

В результате получим следующие зависимости между моментами и силами реакций опор

$$M_{1x} = \mu_{1x}\varphi_x = \frac{\mu_{1x}}{b_1} \left( \frac{R_{2z}}{c_{2z}} - \frac{R_{1z}}{c_{1z}} \right), \quad M_{2x} = \mu_{2x}\varphi_x = \frac{\mu_{2x}}{b_1} \left( \frac{R_{2z}}{c_{2z}} - \frac{R_{1z}}{c_{1z}} \right),$$

$$M_{3x} = \mu_{3x}\varphi_x = \frac{\mu_{3x}}{b_1} \left( \frac{R_{2z}}{c_{2z}} - \frac{R_{1z}}{c_{1z}} \right), \quad M_{4x} = \mu_{4x}\varphi_x = \frac{\mu_{4x}}{b_1} \left( \frac{R_{2z}}{c_{2z}} - \frac{R_{1z}}{c_{1z}} \right),$$

$$M_{1z} = \mu_{1z}\varphi_z = \frac{\mu_{1z}}{b_1} \left( \frac{R_{2x}}{c_{2x}} - \frac{R_{1x}}{c_{1x}} \right), \quad M_{2z} = \mu_{2z}\varphi_z = \frac{\mu_{2z}}{b_1} \left( \frac{R_{2x}}{c_{2x}} - \frac{R_{1x}}{c_{1x}} \right),$$

$$M_{3z} = \mu_{3z}\varphi_z = \frac{\mu_{3z}}{b_1} \left( \frac{R_{2x}}{c_{2x}} - \frac{R_{1x}}{c_{1x}} \right), \quad M_{4z} = \mu_{4z}\varphi_z = \frac{\mu_{4z}}{b_1} \left( \frac{R_{2x}}{c_{2x}} - \frac{R_{1x}}{c_{1x}} \right).$$

Анализ полученных уравнений показывает, что система распадается на две группы уравнений, решаемых независимо друг от друга. Первая группа определяет вертикальные составляющие реакций опор

$$\begin{aligned}
 R_{1z} + R_{2z} + R_{3z} + R_{4z} - P_z &= 0, \\
 \frac{1}{b_1} \left( \frac{R_{2z}}{c_{2z}} - \frac{R_{1z}}{c_{1z}} \right) (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + \mu_{4x}) + \\
 + R_{2z}b_1 + R_{3z}(b_1 + b_2) + R_{4z}(b_1 + b_2 + b_3) - M_x &= 0, \\
 \frac{1}{b_1} \left( \frac{R_{2z}}{c_{2z}} - \frac{R_{1z}}{c_{1z}} \right) &= \frac{1}{b_2} \left( \frac{R_{3z}}{c_{3z}} - \frac{R_{2z}}{c_{2z}} \right) = \frac{1}{b_3} \left( \frac{R_{4z}}{c_{4z}} - \frac{R_{3z}}{c_{3z}} \right).
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Вторая группа уравнений определяет горизонтальные составляющие реакций опор:

$$\begin{aligned}
 R_{1x} + R_{2x} + R_{3x} + R_{4x} - P_x &= 0, \\
 \frac{1}{b_1} \left( \frac{R_{2x}}{c_{2x}} - \frac{R_{1x}}{c_{1x}} \right) (\mu_{1z} + \mu_{2z} + \mu_{3z} + \mu_{4z}) + \\
 + R_{2x}b_1 + R_{3x}(b_1 + b_2) + R_{4x}(b_1 + b_2 + b_3) - M_z &= 0, \\
 \frac{1}{b_1} \left( \frac{R_{2x}}{c_{2x}} - \frac{R_{1x}}{c_{1x}} \right) &= \frac{1}{b_2} \left( \frac{R_{3x}}{c_{3x}} - \frac{R_{2x}}{c_{2x}} \right) = \frac{1}{b_3} \left( \frac{R_{4x}}{c_{4x}} - \frac{R_{3x}}{c_{3x}} \right).
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Решим первую группу уравнений (8.3). Для этой цели найдем определители для метода Крамера, а затем с их помощью определим реакции:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + \mu_{4x})(c_{1z} + c_{2z} + c_{3z} + c_{4z}) + \\
 &+ c_{1z}c_{4z}(b_1 + b_2 + b_3)^2 + c_{1z}c_{3z}(b_1 + b_2)^2 + \\
 &+ c_{2z}c_{4z}(b_2 + b_3)^2 + c_{1z}c_{2z}b_1^2 + c_{2z}c_{3z}b_2^2 + c_{3z}c_{4z}b_3^2,
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1z} &= c_{1z}P_z \left( c_{4z}(b_1 + b_2 + b_3)^2 + c_{3z}(b_1 + b_2)^2 + \right. \\
 &+ c_{2z}b_1^2 + (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + \mu_{4x}) \left. \right) - \\
 &- c_{1z}(yP_z - zP_y)(c_{2z}b_1 + c_{3z}(b_1 + b_2) + c_{4z}(b_1 + b_2 + b_3)),
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{2z} &= c_{2z}P_z \left( c_{4z}(b_1 + b_2 + b_3)(b_2 + b_3) + \right. \\
 &+ c_{3z}b_2(b_1 + b_2) + (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + \mu_{4x}) \left. \right) + \\
 &+ c_{2z}(yP_z - zP_y)(c_{1z}b_1 - c_{4z}(b_2 + b_3) - c_{3z}b_2),
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3z} = & c_{3z}P_z \left( c_{4z}(b_1 + b_2 + b_3)b_3 - c_{2z}b_2b_1 + \right. \\ & \left. + (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + \mu_{4x}) \right) + \\ & + c_{3z}(yP_z - zP_y)(c_{1z}(b_1 + b_2) - c_{4z}b_3 + c_{2z}b_2), \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{4z} = & c_{4z}P_z \left( (\mu_{1x} + \mu_{2x} + \mu_{3x} + \mu_{4x}) - \right. \\ & \left. - c_{3z}b_3(b_1 + b_2) - c_{2z}b_1(b_2 + b_3) \right) + c_{4z}(yP_z - zP_y) \times \\ & \times (c_{1z}(b_1 + b_2 + b_3) + c_{2z}(b_2 + b_3) + c_{3z}b_3), \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$R_{1z} = \Delta_{1z}/\Delta, \quad R_{2z} = \Delta_{2z}/\Delta, \quad R_{3z} = \Delta_{3z}/\Delta, \quad R_{4z} = \Delta_{4z}/\Delta.$$

Если в полученных формулах положить равными нулю  $\mu_{4x}$  и  $c_{4x}$ , получим формулы для реакций трехопорного протеза [57], если принять  $\mu_{3x} = c_{3x} = 0$  и  $c_{3z} = c_{4z} = 0$ , получим формулы для двухопорного протеза. Наконец, при  $\mu_{2x} = \mu_{3x} = \mu_{4x} = 0$  и  $c_{2z} = c_{3z} = c_{4z} = 0$ , будем иметь формулы для консольного одноопорного протеза.

Угол поворота протеза вокруг оси  $Ox$  вычисляется по формуле

$$\varphi_x = \frac{1}{\Delta} \left( M_x(c_{1z} + c_{2z} + c_{3z} + c_{4z}) - P_z(c_{2z}b_1 + (b_1 + b_2)c_{3z} + (b_1 + b_2 + b_3)c_{4z}) \right).$$

Для нахождения горизонтальных реакций достаточно в выражениях (8.5)–(8.9) заменить  $P_z$  на  $P_y$ ,  $P_y$  на  $P_x$ , жесткости при вращении  $\mu_{1x}$ ,  $\mu_{2x}$ ,  $\mu_{3x}$ ,  $\mu_{4x}$  заменить на  $\mu_{1z}$ ,  $\mu_{2z}$ ,  $\mu_{3z}$ ,  $\mu_{4z}$ , жесткости при поступательном движении  $c_{1z}$ ,  $c_{2z}$ ,  $c_{3z}$ ,  $c_{4z}$  на жесткости  $c_{1x}$ ,  $c_{2x}$ ,  $c_{3x}$ ,  $c_{4x}$  соответственно.

Таким образом, полученные формулы позволяют вычислить реакции всех опор и перемещения четырехопорного, трехопорного, двухопорного и одноопорного протезов. Если опорами протеза служат многокорневые зубы (двухкорневые или трехкорневые), то жесткости таких опор складываются из жесткости каждого корня в отдельности. При ортодонтических вмешательствах нам приходится перемещать и поворачивать зубы в различных направлениях. Полученные формулы позволяют вычислить эти перемещения в зависимости от приложенной нагрузки и тем самым проводить адекватное аппаратное ортодонтическое лечение.

## Глава 9

### Программная реализация формул для расчета напряженно-деформированного состояния периодонта

Полученные для модели периодонта в виде двух составных эллиптических гиперboloидов формулы, достаточно сложны, особенно в случае действия произвольной силы. Поэтому для определения основных параметров напряженно-деформированного состояния периодонта, целесообразно использовать современные возможности вычислительной техники. В настоящей главе представлены результаты численного расчета координат центров сопротивления зуба  $z_a, x_b, z_b, x_c$ , поступательных перемещений зуба вдоль трех осей координат  $u_0, v_0, w_0$ , углов поворота вокруг трех осей координат  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ , а также визуализации распределения нормальных  $\sigma_n$  и касательных  $\tau_{ns}, \tau_{n\theta}$  напряжений во всей области контакта периодонта с корнем зуба с учетом атрофии костной ткани. Для нормальных напряжений красный цвет показывает напряжения растяжения, синий цвет — напряжения сжатия. Для касательных напряжений положительные напряжения определяются красным цветом, отрицательные — синим цветом. Минимальные напряжения, как нормальные, так и касательные изображаются зеленым цветом. Далее рассмотрим эти параметры более подробно.

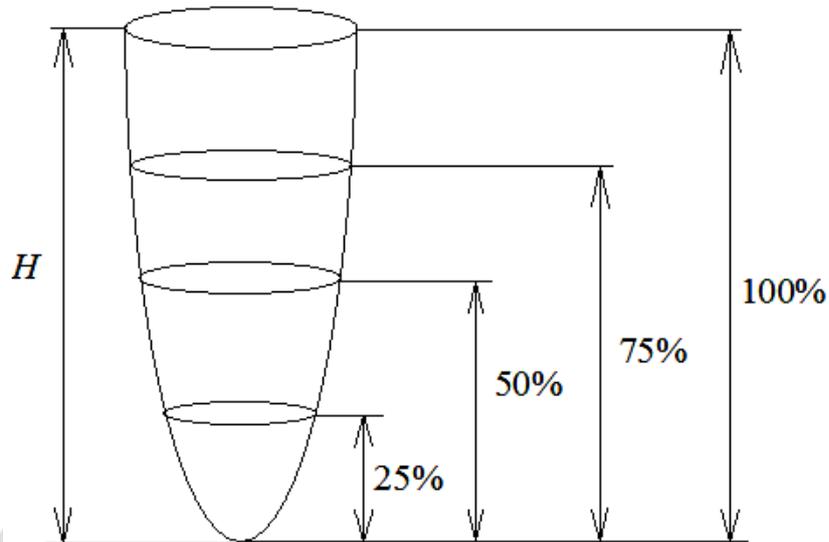


Рис. 9.1. Высота костной ткани и процент атрофии костной ткани

Форма периодонта на границе с корнем зуба повторяет форму корня зуба и отстоит от нее на толщину области соединения периодонта с поверхностью корня зуба. Поэтому в дальнейшем изображая корень зуба, мы имеем в виду поверхность периодонта, прилегающую к корню (границу). Реальные величины полуосей для типичных профилей корней реальных зубов установлены в следующих пределах:  $a_{10} = 0,15-0,70$  см;  $a_{20} = 0,15-$

0,70 см;  $b_0 = 0,15-0,70$  см, высота корня зуба  $H = 0,50-2,50$  см. Высота костной ткани Н-bone в норме 100 %, при атрофии костной ткани рассматриваем  $H\text{-bone} = 75\%$  (атрофия 25 %),  $H\text{-bone} = 50\%$  (атрофия 50 %) и  $H\text{-bone} = 25\%$  (атрофия 75 %). Высота костной ткани в норме и для различной степени атрофии показана на рис. 9.1.

Нормальные и касательные напряжения в каждой точке периодонта рассчитываются для трех направлений, показанных на рис. 9.2.

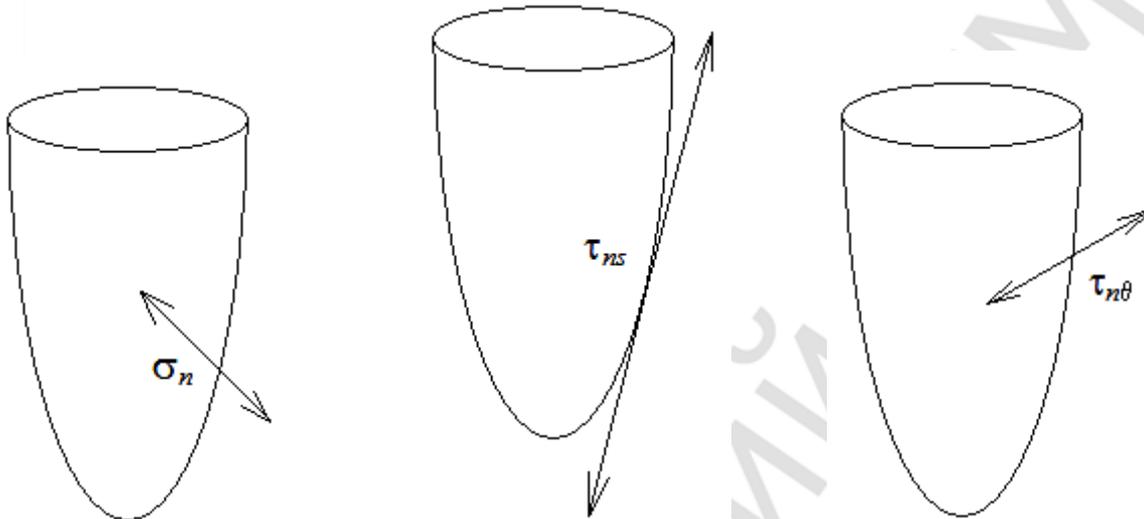


Рис. 9.2. Направления нормальных  $\sigma_n$  и касательных  $\tau_{ns}$ ,  $\tau_{n\theta}$  напряжений на поверхности периодонта

Нормальные напряжения направлены по нормали к поверхности периодонта, т. е. перпендикулярно касательной плоскости к поверхности периодонта. Значение нормальных напряжений характеризует величину сжатия (отрицательные напряжения) и растяжение (положительные напряжения). Разработанная математическая модель деформации периодонта позволяет осуществить расчет проекции на направление, перпендикулярное поверхности периодонта. Если происходит сжатие периодонта со стороны корня, то эта проекция отрицательная и на диаграмме изображается оттенками синего цвета. Если давление идет от корня, то периодонт испытывает растягивающее напряжение, проекция в этом случае положительная и отображается оттенками красного цвета. Если напряжения в этом направлении отсутствуют, то проекция нулевая и изображается зеленым цветом. Предложенная цветовая гамма обеспечивает плавность перехода цвета при изменении значений напряжений от отрицательного к положительному. Отметим, что нормальные напряжения изображаются на приведенных далее диаграммах слева.

Второе направление, в котором рассчитываются касательные напряжения, проходит вдоль касательной к гиперболе, которая является образующей поверхности зуба. Это направление соответствует направлению

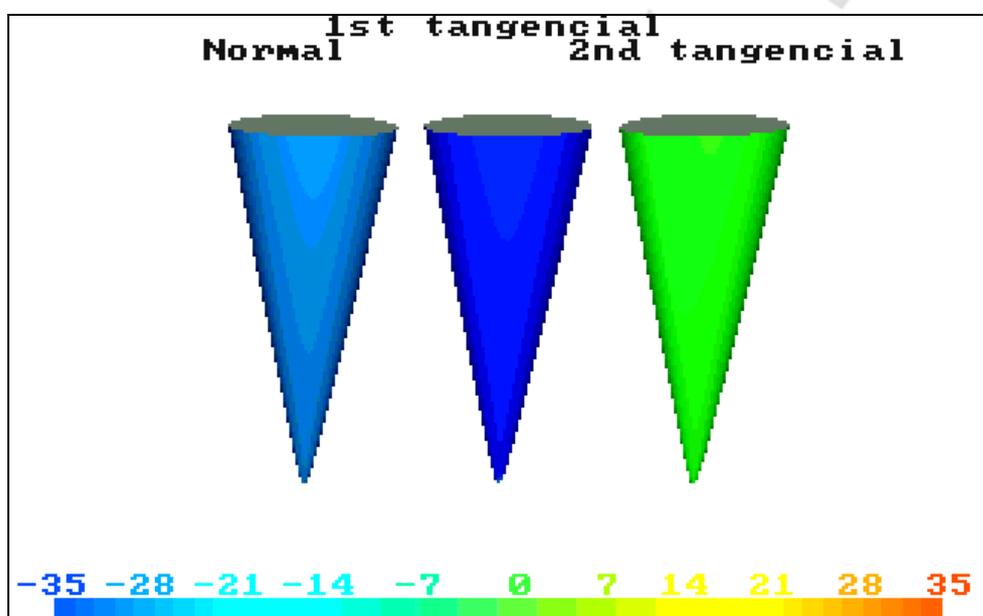
от шейки зуба к анатомической верхушке корня зуба. Положительные оттенки красного цвета проекции обозначают, что напряжение направлено к анатомической верхушке корня, отрицательные (оттенки синего) — к шейке зуба. Оттенки зеленого цвета — значительных напряжений нет или напряжения незначительны и приближенно равны нулю.

Третье направление, в котором рассчитываются напряжения, проходит вдоль касательной к эллипсу, т. е. к направляющей, по которой вращается гипербола, образующая поверхность корня (поворот корня). Положительная проекция имеет оттенки красного цвета, отрицательная проекция — оттенки синего цвета.

Одной из функциональных возможностей разработанного программного средства, позволяющего осуществлять визуализацию распределения напряжений, возникающих в периодонте, является возможность интерактивного задания точки наблюдения и осмотра поля напряжений со всех сторон корня зуба. В то же время практика показывает, что каждый врач традиционно рассматривает такое распределение напряжений, которое соответствует какому-то определенному направлению осей и интерпретирует картину напряжений при их постоянном расположении. Поэтому далее приводятся диаграммы напряжений, визуализированные с одной и той же точки обзора. Анализ напряженно-деформированного состояния периодонта проведен на 28 примерах, представленных ниже. Каждый пример сопровождается таблицей, в которой одновременно приводятся исходные числовые данные, содержащие значения полуосей эллипса  $a_{10}$ ,  $a_{20}$ ,  $b_0$ , параметр, характеризующий закругление корня  $d$ , высота корня зуба  $H$ , высота костной ткани  $H\text{-Bone}$ , модуль силы  $P$ , координаты точки приложения  $x_f$ ,  $y_f$ ,  $z_f$  и углы наклона силы к корню зуба  $\alpha$ ,  $\beta$ , а также результаты расчета перемещений вдоль осей координат  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ , углов поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  и координат центров сопротивления  $z_a$ ,  $x_b$ ,  $z_b$ ,  $x_c$ . Все линейные размеры сформулированы в см, напряжения в  $\text{кг/см}^2$ , углы поворота в радианах, силы в кг. Помимо таблицы приведена диаграмма распределения нормальных и касательных напряжений в периодонте (обозначение Normal соответствует распределению нормальных напряжений, 1<sup>st</sup> tangencial — тангенциальным напряжениям  $\tau_{ns}$ , 2<sup>nd</sup> tangencial — тангенциальным напряжениям  $\tau_{n\theta}$ ). Каждый пример завершается кратким анализом полученных результатов.

### Пример 1

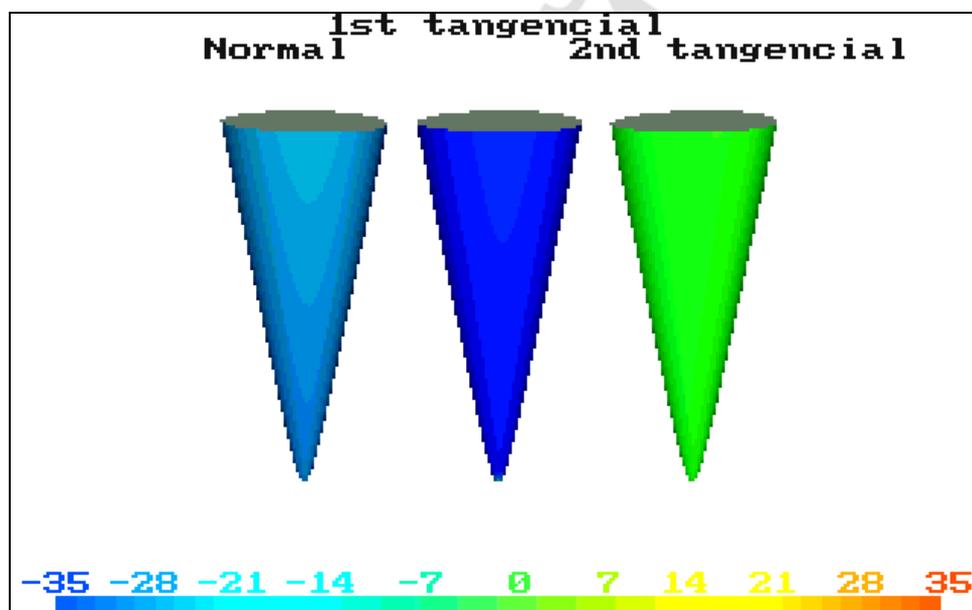
Полуоси эллипса, см			H-Воне, %	Параметр гиперболоида, d	Высота корня зуба H, см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,0(6)	1,4
Модуль силы, P, кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	180	0	-0,0166627	0	3,0
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,02532214	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0,0000001		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,0322525	-0,0314225	1,0324372	-0,0166627		



Заданное направление соответствует действию вертикальной силы  $P_z = -75$  кг при поступательном перемещении вдоль оси  $Oz$ . На цветных рисунках четко просматривается сжимающие нормальные напряжения  $\sigma_n$  (голубой цвет), значительные касательные напряжения вдоль образующих  $\tau_{ns}$  (синий цвет) и почти отсутствующие касательные вдоль направляющей напряжения  $\tau_{n\theta}$  (зеленый цвет). Следует заметить, что касательные напряжения  $\tau_{n\theta}$  столь незначительны, что зеленый цвет почти не реагирует на изменение знаков.

Пример 2

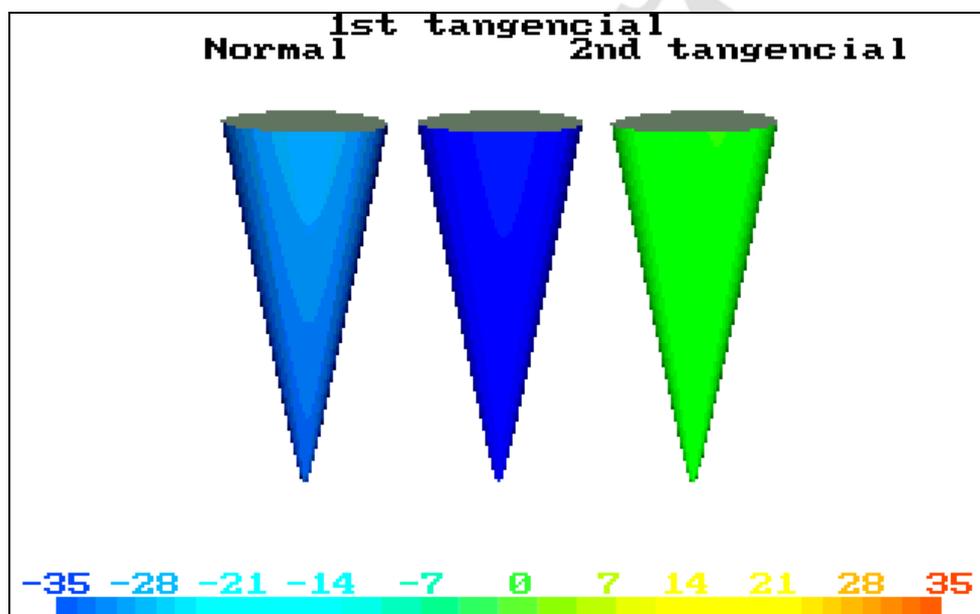
Полуоси эллипса, см			$H\text{-Bone}$ , %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,07	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
	180	0	0	0	3,0
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,0253214	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0019773		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,0322525	-0,0314225		1,0324372	-0,0166627	



Здесь сила  $P_z = -75$  кг приложена не в точке сопротивления  $x_c = 0,0166627$  см, а направлена вдоль оси  $Oz$ , т. е. создается незначительный момент и возникает поворот вокруг оси  $Oy$  равный  $\varphi_y = -0,0019773$ . В результате замечаем, что на левом цветном рисунке возникает бирюзовый оттенок. Таким образом, имеем уменьшение нормальных напряжений  $\sigma_n$  с одной стороны, а с другой стороны имеем более интенсивный синий цвет, что говорит об увеличении нормальных напряжений.

Пример 3

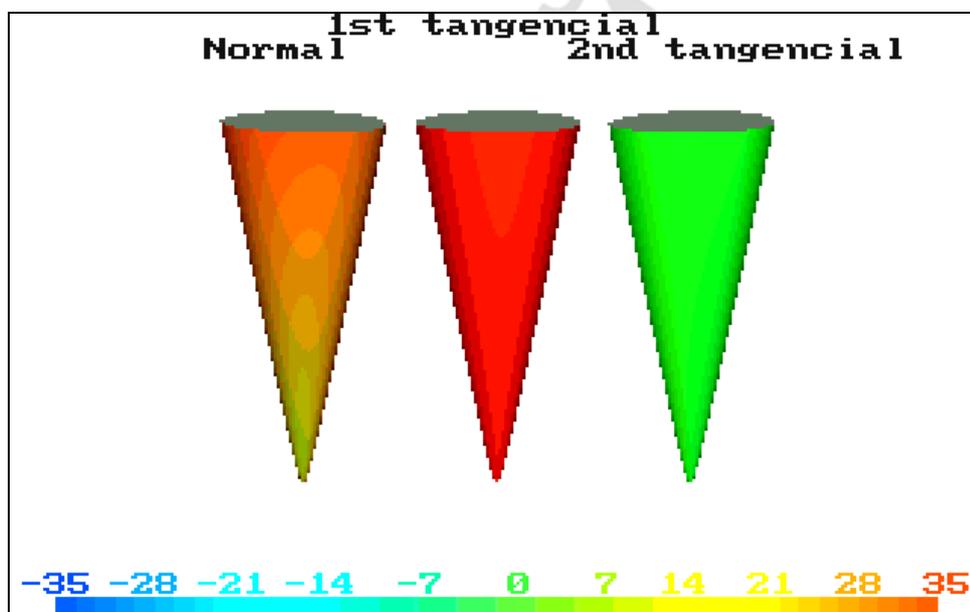
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	180	0	-0,02	0	3,0
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,0236675	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,00036		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,1255659	-0,0318849		1,1257419	-0,0167081	



Характер распределения напряжений такой же, как и для гиперболоида, описываемого радиусом закругления  $l_0 = 0,1$ , рассмотренного в примере 1. Здесь же для случая  $l_0 = 0,2$  напряжения несколько меньше, а жесткость несколько больше, как это видно из сравнения значений перемещения  $w_0$  и напряжений. В частности, в примере 1 для параметра  $l_0 = 0,1$  получаем  $w_0 = -0,0253$  см, а в данном случае при  $l_0 = 0,2$  имеем  $w_0 = -0,0236$  см.

Пример 4

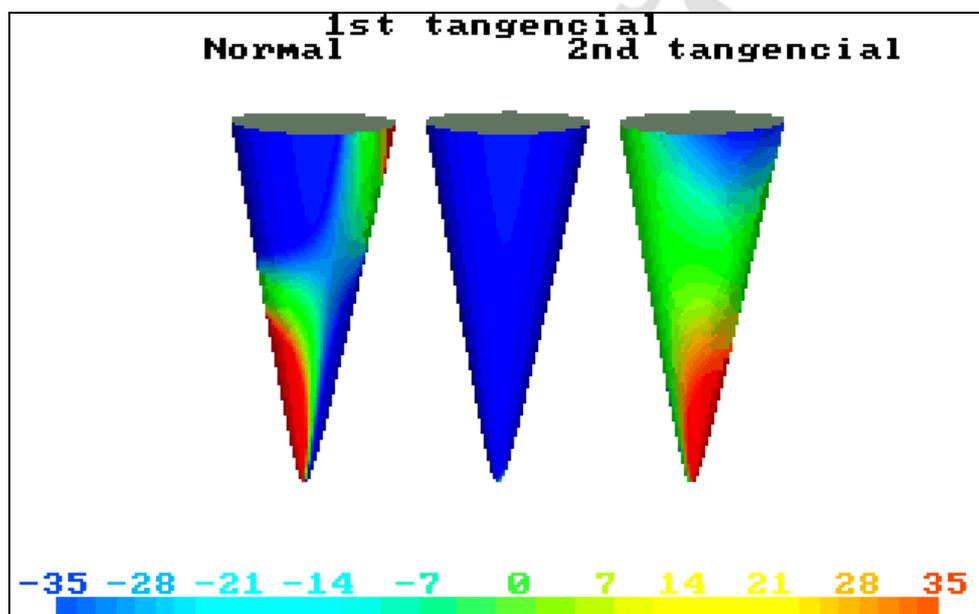
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,07	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	0	0	0	0	3,0
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		0,0253214	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0019773		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,0322525	-0,0314225	1,0324371	-0,0166627		



Здесь сила  $P_z = 75$  кг направлена вверх вдоль оси  $Oz$  стремится вырвать корень зуба, создавая растягивающие нормальные напряжения (желтый цвет). Вследствие возникающего момента  $M_y = x_c P_z$  имеем для нормальных напряжений  $\sigma_n$  на левом крайнем рисунке оттенки зеленого цвета сверху и снизу, которые характеризуют увеличение и снижение растягивающих напряжений. Здесь отмечаем также значительные касательные напряжения  $\tau_{ns}$  вдоль образующей (оранжевый цвет) и почти отсутствующие касательные напряжения  $\tau_{n\theta}$  вдоль направляющей (не яркий зеленый цвет).

Пример 5

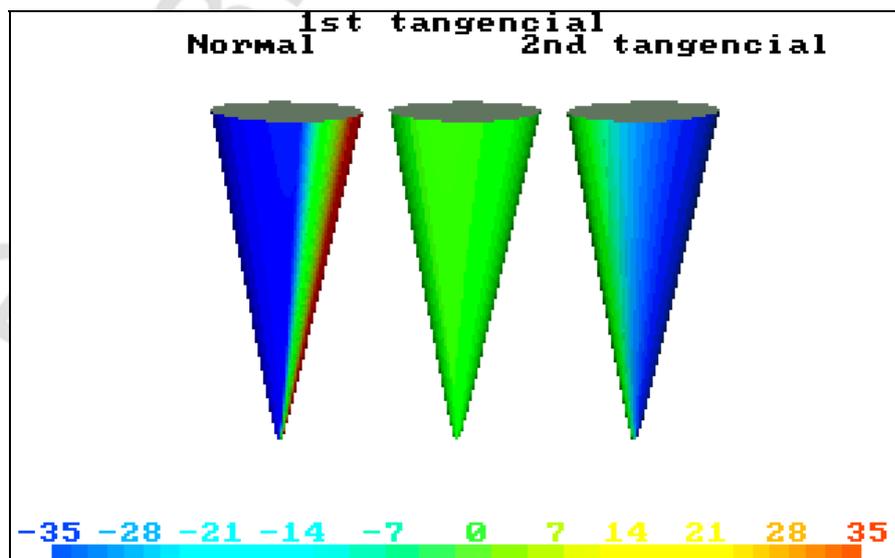
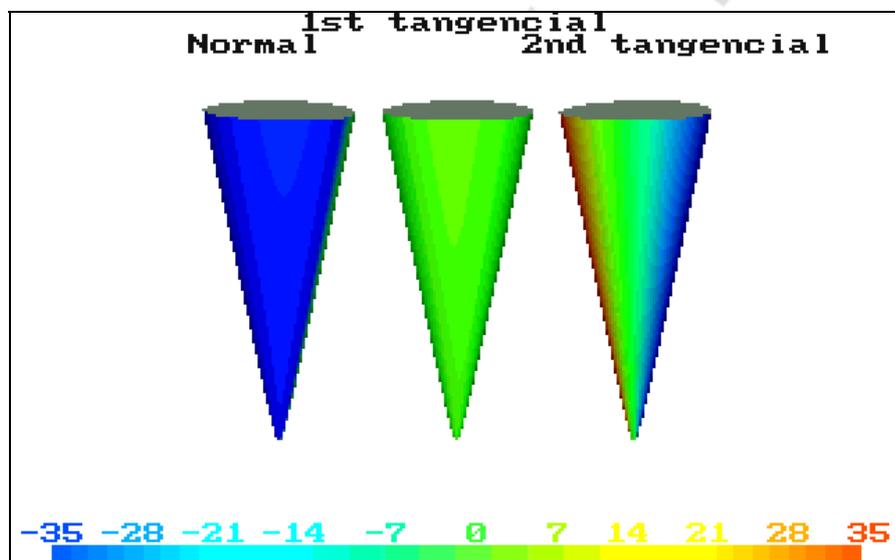
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	180	0	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,0236675	
Углы поворота, радианы					
$\Phi_x$		$\Phi_y$		$\Phi_z$	
0		0,0346355		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,1255659	-0,0318849		1,1257419	-0,0167081	



Этот случай соответствует внецентренному сжатию периодонта, в результате чего верхняя часть периодонта в области  $x > 0$  находится в условиях повышенной сжимающей нагрузки, а нижняя часть в условиях растяжения. Здесь возникают значительные как нормальные, так и касательные напряжения, изменяющиеся по высоте корня зуба и по контуру сечения. Этот пример показывает неблагоприятное воздействие момента, который неизбежно возникает при использовании консольных протезов и мостовидных протезов большой длины.

#### Пример 6

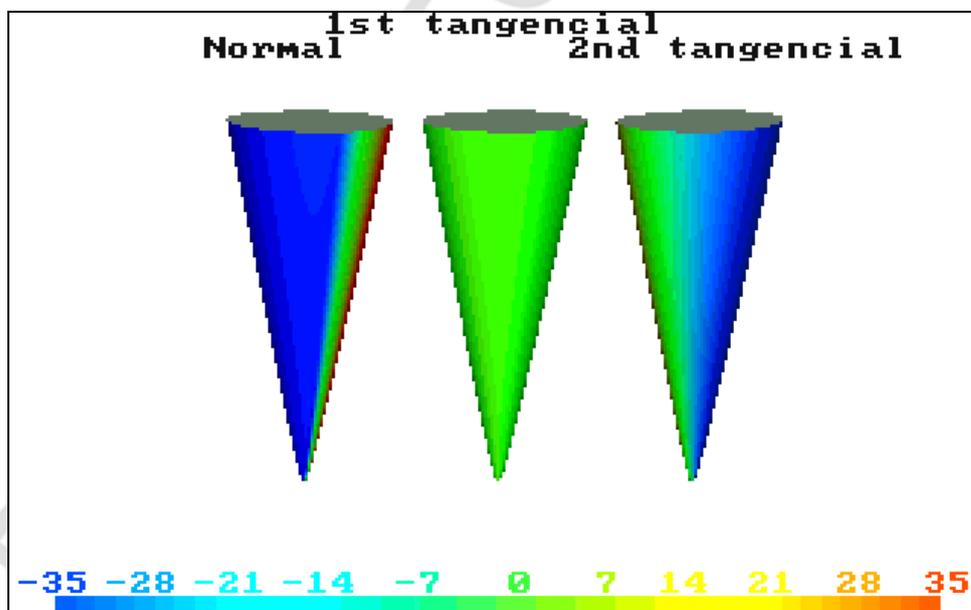
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	-0,03	0	0,93
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0146616		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0,0005468		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,1255659	-0,0318849		1,1257419	-0,0167081	



Рассматриваемый пример соответствует поступательному перемещению вдоль оси  $Ox$ . На диаграмме напряжений четко просматриваются зоны давления и растяжения периодонта под действием нормальных напряжений  $\sigma_n$ . Средний рисунок показывает весьма малые напряжения  $\tau_{ns}$  под действием горизонтальной силы. Крайний правый рисунок показывает значительные касательные напряжения  $\tau_{n\theta}$  вдоль направляющей, которые по контуру меняют свою величину и знак (на рисунке мы видим синий, зеленый и красный цвет).

### Пример 7

Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,0(6)	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,93
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0146616		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\Phi_x$		$\Phi_y$		$\Phi_z$	
0		-0,0000102		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,0322530	-0,0314225	1,0324377	-0,0166627		

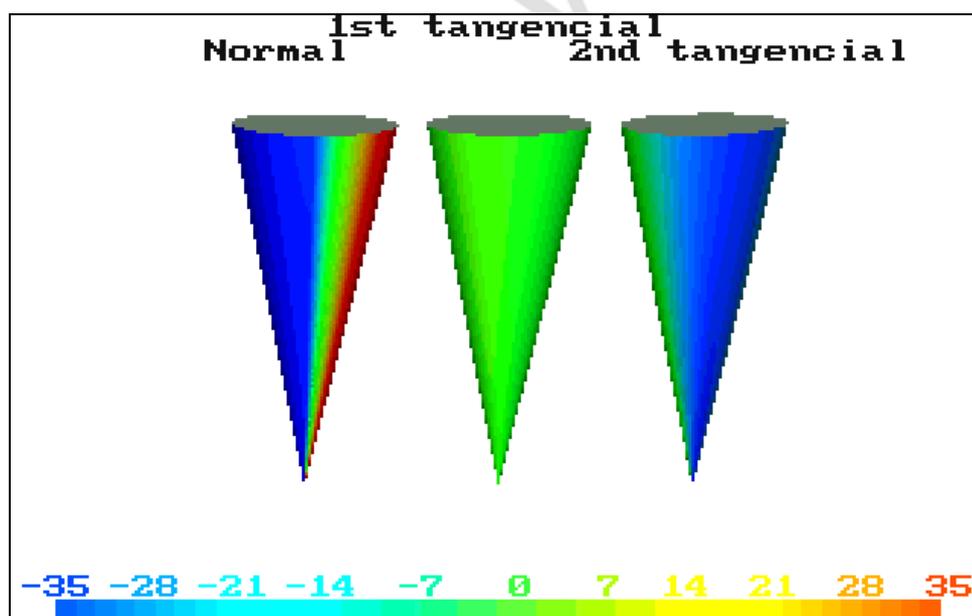


Здесь диаграммы напряжений аналогичны диаграммам, представленным в примере 6, и показывают характер распределения нормальных и касательных напряжений при поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$  под

действием силы  $P_z = 75$  кг при  $l_0 = 0,1$ . Четко просматриваются зоны сжатия и растяжения периодонта под действием горизонтальной силы (напряжения  $\sigma_n$  синего цвета переходят в зеленый, а затем в красный цвет).

### Пример 8

Полуоси эллипса, см			H-Vone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,95
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0175275		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0,0000557		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,9504804	-0,0311013		0,9506765	-0,0167698	

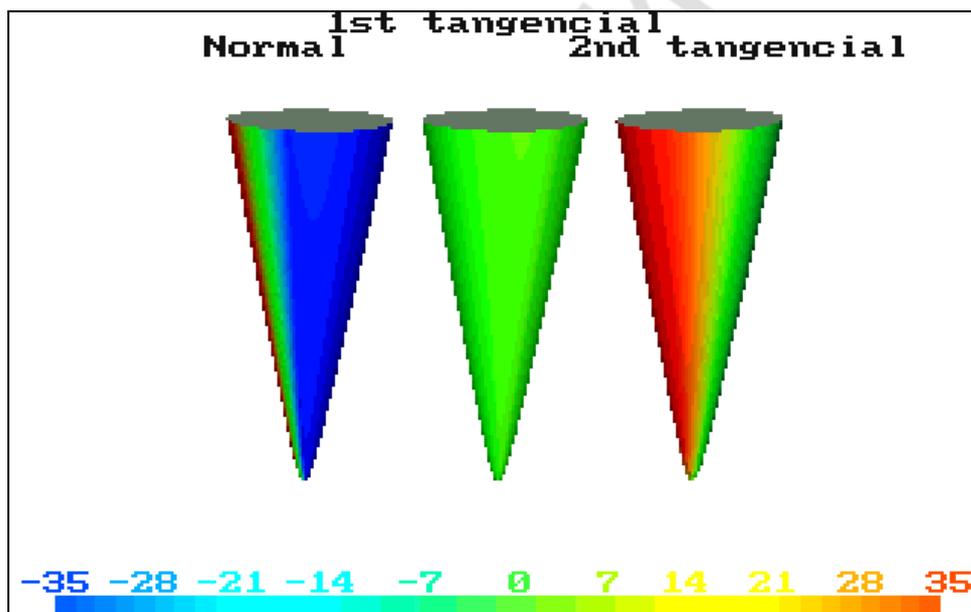


В рассматриваемом примере действие горизонтальной силы  $P_z = 75$  кг соответствует поступательному перемещению вдоль оси симметрии  $Ox$  модели корня зуба в виде кругового конуса при радиусе закругления  $l_0 = 0$ . На диаграммах напряжений четко просматривается неизменность цвета по высоте корня зуба, а также четко видны зоны сжатия (синий цвет) и растяжения (красный цвет) для нормальных напряжений. Помимо этого, четко видна незначительность касательных напряжений  $\tau_{ns}$  вдоль образующих (зеленый и салатовый цвет по всей области). Напряжения  $\tau_{n\theta}$  по всей види-

мой области одного знака (синий и бирюзовый цвет) и по величине значительно больше, чем касательные напряжения  $\tau_{ns}$ .

### Пример 9

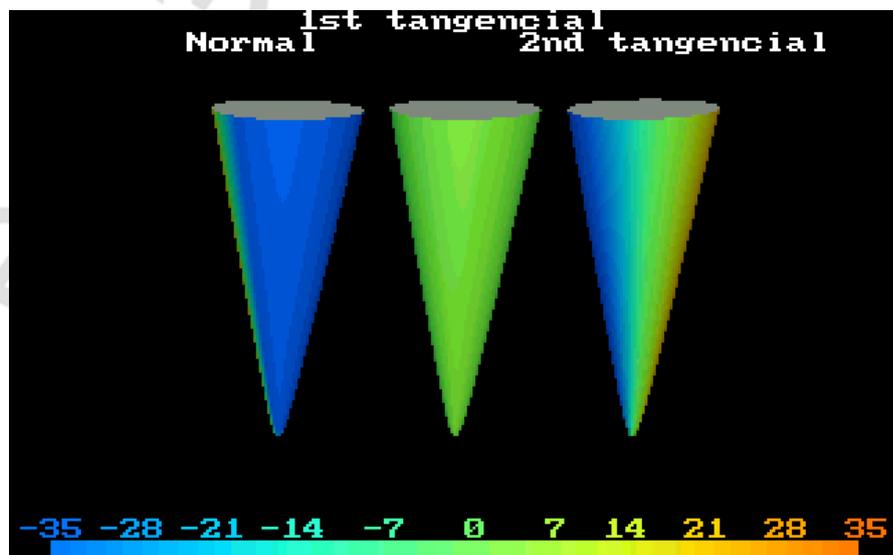
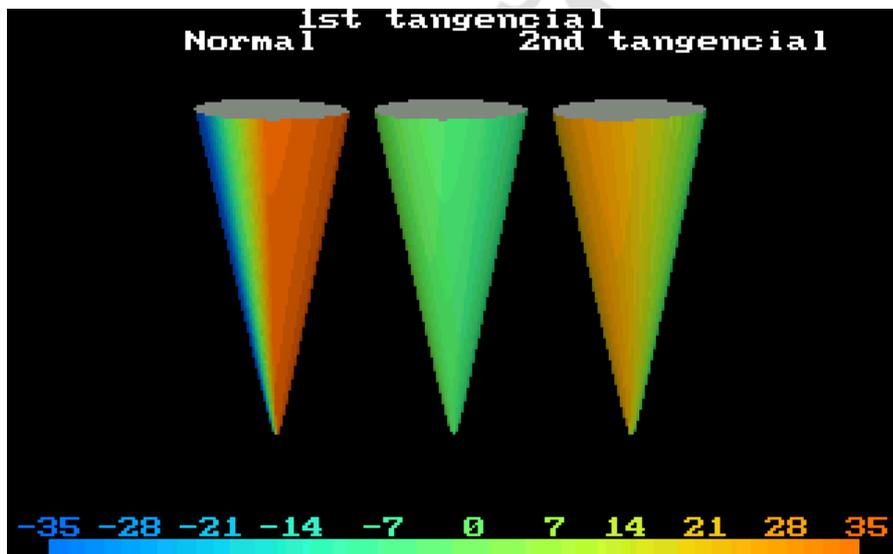
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	90	-0,03	0	0,93
Поступательные перемещения, см					
$u_0$	$v_0$		$w_0$		
0	0,0148309		0		
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$	$\varphi_y$		$\varphi_z$		
0	0		0,0000001		
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,1255659	-0,0318849	1,1257419	-0,0167081		



Направление горизонтальной силы  $P_y = 75$  кг перпендикулярно плоскости симметрии  $yOz$  и соответствует поступательному перемещению корня зуба вдоль оси  $Oy$ . На цветном изображении четко видны зоны сжатия и растяжения для нормальных напряжений  $\sigma_n$  (синий и красный цвет). Касательные напряжения  $\tau_{ns}$  вдоль образующей весьма незначительны (зеленый цвет). Касательные напряжения вдоль направляющей  $\tau_{n\theta}$  имеют все цвета радуги, что означает изменение знака напряжений по контуру. В то же время напряжения  $\tau_{n\theta}$  остаются одного знака по высоте корня.

Пример 10

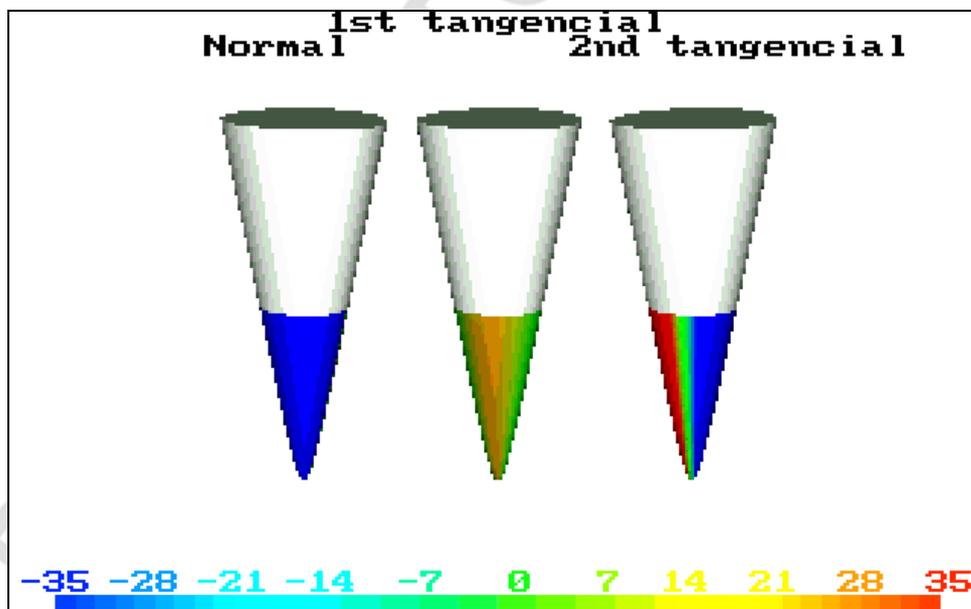
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,07	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	90	-0,03	0	0,93
Поступательные перемещения, см					
$u_0$	$v_0$		$w_0$		
0	0,0159430		0		
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$	$\varphi_y$		$\varphi_z$		
0,0004313	0		0,00003289		
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,0322530	-0,0314225	1,0324377	-0,0166627		



Действие горизонтальной силы  $P_y$  направлено вдоль линии проходящей через центр сопротивления с координатами  $(-0,03, 0, 0,93)$  параллельно оси  $Oy$ . Возникшие незначительные углы поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_z$  можно объяснить некоторым различием координат точки приложения силы и координатами центра сопротивления. Если пренебречь этими углами поворота, которые не оказывают существенного влияния на напряженно-деформированное состояние периодонта, то приведенные диаграммы напряжений показывают распределение нормальных и касательных напряжений при поступательном перемещении корня зуба вдоль оси  $Oy$ .

### Пример 11

Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	500	0,13	1,40
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,46
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0529949		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0034884		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
0,6622750	-0,0181060	0,6623743	-0,0095598		

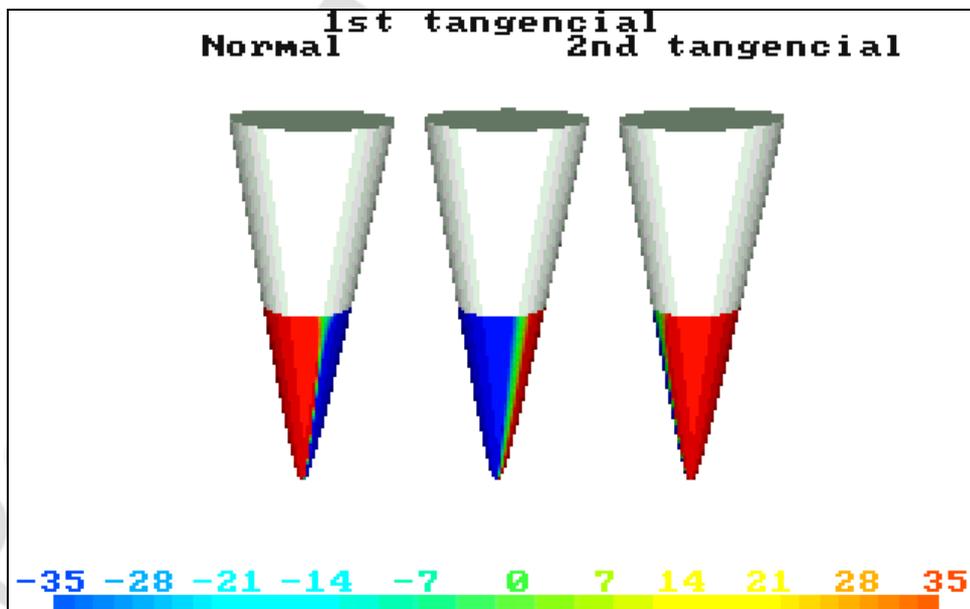


Здесь показаны цветные изображения напряженного состояния области скрепления периодонта с корнем зуба при 50 % атрофии костной ткани в случае поступательного перемещения зуба вдоль оси симметрии  $Ox$ .

Следует отметить резкое изменение цвета по контуру для нормальных напряжений, что говорит об их значительных величинах. Слабое изменение цвета для касательных напряжений  $\tau_{ns}$  вдоль образующих говорит о весьма незначительных их величинах. Наоборот, интенсивный цвет для касательных напряжений  $\tau_{n\theta}$  вдоль направляющей подтверждает их достаточно большую величину. Заметим, что округление координат центров сопротивления 0,46 вместо 0,462275 привело к резкому увеличению угла поворота от  $\varphi_y = -0,0034884$  см вместо угла  $\varphi_y = -0,0000001$ .

### Пример 12

Полуоси эллипса, см			H-Воне, %	Параметр гиперболоида, d	Высота корня зуба H, см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	50	0,13	1,40
Модуль силы, P, кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,93
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0529949		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0,7171870		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
0,6622750	-0,0181060	0,6623743	-0,0095598		

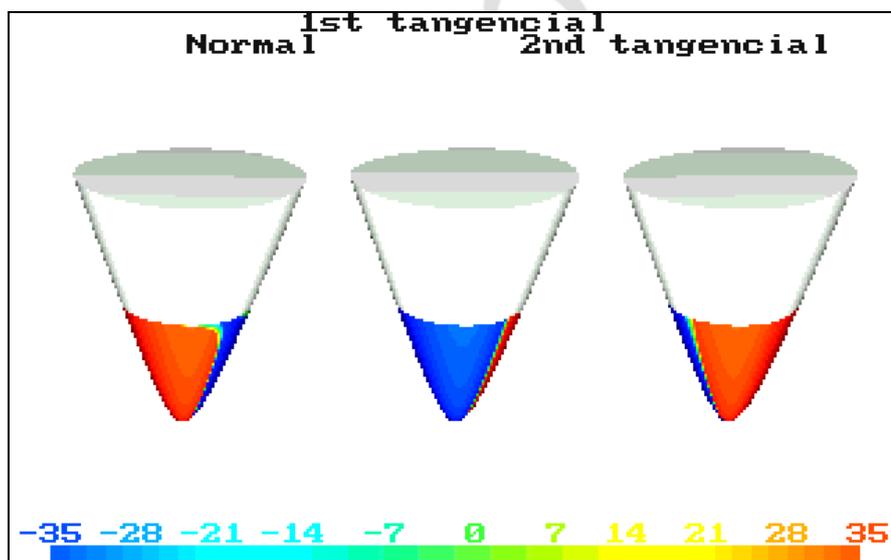


Здесь сила  $P_x$  приложена намного выше центра сопротивления. Поскольку для поступательного перемещения она должна быть приложена

в точке с координатами  $z_f = z_a - l_0 = 0,662275$  см, у вершины корня возникли зоны растяжения из-за поворота  $\varphi_y = 0,71 = 40,7^\circ$ . Все нормальные и касательные напряжения достаточно велики, причем смена знака происходит через узкую зеленую полосу.

### Пример 13

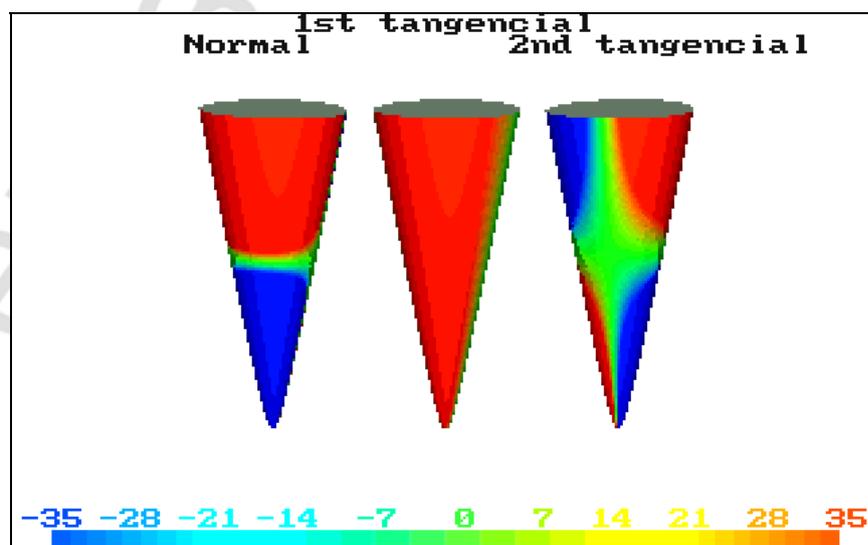
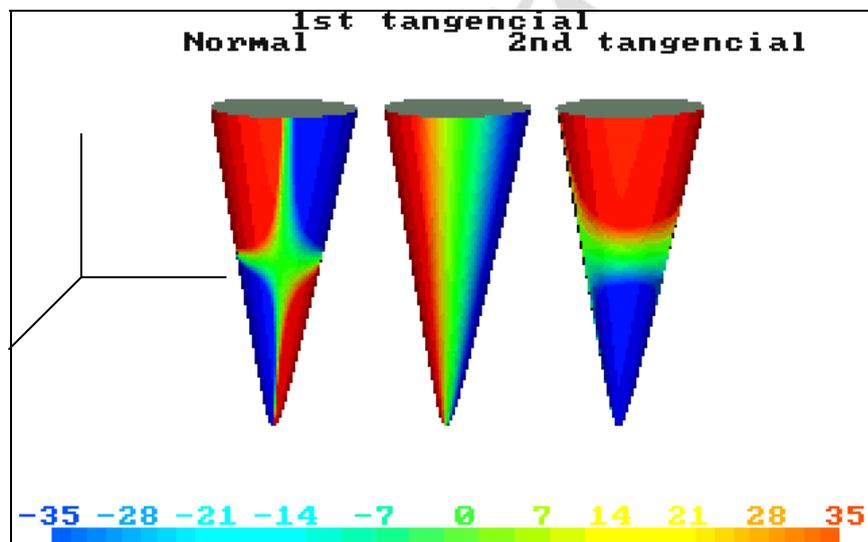
Полуоси эллипса, см			H-Bone, %	Параметр гиперболоида, d	Высота корня зуба H, см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	50	0,22	0,7
Модуль силы, P, кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,66
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,1770972		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		5,2792574		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,4436784	-0,0202527		0,4438546	-0,0134813	



Поскольку сила  $P_x$  приложена выше центра сопротивления ( $z_a = 0,4436781$  см), то кроме поступательного перемещения вдоль оси  $Ox$  возникает существенный разрушительный поворот корня относительно оси  $Oy$ . В случае 50 % атрофии костной ткани угол поворота составляет величину  $\varphi_y = 5,275 = 302,2^\circ$ . Поэтому внизу вместо зоны сжатия при поступательном перемещении вдоль оси  $Ox$  появляется зона растяжения (красный цвет) для нормальных напряжений  $\sigma_n$ , причем переход от красного к синему цвету резкий, что говорит о большом перепаде напряжений.

Пример 14

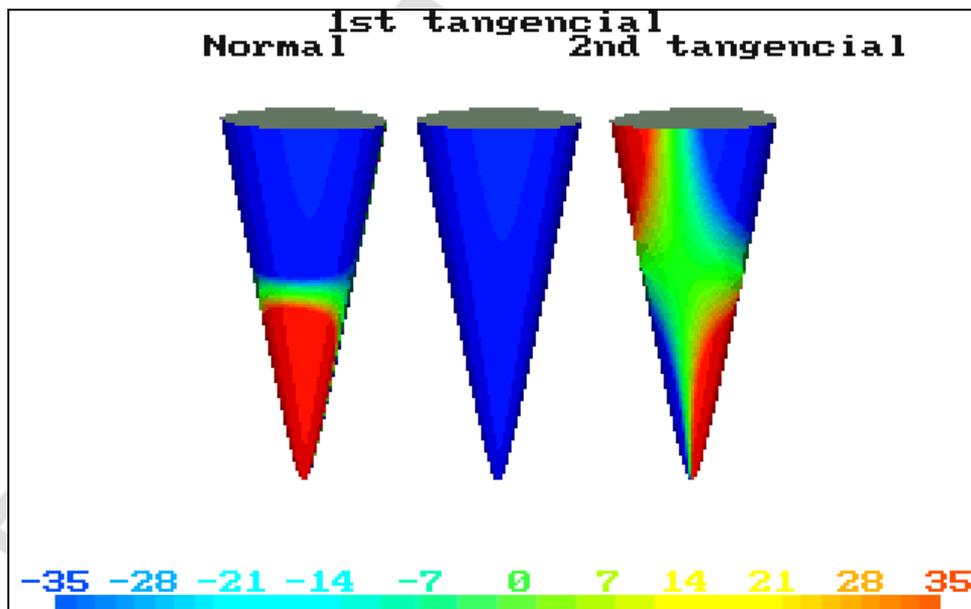
Полуоси эллипса, см			$H\text{-Bone, \%}$	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	180	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
-0,0146616		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,1339053		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,1255659	-0,0318849		1,1257419	-0,167081	

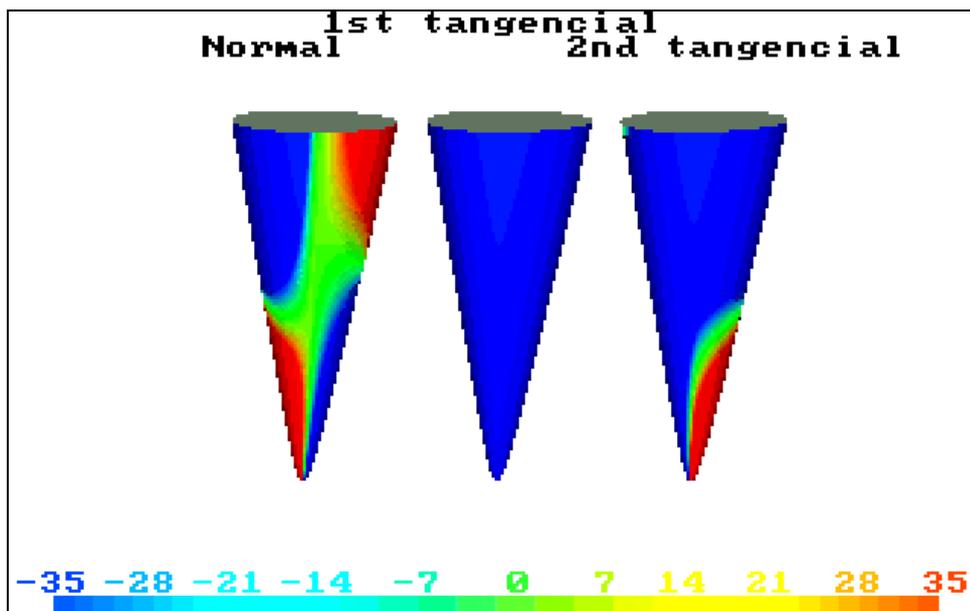


В примере рассматривается действие силы, параллельной оси  $Ox$ , направленной в сторону, противоположную положительному направлению оси  $Ox$  и лежащей в плоскости симметрии  $xOz$ . На диаграммах напряжений видны зоны сжатия и растяжения характерные для большего поворота вокруг оси  $Oy$  по часовой стрелке. Несмотря на то, что здесь имеется поступательное перемещение вдоль оси  $Ox$ , оно на порядок меньше перемещений, вызываемых поворотом вокруг оси  $Oy$ .

### Пример 15

Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	150	0	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0073308		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\Phi_x$		$\Phi_y$		$\Phi_z$	
0		0,0969479		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,1255659	-0,0318849		1,1257419	-0,0167081	

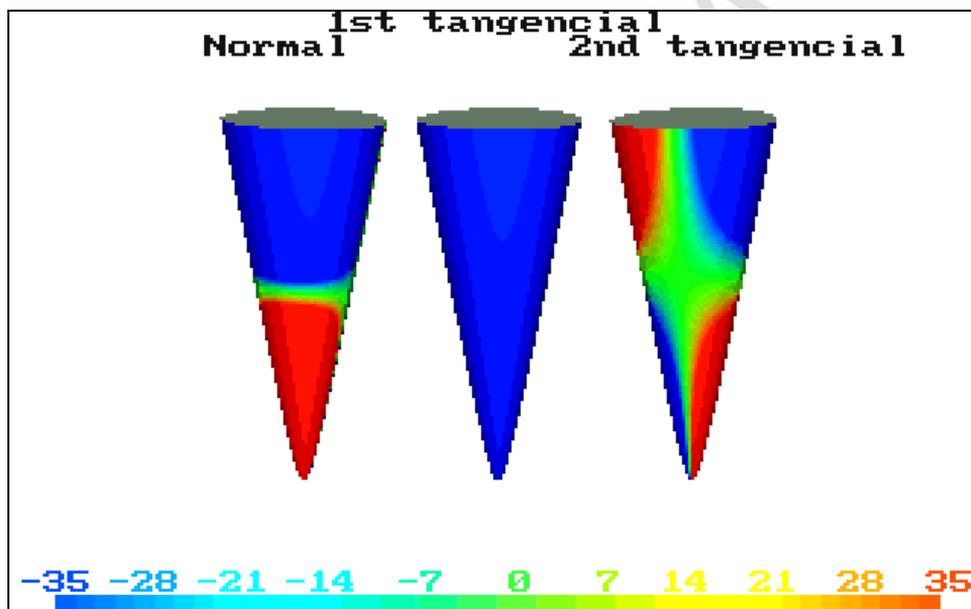
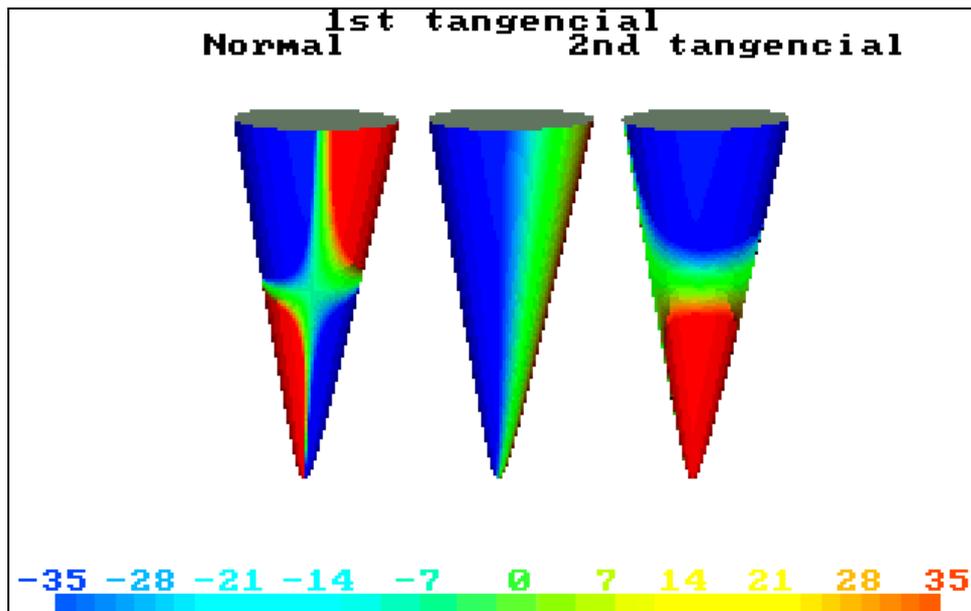




Действие силы таково, что вызывает одновременно поступательные перемещения вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ , а также поворот вокруг оси  $Oy$ . В результате имеем большую зону сжатия в верхней части периодонта при  $x > 0$ , неизменяющуюся по высоте зону незначительных касательных напряжений  $\tau_{ns}$  вдоль образующих, а также очень сложную картину распределения касательных напряжений вдоль направляющей  $\tau_{n\theta}$ , которые изменяются как по высоте, так и вдоль контура сечения.

### Пример 16

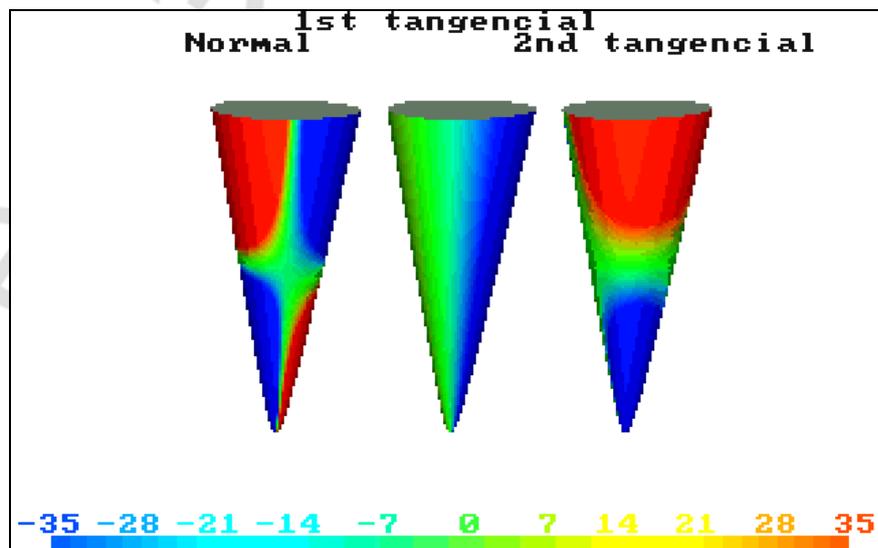
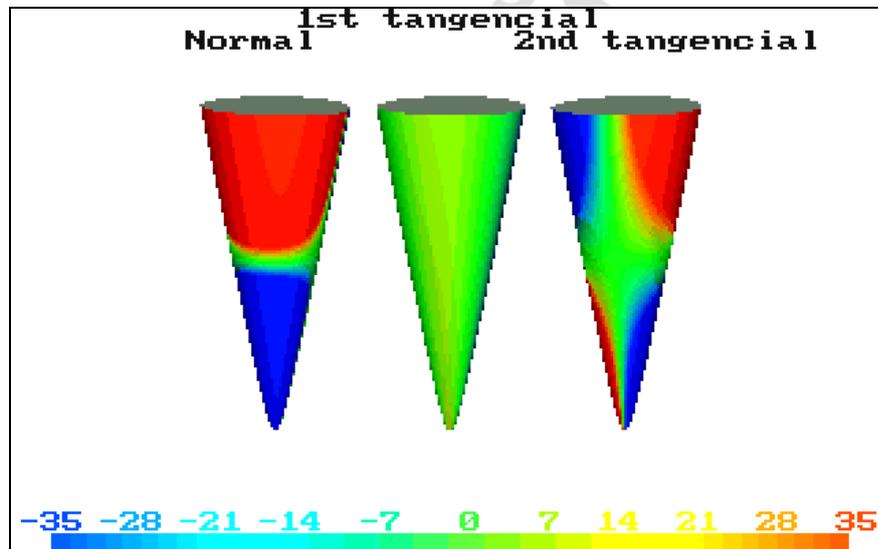
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	120	0	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0126973		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0,1332831		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$		$x_b$		$z_b$	
1,1255659		-0,0318849		1,1257419	
				$x_c$	
				-0,0167081	



По сравнению со случаем, когда сила  $P$  наклонена к горизонту под углом в  $60^\circ$ , имеем в данном случае зону растяжения в области вершины корня при  $x > 0$  несколько большую, поскольку составляющая сила вдоль оси  $Oz$  меньше в  $\sqrt{3}$  раз. Соответственно и касательные напряжения вдоль направляющей увеличиваются вследствие увеличения угла поворота вокруг оси  $Oy$ . В частности в рассматриваемом примере угол равен  $\varphi_y = 0,1332831$ , а в случае наклона силы  $P$  к горизонту под  $60^\circ$ , угол составляет  $\varphi_y = 0,0969479$ .

Пример 17

Полуоси эллипса, см			$H\text{-Bone, \%}$	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	120	180	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
-0,0126973		0		-0,0118337	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0986476		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,1255659	-0,0318849		1,1257419	-0,0167081	

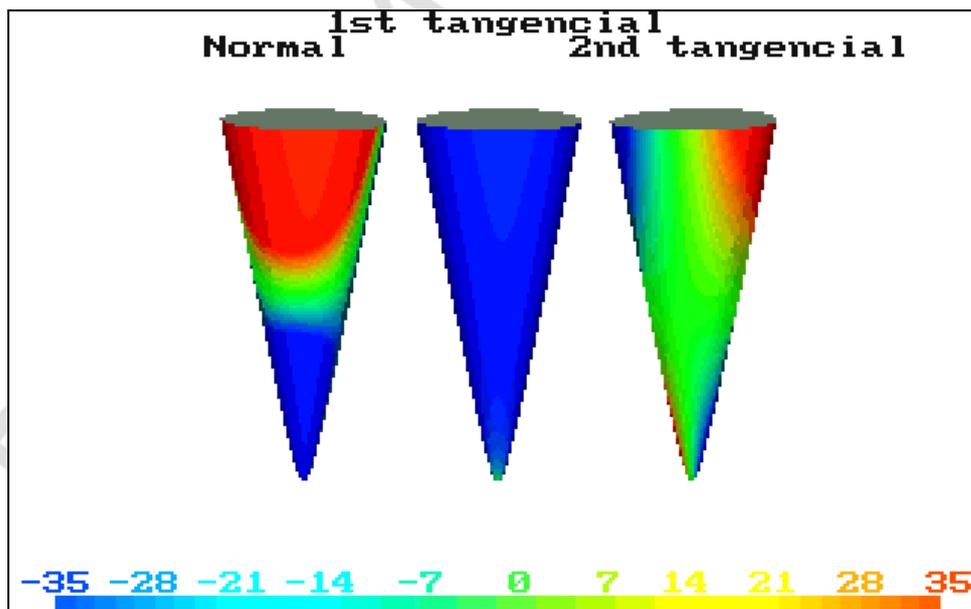


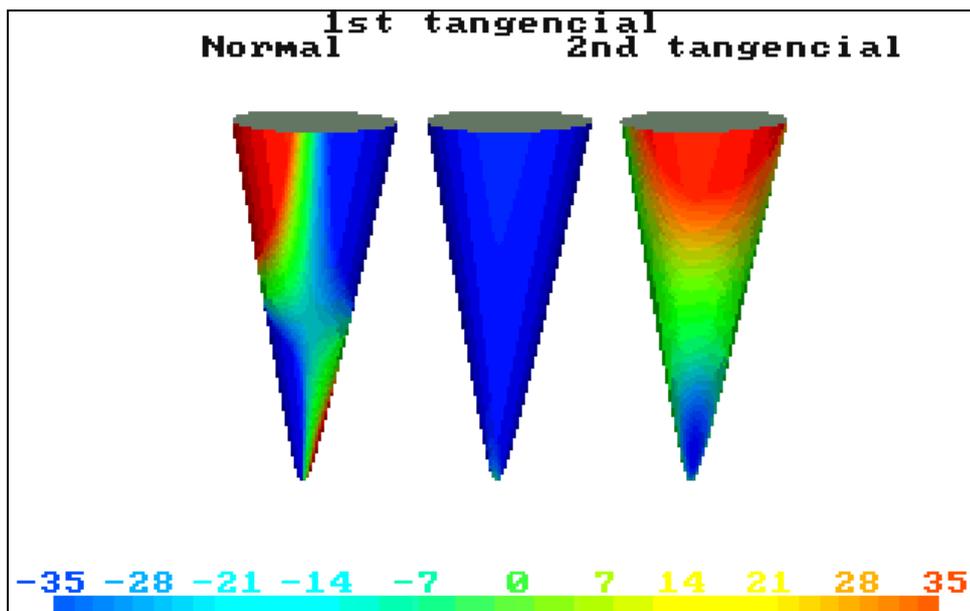
В данном случае сила расположена в плоскости симметрии  $xOz$  под углом  $30^\circ$  к плоскости  $xOy$ . Поскольку угол поворота  $\varphi_y$  достаточно велик, диаграммы напряжений показывают резкую смену знака нормальных напряжений  $\sigma_n$  и касательных напряжений  $\tau_{n\theta}$  вдоль направляющей. Касательные напряжения  $\tau_{ns}$  вдоль образующих сохраняют свой знак по высоте корня и изменяют знак по контуру сечения.

Результаты вычисления нормальных и касательных напряжений для различных случаев, выполненные на основании числовых данных примера 17, приведены в приложении.

### Пример 18

Полуоси эллипса, см			H-Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, $^\circ$		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	150	180	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
-0,0073308		0		-0,0204966	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0369574		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,1255659	-0,0318849	1,1257419	-0,0167081		

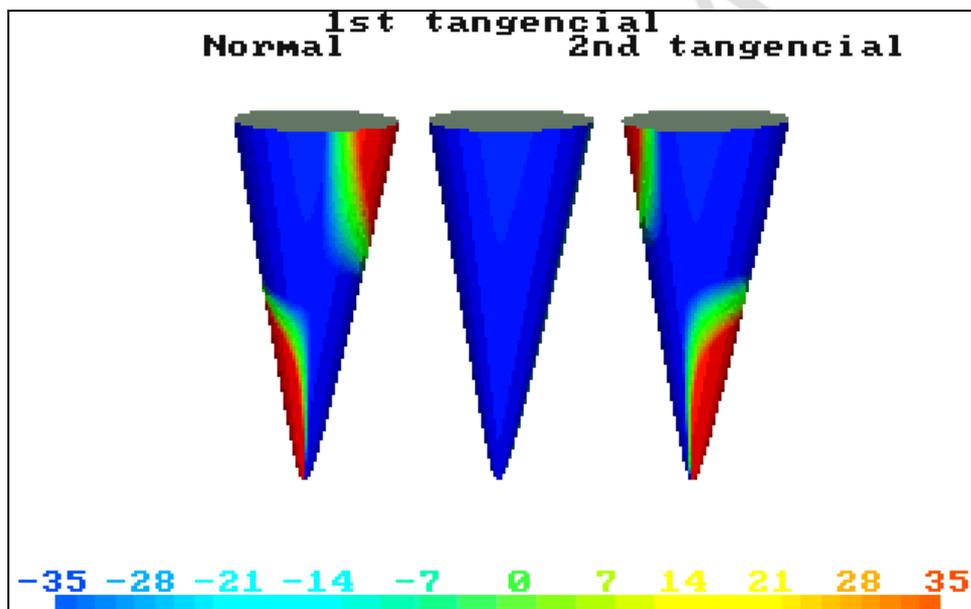
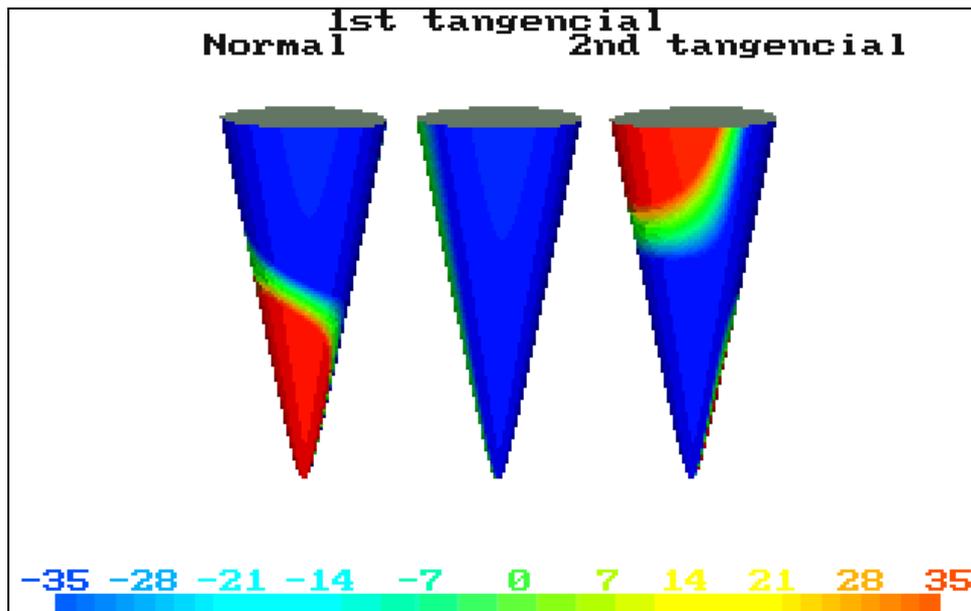




Вычисление момента силы  $M_y = P((x_f - x_c)\sin(60^\circ) - (z_f - z_a)\cos(60^\circ))$  относительно центра сопротивления под действием силы, лежащей в плоскости  $xOz$ , показывает, что вращение зуба происходит по часовой стрелке ( $\varphi_y < 0$ ). Поэтому вместо зоны сжатия в верхней части корня зуба при  $x > 0$  получаем зону растяжения, причем переход к зоне сжатия плавный, т. е. имеется зона малых напряжений в виде области зеленого цвета. Отметим видимую зону синего цвета касательных напряжений  $\tau_{ns}$  вдоль образующих.

### Пример 19

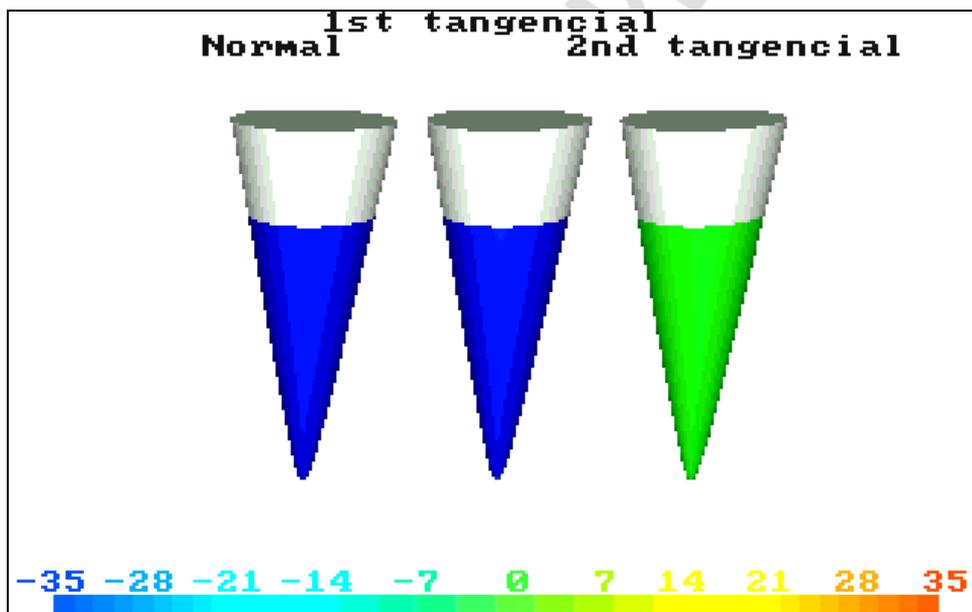
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	135	45	0,2	0,2	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0073308		0,074155		-0,167354	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
-0,285287		0,837106		-0,983076	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
1,255659	-0,318849		1,257419	-0,167081	



В рассматриваемом примере действие силы осуществляется не в плоскости симметрии корня. Все шесть компонентов, характеризующих перемещение зуба, как абсолютно твердого тела, не равны нулю. Таким образом, имеем поступательные перемещения вдоль трех осей координат и ненулевые углы поворота вокруг трех осей координат. На диаграммах напряжений видны зоны сжатия и растяжения, изменяющиеся по высоте корня для нормальных напряжений. Такую же сложную гамму цветов имеем для касательных напряжений.

Пример 20

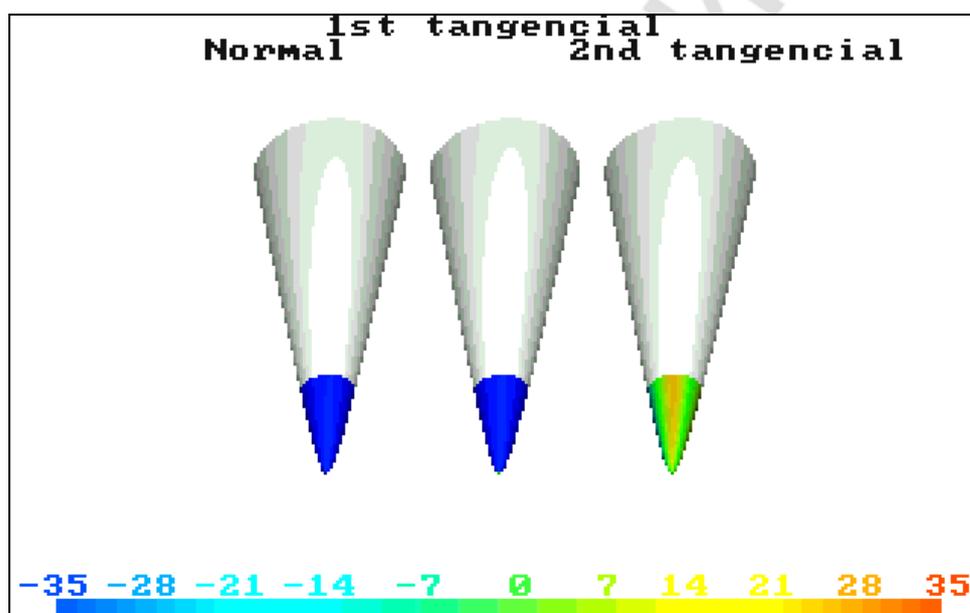
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	75	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	180	0	-0,01	0	3
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,0403728	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,8933431	-0,0250293		0,8934807	-0,0131449	



Здесь мы имеем поступательное перемещение вдоль оси  $Oz$  при 25 % степени атрофии костной ткани ( $0,75 H$ ). Перемещение вдоль оси  $Oz$  равно  $w_0 = 0,4$  мм, что говорит о небольших напряжениях.

### Пример 21

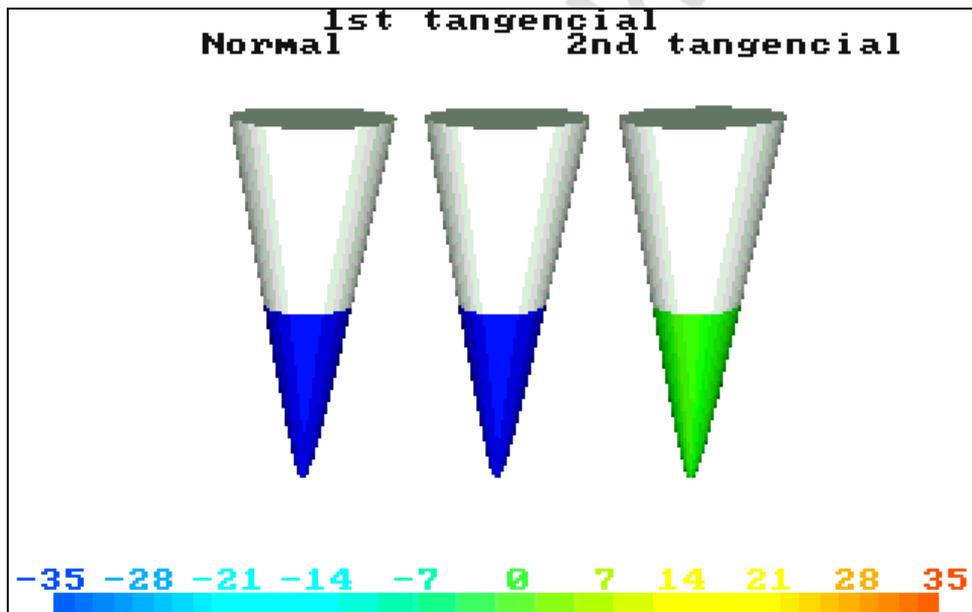
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	25	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	180	0	-0,01	0	3
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,2980358	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0,0000007		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,4326219	-0,0109447		0,4326831	-0,0058902	



Направление нагрузки соответствует поступательному перемещению зуба вдоль вертикальной оси  $Oz$  при 75 % степени атрофии (25 %  $H$ ). Перемещение вдоль оси  $Oz$  равно почти 3 мм, что дает основание утверждать о возникновении больших напряжений. При этом отмечаем распределение цветов для напряжений  $\tau_{n\theta}$ , которое не наблюдается при отсутствии атрофии костной ткани вследствие их незначительности, приведенное на диаграммах в примеры 1, 2, 3 и 4.

Пример 22

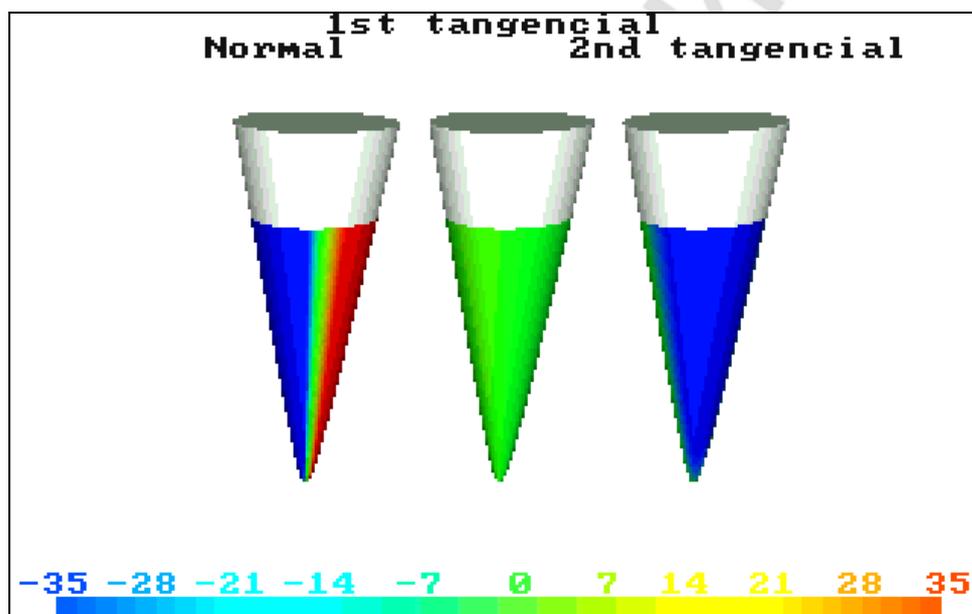
Полуоси эллипса, см			$H\text{-Bone, \%}$	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	50	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	180	0	-0,01	0	3
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0		0		-0,0849803	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,6622750	-0,0181060		0,6623743	-0,0095598	



Действие силы приводит к поступательному перемещению зуба вдоль вертикальной оси  $Oz$  при 50 % степени атрофии костной ткани. Перемещение вдоль оси  $Oz$  равно  $w_0 = 0,85$  мм. Поэтому напряжения не столь велики, как при 75 % атрофии, причем напряжения  $\tau_{n0}$  почти не меняют свой слабо зеленый цвет, что говорит об их незначительности.

### Пример 23

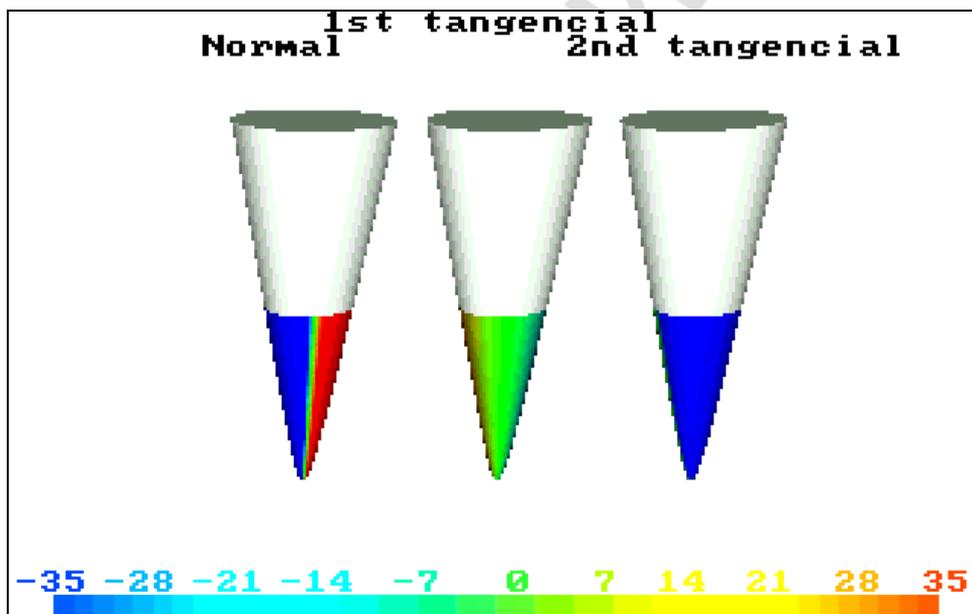
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	75	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,7
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,250626		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		0		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,8933431	-0,0250293		0,8934807	-0,0131449	



Под действием силы корень зуба при 25 % степени атрофии ( $0,75 H$ ) совершает поступательное перемещение вдоль оси  $Ox$ . На диаграмме напряжений четко просматриваются зоны сжатия и растяжения для нормальных напряжений, причем имеется узкая полоска зеленого цвета, что говорит о плавном перепаде напряжений. Касательные напряжения  $\tau_{ns}$  незначительны, но все же реагируют на изменение знака. Интенсивный цвет напряжений  $\tau_{n\theta}$  говорит о их значительных величинах.

Пример 24

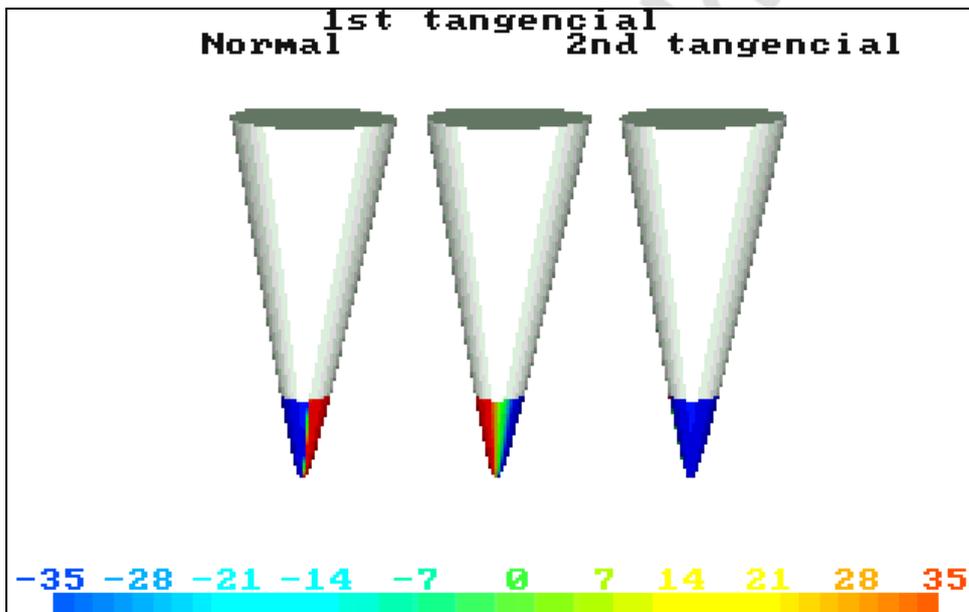
Полуоси эллипса, см			$H\text{-Bone, \%}$	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	50	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,46
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0529949		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0000001		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,6622750	-0,0181060		0,6623743	-0,0095598	



Из этого примера видно, что при точном задании координаты  $z_a$  центра сопротивления, получаем чистое поступательное перемещение вдоль оси  $Ox$  вопреки случаю в примере 11, когда возникает вследствие округления угол поворота  $\varphi_y$ . Напряженное состояние, возникающее в данном случае, аналогично напряженному состоянию, рассмотренному в примере 11.

### Пример 25

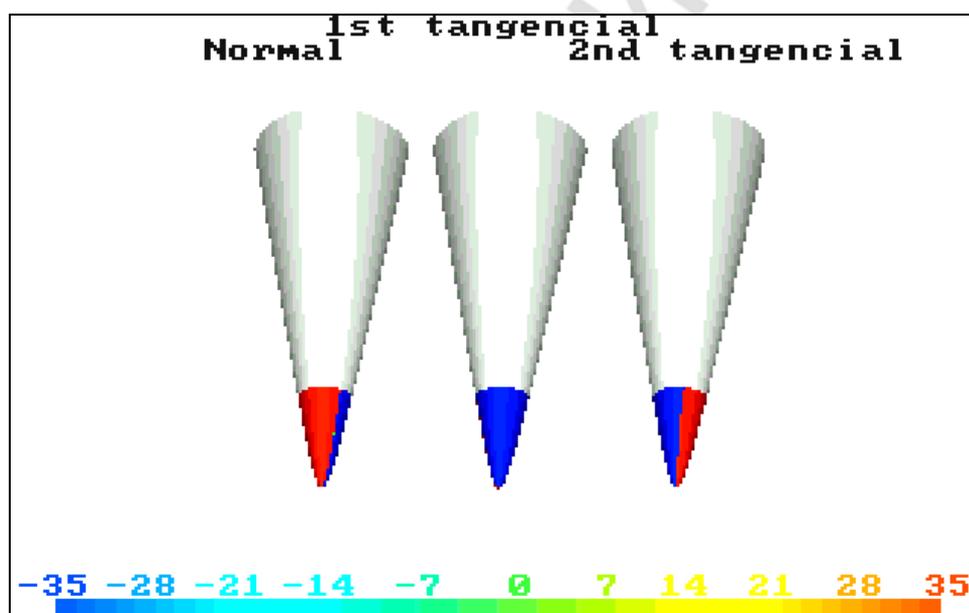
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	25	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	0	0	0	0,23
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,1886387		0		0	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
0		-0,0000003		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,4326219	-0,0109447		0,4326831	-0,0058902	



В случае действия силы  $P = 75$  кг, приложенной в точке с координатами  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $z = 0,2326219$  см, получаем поступательное перемещение вдоль оси симметрии  $Ox$ . Все углы поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  равны нулю, а перемещение вдоль оси  $Ox$  достигает 0,1886387 см, что вызывает появление больших нормальных и касательных напряжений. Отметим, что напряжения, а также углы поворота не достигают больших значений, как в случае возникновения катастрофических углов поворота в следующем примере 26.

### Пример 26

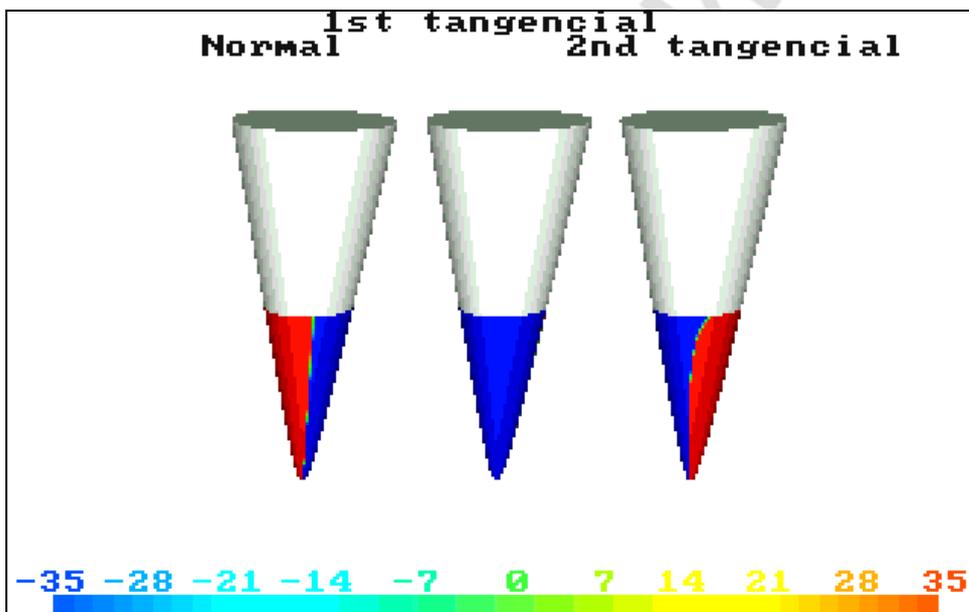
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	25	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	135	45	0,2	0,2	2,2
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0943193		0,0954006		-0,2107431	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
-165,72377		23,3979050		-161,56164	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,4326219	-0,0109447		0,4326831	-0,0058902	



Здесь в случае действия силы 75 кг, приложенной к корню зуба под углами  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ , при 75 % степени атрофии (0,4  $H$ ) наблюдаем отсутствие зеленого цвета и резкие переходы от одного цвета к другому, что говорит о значительных перепадах нормальных и касательных напряжений. Анализ численных значений углов поворотов  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$  показывает разрушительность указанных напряжений. Зуб в этом случае неотвратимо разрушает периодонт и освобождается от связей с костной тканью.

Пример 27

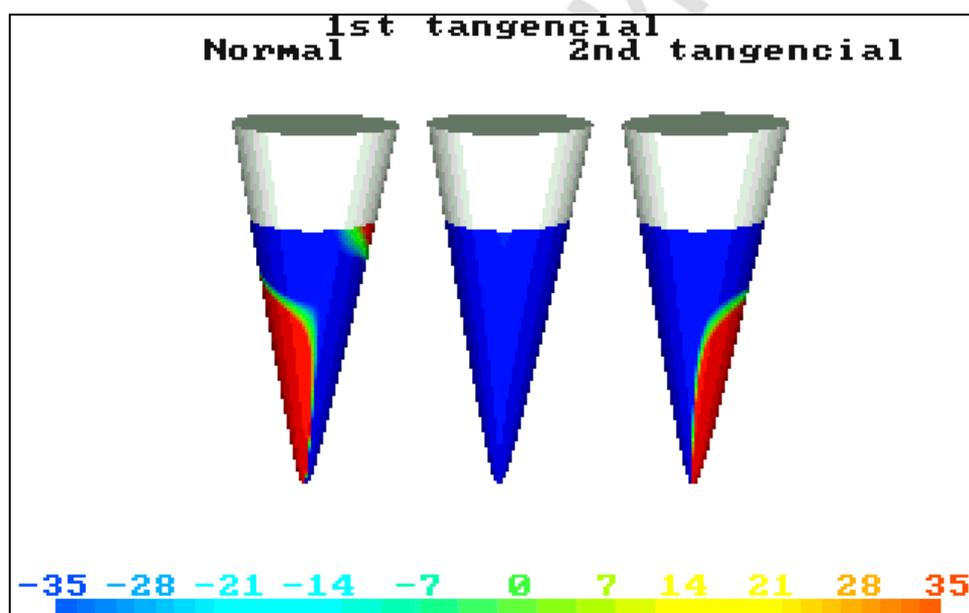
Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	50	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	135	45	0,2	0,2	2,2
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,264974		0,0268028		-0,0600901	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
-3,2007977		1,5594858		-2,7623228	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$		$z_b$	$x_c$	
0,6622750	-0,0181060		0,6623743	-0,0095598	



Действие силы  $P = 75$  кг таково, что при 50 % степени атрофии костной ткани возникают разрушительные углы поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  и  $\varphi_z$ , и зуб вместе с корнем освобождается от связи с костной тканью.

### Пример 28

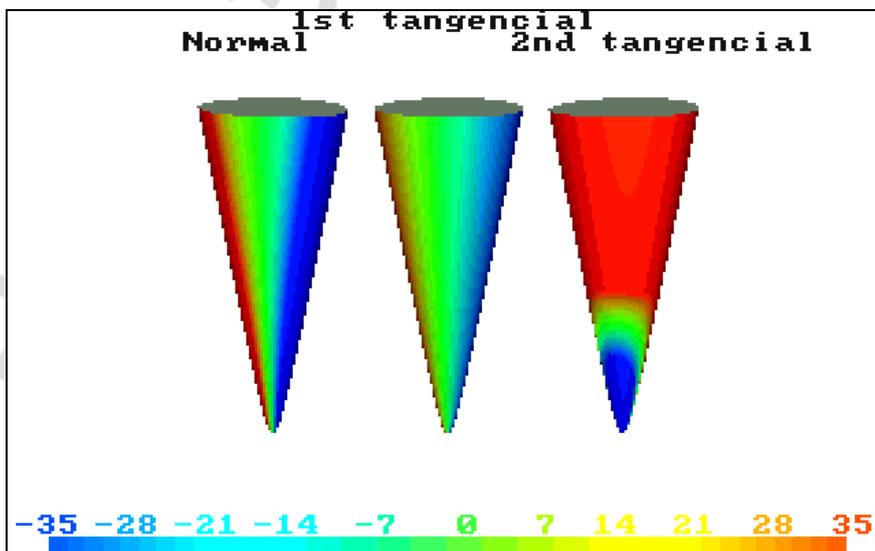
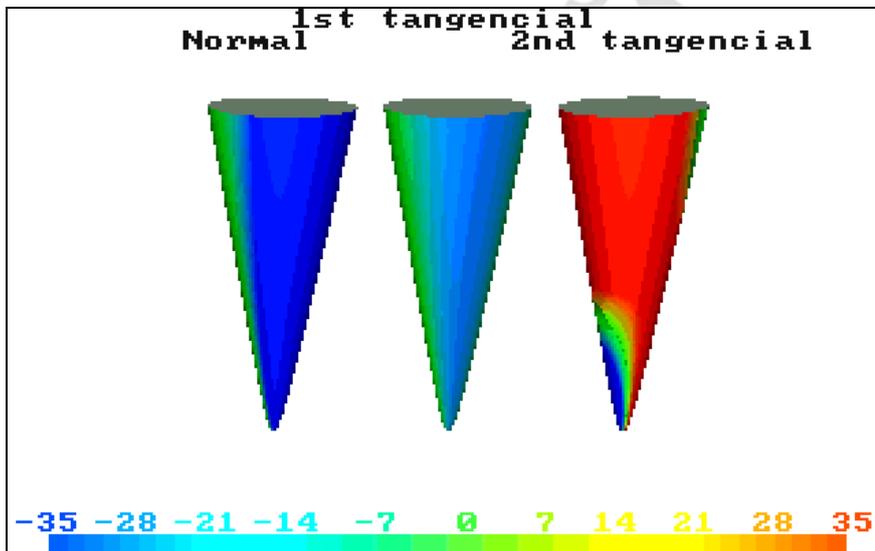
Полуоси эллипса, см			$H\text{-Bone, \%}$	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	75	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	135	45	0,2	0,2	2,2
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
0,0125313		0,0126759		-0,0285479	
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$		$\varphi_y$		$\varphi_z$	
-0,5011898		0,2970150		-0,4062043	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
0,8933431	-0,0250293	0,8934807	-0,0131449		



В данном случае сила, действующая на зуб, находится в плоскости, содержащей ось  $Oz$ , и является биссектрисой координатной плоскости  $xOy$ . Имеем степень атрофии 25 % ( $0,75 H$ ). Диаграмма напряжений показывает, что возникают ненулевые поступательные перемещения корня зуба и углы поворота. Из рисунка видна сложная гамма цветов для нормальных и касательных напряжений  $\tau_{n\theta}$ .

Пример 29

Полуоси эллипса, см			$H$ -Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	90	90	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$	$v_0$		$w_0$		
0	0,0148309		0		
Углы поворота, радианы					
$\varphi_x$	$\varphi_y$		$\varphi_z$		
-0,0794519	0		0,1196007		
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,1255659	-0,0318849	1,1257419	-0,0167081		



В этом примере горизонтальная сила  $P$ , параллельная оси  $Oy$ , вызывает кручение зуба вокруг оси  $Oz$ , поступательное перемещение вдоль оси  $Oy$  и поворот зуба вокруг оси  $Ox$ . На рисунке поворот вокруг оси  $Ox$  визуализируется сменой цветов для касательного напряжения  $\tau_{n\theta}$  по высоте корня зуба. Для нормальных напряжений  $\sigma_n$  и касательных напряжений  $\tau_{ns}$  смена цветов имеется лишь по контуру поперечного сечения корня.

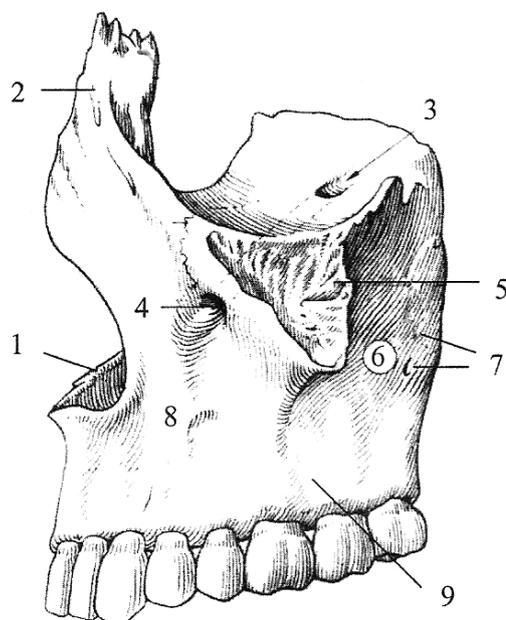
Заметим, что соответствующие каждому рисунку исходные данные и результаты расчета кинематических характеристик зуба, позволяют по формулам, приведенным в предыдущих главах монографии, определить жесткость зуба во всех направлениях, уравнение винтовой оси, угол поворота вокруг этой оси и перемещение вдоль нее, а также напряжения в области контакта периодонта и корня зуба.

## Часть 2. Биомеханика системы зуб–костная ткань

### Глава 1 Строение верхней и нижней челюстей и физико-химические свойства костной ткани

#### 1.1. АНАТОМИЯ ЧЕЛЮСТЕЙ

Верхняя челюсть, представленная на рис. 1.1, является парной костью. Она формирует большую часть средней трети лицевого черепа. Верхняя челюсть также принимает участие в образовании боковой стенки носовой полости, нижней стенки глазницы и верхней стенки ротовой полости. Книзу от грушевидного отверстия носа по средней линии правая и левая кости срастаются между собой при помощи межверхнечелюстного шва.



*Рис. 1.1.* Левая верхняя челюсть; вид с латеральной стороны:

1 — нёбный отросток; 2 — лобный отросток; 3 — подглазничная борозда; 4 — подглазничное отверстие; 5 — скуловой отросток; 6 — подвисочная поверхность (бугор верхней челюсти); 7 — альвеолярные отверстия; 8 — тело верхней челюсти; 9 — альвеолярный отросток.

Верхняя челюсть состоит из тела и отростков. Тело верхней челюсти представляет собой центральную часть кости и содержит верхнечелюстную пазуху. Пазуха сообщается с полостью носа через верхнечелюстную расщелину, расположенную на носовой поверхности тела. На передней поверхности тела верхней челюсти находится подглазничное отверстие. Оно проецируется на 0,5–0,75 см ниже точки пересечения подглазничного

края с вертикальной линией, проведенной через середину второго верхнего премоляра. Отверстие ведет в одноименный канал, который другим концом открывается на глазничной поверхности тела верхней челюсти. Глазничная поверхность отделена от передней подглазничным краем. Подвисочная поверхность обращена назад и имеет возвышение — бугор верхней челюсти. На подвисочной поверхности тела верхней челюсти расположены три-четыре альвеолярных отверстия, ведущие в одноименные каналы в толще кости.

Лобный отросток идет вверх и доходит до носовой части лобной кости. Скуловой отросток направлен латерально и сочленяется со скуловой костью. Нёбный отросток расположен горизонтально и формирует большую часть твердого нёба.

Альвеолярный отросток берет начало у нижнего края тела верхней челюсти. Дугообразный свободный край альвеолярного отростка называется альвеолярной дугой. В нем находятся зубные альвеолы — ячейки для корней верхних зубов. Альвеолы разделены между собой костными пластинками, которые называются межальвеолярными перегородками. Внутри альвеол, предназначенных для многокорневых зубов, находятся межкорневые перегородки. На наружной поверхности альвеолярного отростка зубным альвеолам соответствуют альвеолярные возвышения [44].

Нижняя челюсть представлена на рис. 1.2. Это самая крупная и прочная кость лицевого черепа. Она состоит из тела нижней челюсти и двух ветвей, которые сходятся с телом под углом.

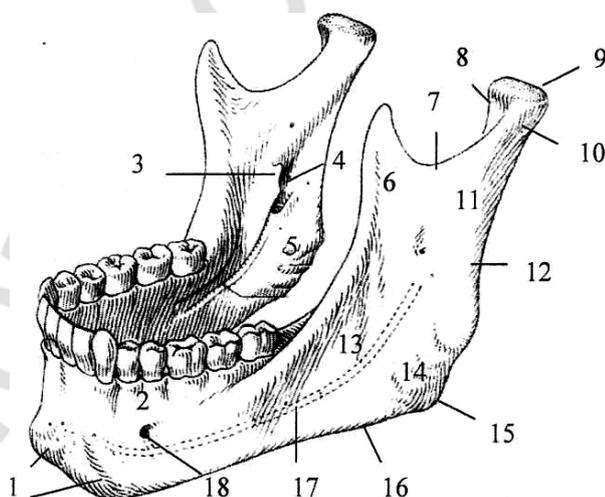


Рис. 1.2. Нижняя челюсть

1 — подбородочный выступ; 2 — альвеолярная часть; 3 — язычок нижней челюсти; 4 — отверстие нижней челюсти; 5 — крыловидная бугристость; 6 — венечный отросток; 7 — вырезка нижней челюсти; 8 — крыловидная ямка; 9 — головка нижней челюсти; 10 — шейка нижней челюсти; 11 — мышечковый отросток; 12 — ветвь низ челюсти; 13 — тело нижней челюсти; 14 — жевательная бугристость; 15 — угол нижней челюсти; 16 — основание нижней челюсти; 17 — канал нижней челюсти; 18 — подбородочное отверстие

Нижняя челюсть развивается из двух половин, а линия их слияния иногда может быть различима на наружной поверхности тела в виде слабо выраженного костного гребня, подбородочного симфиза. Нижняя часть тела челюсти называется основанием, верхняя — альвеолярной частью. Последняя содержит зубные альвеолы для корней 16 нижних зубов. Между собой альвеолы разделены межальвеолярными перегородками. На наружной поверхности тела в промежутке между альвеолярными возвышениями, соответствующими корням первого и второго премоляров, на середине расстояния между основанием нижней челюсти и ее альвеолярной частью находите подбородочное отверстие. По средней линии тела челюсти имеется подбородочный выступ, который книзу расширяется и заканчивается парным подбородочным бугорком.

На внутренней поверхности тела нижней челюсти находится ряд парных костных возвышений и ямок, которые служат местом прикрепления мышц или соответствуют месту расположения слюнных желез. На уровне подбородочного симфиза находится подбородочная ость, а сбоку от нее — двубрюшная ямка. У верхнего края подбородочной ости, ближе к зубным альвеолам, располагается подъязычная ямка. Ниже этой ямки начинается и уходит косо вверх челюстно-подъязычная линия, которая заканчивается в одном сантиметре от третьего моляра. Будучи значительно выраженной сзади, спереди челюстно-подъязычная линия менее заметна. Под этой линией на уровне моляров находится поднижнечелюстная ямка.

На наружной поверхности ветви нижней челюсти вблизи угла различается жевательная бугристость, которая служит местом прикрепления одноименной мышцы. На внутренней поверхности угла жевательной бугристости соответствует крыловидная бугристость — место прикрепления медиальной крыловидной мышцы. На внутренней поверхности ветви, несколько выше ее центра, имеется отверстие нижней челюсти, ведущее в канал нижней челюсти. В толще кости на уровне верхушек корней зубов этот канал направляется вперед и вниз, заканчиваясь подбородочным отверстием. Спереди от отверстия нижней челюсти находится тонкий, треугольной формы костный язычок. Кверху от каждой ветви отходят два отростка. Спереди находится венечный отросток — место прикрепления височной мышцы, сзади расположен мышечковый отросток. Отростки разделяет вырезка нижней челюсти. Венечный отросток представляет собой тонкий, треугольной формы вырост, направленный вверх и несколько вперед. Его передний край является продолжением переднего края ветви нижней челюсти. Верхний конец мышечкового отростка расширяется и образует головку нижней челюсти, поперечный размер которой больше переднезаднего. Головка нижней челюсти сочленяется с суставной поверхностью нижнечелюстной ямки височной кости. Непосредственно под головкой нижней челюсти находится суженная часть мышечкового отро-

стка — шейка нижней челюсти. На передней поверхности шейки локализуется небольшое углубление — крыловидная ямка, в области которой прикрепляется латеральная крыловидная мышца [44].

## 1.2. СЕГМЕНТНОЕ СТРОЕНИЕ ЧЕЛЮСТЕЙ

Так как верхняя и нижняя челюсти имеют сложное строение, для более детального их изучения Л. Е. Кудрявцева и Л. А. Лякишева (1973 г.) предложили изучать их посегментно [64]. Под зубочелюстным сегментом понимается участок всех тканевых элементов челюсти, соответственно данному зубу, включающий в себя костное вещество челюсти, зуб, периодонт и слизистую оболочку (десну). Граница между зубочелюстными сегментами проходит по линии, проведенной через середину межзубного промежутка и по межлуночковой перегородке. Полученные данные о размерах и форме корней, ширине периодонтальной щели, строении альвеолы сопоставлены с размерами челюстей.

Основу каждого зубочелюстного сегмента образует участок костного вещества челюсти, поперечное сечение которого в области резцово-челюстных сегментов обеих челюстей имеет треугольную форму. На верхней челюсти форма поперечного сечения в области моляро-челюстных сегментов приближается к прямоугольнику, а на нижней челюсти — к треугольнику.

С каждой стороны различаются по 2 резцово-челюстных, 1 клыково-челюстному, 2 премоляро-челюстных, 3 моляро-челюстных сегментов. Каждый зубочелюстной сегмент имеет наружную и внутреннюю костную пластинки, между которыми находится губчатое вещество. При увеличении высоты челюсти, значения толщины компактной пластинки сегментов возрастают, а губчатого вещества уменьшаются. Соответствующее изображение приведено на рис. 1.3. В области шейки однокорневых зубов происходит слияние компактных веществ альвеолы и челюсти. Соотношение губчатого и компактного вещества обеих челюстей в каждом зубочелюстном сегменте своеобразно и зависит от формы и порядка сегмента. Толщина компактной пластинки наименьшая с вестибулярной стороны у резцово-челюстных сегментов, возрастает к моляро-челюстным сегментам. С оральной стороны наибольшая толщина — в области клыково-челюстных сегментов. На всех препаратах заметно увеличение компактного слоя от уровня шейки зуба каждого зубочелюстного сегмента к телу челюсти.

В горизонтальном сечении челюсти костные балочки губчатого вещества, примыкающие к стенкам альвеол, имеют радиальное и тангенциальное направления. Это видно из горизонтального распила челюсти, показанного на рис. 1.4.



*Рис. 1.3.* Вертикальный распил челюсти



*Рис. 1.4.* Горизонтальный распил альвеолы

Костные балочки губчатого вещества верхней челюсти под различными углами устремлены по высоте данной кости, в нижней челюсти имеют косое направление от оральной к вестибулярной поверхности. Углы наклона балочек зависят от формы и размеров челюстей. Толщина костных балок при высокой и узкой челюсти составляет 0,1–0,35 мм, при широкой и низкой — 0,3–0,6 мм. Диаметр ячеек губчатого вещества не превышает 2,65 мм, они имеют округлую или овальную форму. При низком и широком зубочелюстном сегменте ячейки губчатого вещества имеют размеры 1,25 × 2,25 мм, т. е. меньше, чем при высоком и узком сегменте, форма ячеек в большинстве округлая. У женщин ячейки больше и костные балочки тоньше, чем у мужчин.

Альвеола погружена на различную глубину в губчатое вещество челюсти. Форма альвеол соответствует форме корней зубов. Зубные лунки сдавлены в медиодистальном направлении в большей степени в резцово-челюстных сегментах. Толщина компактной пластинки альвеолы равна 0,1–0,5 мм и зависит от порядка сегмента и уровня зуба. В компактной пластинке альвеолы имеются округлые и щелеобразные углубления, которые соединены с ячейками губчатого вещества. Размеры шаровидных углублений для резцово-челюстных сегментов равны 0,05 × 0,05 мм, щелевидных — 0,1 × 0,05 мм. В эти углубления входят зубо-альвеолярные волокна периодонта, направляясь от цемента корня к альвеоле. При отсутствии зуба антагониста толщина компактного слоя альвеолы уменьшается, ее максимальные значения достигают 0,1 мм, а сообщение с костно-мозговым пространством сегмента расширяется.

В резцово-, клыково-челюстных сегментах заметно, что корни зубов сдвинуты вестибулярно. Форма челюсти влияет на удаленность корней зубов от оральной и вестибулярной поверхностей. Корни зубов премоляро-челюстных сегментов со всех сторон окружены губчатым веществом.

Наличие скуло-челюстного гребня на верхней челюсти и наружной кривой линии на нижней челюсти приводит к смещению корней моляро-челюстных сегментов орально.

Компактное вещество свода альвеол резцов при широкой и низкой форме верхней челюсти может сливаться с компактным веществом дна полости носа. Корневая система клыка, обоих премоляров, моляров расположена в непосредственной близости с дном альвеолярной бухты верхнечелюстной пазухи. Щечные луночки моляров прилегают к дну альвеолярной бухты с оральной стороны, а с вестибулярной стороны опираются на наружную стенку верхнечелюстной пазухи. При высокой и узкой форме нижней челюсти расстояние от дна альвеолы премоляров до нижнечелюстного канала наибольшее и составляет 4,4–5 мм, а при низкой и широкой форме — 3,75–4,2 мм. Корни моляров расположены ближе к нижнечелюстному каналу.

Величина периодонтальной щели зависит от формы челюсти и уровня длины корней зубов. При ортогнатическом прикусе периодонтальная щель с оральной стороны больше, чем с вестибулярной стороны на верхней челюсти, а на нижней челюсти имеет обратное значение. При широкой и низкой челюсти периодонтальная щель всегда больше, чем при уз-

кой

и высокой челюсти на 0,05–0,1 мм. Зуб фиксирован в лунке периодонтом. Это соединительнотканная оболочка корня зуба, расположенная в щели между цементом корня и костной стенкой альвеолы. В верхнем отделе лунки периодонт соприкасается с надкостницей сегмента и десной, а через верхушечное отверстие корня сообщается с пульпой зуба. Для женщин в 52 % случаев периодонтальная щель была уже, чем у мужчин. Наиболее узкая часть периодонтальной щели приходится на середину корня, а в области шейки и верхушки корня размер щели увеличивается. Такое состояние способствует микродвижению зуба в области шейки в большем объеме, чем в области средней трети корня. При широкой и низкой форме альвеолярного отростка периодонтальная щель всегда была шире на 0,15 мм у шейки зуба, на 0,05 мм — в средней трети корня, на 0,2 мм — у дна альвеолы, чем при узкой и высокой форме альвеолярного отростка. В возрасте от 17 до 22 лет и после 50 лет происходит расширение периодонтальной щели, преимущественно в области шейки зуба и дна альвеолы соответственно до 0,35–0,5 мм у мужчин, до 0,3–0,45 мм у женщин.

Периодонтальная щель на 70–90 % занята фиброзными волокнами, идущими от лунки зуба к цементу. 10–30 % площади периодонтальной щели приходится на рыхлую соединительную ткань, пронизанную сосудами и нервами. Между соединительнотканскими волокнами перицементы находятся клеточные элементы (фибробласты, гистиоциты, остеобласты, клетки мезенхимы и др.). Толщина коллагеновых волокон периодонта составляет 0,15–0,2 мм у мужчин, 0,1–0,15 мм у женщин. По направлению к верхушке корня количество рыхлой соединительной ткани возрастает. Промежутки между коллагеновыми волокнами периодонта достигают 0,1 мм. С возрастом (после 50 лет) толщина коллагеновых волокон уменьшается на 0,05 мм, а промежутки между ними, занятые рыхлой соединительной тканью, увеличиваются.

Направление волокон периодонта зависит от уровня корня и порядка зубочелюстного сегмента. Мы выделяем зубо-десневую, зубо-альвеолярную и межзубную группы пучков коллагеновых волокон, толщина и количество которых будет различно для каждого зубочелюстного сегмента.

Зубо-десневые пучки ориентированы от цемента корня в области дна десневого кармана к соединительной ткани десны. Наибольшее количество волокон располагается с оральной и вестибулярной поверхности сегмента. Их толщина не превышает 0,1 мм.

Зубо-альвеолярные пучки идут от средней, нижней трети и верхушки корня зуба (верхушечная группа) к костной альвеоле. Большая часть этих волокон входит в углубления компактной пластинки альвеолы, где и фиксируется. Волокна периодонта, идущие от середины корня, имеют косое

направление снизу вверх от цемента к альвеоле, толщина этих пучков достигает 0,2 мм. Меньшая часть зубо-альвеолярных пучков направляется к вершине костной альвеолы и входит в надкостницу. Волокна периодонта, соответствующие нижней трети корня, идут горизонтально, верхушечная группа пучков — почти вертикально, приближаясь к оси зуба. Эти пучки фиксируют верхушку корня к своду (дну) альвеолы. Зубо-альвеолярные пучки хорошо выражены со всех сторон зуба, но плотнее расположены друг к другу на оральной и вестибулярной поверхностях. Часть зубо-альвеолярных пучков идет тангенциально по отношению к корню зуба, т. е. начинаются пучки и оканчиваются на альвеоле, своей серединой лишь касаясь корня зуба. Косые, горизонтальные и тангенциальные пучки

создают сложное переплетение в периодонте. Изменение функциональной нагрузки на зуб приводит к изменению направления волокон периодонта. При отсутствии зуба антагониста в 5 % случаев косые волокна меняют свое направление на противоположное, но чаще 95 % наблюдений — пучки приобретают лишь более горизонтальное положение. Межзубные пучки способствуют распределению жевательного давления в пределах зубного ряда. Эта мощная связка соединяет рядом стоящие зубы, начинаясь в пределах одного резцово-челюстного **сегмента** от цемента корня, она идет в соседний резцово-челюстной **сегмент** с одной и клыково-челюстной сегмент с другой стороны через межзубные промежутки соответствующего зуба. Толщина межзубных пучков составляет 1,0–1,5 мм.

Межзубная перегородка имеет форму, обусловленную внешним строением зубочелюстных сегментов. При узкой и длинной форме челюсти межзубная перегородка в резцово-, клыково-челюстных сегментах

треугольная; в премоляро-, моляро-челюстных сегментах — трапециевидная, а при широкой и короткой форме челюсти — прямоугольная. В десне зубочелюстных сегментов обеих челюстей с вестибулярной стороны подслизистый слой встречается только у зубодесневого сосочка. Выше видны лишь пучки фиброзных волокон, плотно фиксирующие десну к надкостнице челюсти. С оральной стороны расположен подслизистый слой, толщина которого увеличивается от формы верхней челюсти, зубочелюстного сегмента и уровня длины корня. Подслизистый слой зубочелюстных сегментов нижней челюсти имеется только в области зубодесневых сосочков.

Толщина десны с вестибулярной стороны колеблется в зависимости от зубочелюстного сегмента: 0,5–1,15 мм для обеих челюстей с оральной стороны — 0,9–4,85 мм для верхней челюсти, а для нижней челюсти — 0,75–1,25 мм. После удаления зуба десна над альвео-

лой утолщается в результате повышенной механической нагрузки. Десна у пожилых людей (после 50 лет) истончается. У женщин десна тоньше, чем у мужчин в среднем на 0,1 мм. При широкой и низкой челюсти десна зубочелюстного сегмента будет толще, чем при узкой и высокой челюсти на 0,25 мм.

### 1.3. ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ КОСТНОЙ ТКАНИ ЧЕЛЮСТЕЙ

Одним из важных параметров для определения свойств костной ткани является ее микротвердость. Обнаружена зависимость микротвердости от возраста, с годами она возрастает. По данным Е. В. Боровского и соавторов (1975 г.) средняя величина микротвердости костной ткани верхней и нижней челюсти здорового человека практически одинакова. Не обнаружено различий микротвердости между фронтальным и боковым участками челюстей, а также компактным и губчатым веществом. Данные микротвердости (в кг/мм<sup>2</sup>) челюстных костей здоровых людей в возрасте 19–20 лет представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Показатели микротвердости челюстных костей

Челюсть	Участок челюсти			
	фронтальный		боковой	
	Компактное вещество	Трабекулы губчатого вещества	Компактное вещество	Трабекулы губчатого вещества
Верхняя	45,3 + 0,98	46,1 ± 1,02	44,2 + 1,29	43,7 ± 1,2
Нижняя	46,7 ± 1,21	46,6 ± 1,29	45,9 ± 1,24	44,3 ± 1,13

Средняя величина микротвердости компактного и губчатого вещества челюстей здорового человека в возрасте 19–20 лет колеблется в пределах соответственно 44,2–45,3 и 43,7–46,1 кг/мм<sup>2</sup> для верхней челюсти, 45,9–46,7 и 44,3–46,6 кг/мм<sup>2</sup> — для нижней челюсти. Отсутствие различий в микротвердости между верхней и нижней челюстью, компактным и губчатым веществом независимо от локализации свидетельствует об одинаковой степени минерализации [84].

Эти данные согласуются с результатами исследований Э. Г. Гонцовой (1974). Она установила при исследовании микротвердости челюстей различного возраста, что в 17 лет она равна в среднем 48,1 кг/мм<sup>2</sup>, 6–4,2; в 40 лет — 68,4 кг/мм<sup>2</sup>, 6–5,9; в 74 года — 76,2 кг/мм<sup>2</sup>, 6–8,2 [22].

Важным показателем, определяющим биомеханические свойства костной ткани, является модуль Юнга. Так по данным Т. Т. Таптунова и соавт. (1976) при исследовании нижнечелюстной кости выявлено, что у смешанных образцов костной ткани при сжатии  $E = 1,79 \cdot 10^5$ ,  $E = 3,38 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>, компактного слоя  $E = 1,89 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>. При растяжении образцов компактного слоя костной ткани  $E = 2,1 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup> [79].

Биомеханические свойства костной ткани в свою очередь зависят от количественного содержания в ней воды, неорганических и органических веществ. Так по данным В. М. Семенюка (1985) эти показатели с возрастом изменяются. Значения этих показателей приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

**Содержание основных компонентов (в % на сырую массу)  
в нижней челюсти человека**

Возрастная группа	Вода	Неорганические вещества	Органические вещества
От 1 года до 3 лет	23,4 ± 0,6	39,5 ± 1,8	37,1 ± 1,4
От 7 до 12	21,5 ± 0,7	42,8 ± 1,8	35,6 ± 1,7
От 12 до 15	24,3 ± 0,5	42,1 ± 0,9	33,6 ± 1,4
От 15 до 20	23,4 ± 0,4	45,2 ± 2,1	31,4 ± 2,7
От 20 до 30	25,9 ± 1,6	43,4 ± 0,9	30,1 ± 3,0
От 30 до 40	20,7 ± 0,9	45,3 ± 1,7	34,1 ± 1,8
От 40 до 50	16,9 ± 0,5	48,2 ± 3,0	35,5 ± 4,5

Содержание неорганических веществ за период от 1 года до 50 лет возрастает от 39,5 ± 1,8 до 48,2 ± 3,0, а органических — убывает от 37,1 ± 1,4 до 35,5 ± 4,5 % [85].

В. М. Семенюк (1986) представил данные возрастных изменений суммарного количества (Са, Р, К, Na и Mg) и содержания отдельных элементов в нижней челюсти человека в процессе роста, развития и формирования зубочелюстной системы. Эти данные сформулированы в табл. 1.3 [86].

Таблица 1.3

**Возрастная динамика содержания ингредиентов неорганического матрикса  
(в % на сухую ткань) нижней челюсти**

Возраст, годы	Суммарное количество (Са, Р, К, Na, Mg)	Са	Р	К	Na	Mg
Новорожденные	29,94 ± 1,01	19,85 ± 0,61	8,83 ± 0,33	0,13 ± 0,01	0,26 ± 0,04	0,51 ± 0,02
До 1	26,70 ± 0,84	15,49 ± 0,91	8,16 ± 0,25	0,10 ± 0,01	0,36 ± 0,02	0,55 ± 0,02
1-3	30,49 ± 1,35	19,88 ± 0,95	9,01 ± 0,50	0,07 ± 0,01	0,22 ± 0,02	0,44 ± 0,03
3-7	30,15 ± 1,44	19,95 ± 0,95	9,25 ± 0,49	0,10 ± 0,01	0,38 ± 0,03	0,46 ± 0,04
7-12	30,20 ± 1,51	19,66 ± 1,01	9,49 ± 0,45	0,13 ± 0,01	0,51 ± 0,03	0,43 ± 0,03
12-15	30,57 ± 1,23	19,86 ± 0,55	9,61 ± 0,62	0,13 ± 0,01	0,55 ± 0,03	0,54 ± 0,03
15-20	34,57 ± 1,16	22,76 ± 0,73	10,91 ± 0,39	0,12 ± 0,02	0,50 ± 0,03	0,28 ± 0,02
20-30	33,38 ± 0,63	21,80 ± 0,43	10,54 ± 0,18	0,11 ± 0,01	0,54 ± 0,05	0,37 ± 0,03
30-40	34,39 ± 1,37	22,09 ± 0,93	10,15 ± 0,49	0,12 ± 0,01	0,42 ± 0,05	0,47 ± 0,03
40-50	33,13 ± 1,48	21,96 ± 0,91	10,41 ± 0,55	0,12 ± 0,01	0,46 ± 0,07	0,43 ± 0,01

Автор установил, что содержание каждого элемента в отдельности и соответственно суммарное их количество на протяжении жизни человека не остаются постоянными, а изменяются характерным для каждого элемента образом.

После рождения суммарное количество ингредиентов в нижней челюсти снижается к первому году жизни. В возрасте 1–3 лет наблюдается первое повышение содержания суммы ингредиентов, которое остается таким до 15-летнего возраста. В период от 15 до 20 лет вторично повышается суммарный уровень ингредиентов челюстной кости, который не изменяется до 50 лет. Достоверно снижается содержание Са в нижней челюсти ребенка в возрасте до 1 года в сравнении с новорожденными, а затем повышается к 3 годам и остается на этом уровне до 15 лет. В возрасте от 15 до 20 лет содержание Са в челюсти вновь увеличивается и остается таким до 50 лет.

В заключение следует отметить, что возрастные концентрации Са, Р, К, Na,  $m_g$  в неорганическом матриксе нижней челюсти человека не остаются постоянными, а изменяются в течение жизни человека. Эти изменения различны и зависят от многих эндогенных и экзогенных факторов.

## Глава 2

### Методы подготовки костной ткани к ортодонтическому лечению

Морфологические и функциональные изменения при зубочелюстных аномалиях, не устраненные своевременно, с возрастом усугубляются, способствуют развитию заболеваний периодонта и височно-нижнечелюстного сустава, затрудняют профилактические мероприятия [2, 4, 14, 35, 72, 95]. Сроки ортодонтического лечения длительны, после него нередко рецидивы, а 57,2 % пациентов по различным причинам прерывают его. Это объясняется тем, что у взрослых полностью сформирован челюстно-лицевой скелет, образовались стойкие артикуляционные соотношения между зубными рядами и снижены пластические возможности костной ткани [18, 20, 25, 39, 46, 67, 100]. Поэтому лечение зубочелюстных аномалий в сформированном прикусе проводится комплексным способом, при котором основные ортодонтические мероприятия в различные его периоды дополняются другими методами. Ортодонтическое лечение состоит из активного и ретенционного периодов. В активном периоде ортодонтического лечения при помощи лечебных аппаратов перемещают аномалийно стоящие зубы в правильное положение, в ретенционном — закрепляют полученные результаты, причем ретенционный период более длителен, чем активный. К 41 % взрослых жителей на протяжении нескольких десятилетий в комплексе ортодонтического лечения в активном периоде применяли оперативные вмешательства различного характера: остеотомию, компактоостеотомию, удаление зубов [4, 18, 66]. Однако хирургическое лечение сопряжено с травмой, стрессом, выраженными трофическими нарушениями, возможностью различных послеоперационных осложнений [68]. В связи

с этим ведутся поиск и разработка менее травматичных и одновременно более эффективных дополнительных методов ортодонтического лечения при зубочелюстных аномалиях. Среди таких вспомогательных методов особое место занимают физические методы, которые могут использоваться в активном периоде ортодонтического лечения зубочелюстных аномалий и деформаций.

Разработаны различные физические методы сокращения активного периода ортодонтического лечения. Они преимущественно направлены на повышение пластичности костной ткани и снижение ее механической прочности путем воздействия на компактную пластинку и губчатое вещество кости.

Экспериментальные исследования И. Н. Аль-Хаири [3] свидетельствуют о том, что можно значительно сократить показания к оперативным вмешательствам при комплексном лечении зубочелюстных аномалий у детей, используя очаговый дозированный вакуум по В. И. Кулаженко [65]. Автор установил, что после воздействия очаговым дозированным вакуумом на периодонт в области перемещаемых зубов в его тканях происходит избирательное повреждение капилляров и тканевых структур, при этом клетки высвобождают биологически активные вещества, усиливаются ферментные процессы, способствующие направленной перестройке костных структур.

Л. В. Сорокина [90] в эксперименте, выполненном на 94 белых крысах, выявила, что изменения в тканях после вакуумного воздействия и хирургического вмешательства во многом идентичны. Это послужило предпосылкой для применения очагового дозированного вакуумного воздействия с целью стимуляции перестройки костной ткани под влиянием ортодонтической аппаратуры и сокращения сроков лечения детей. Комплексное лечение зубочелюстных деформаций заключалось в том, что до применения аппаратного воздействия и в процессе лечения детям наносили вакуумное повреждение десны в области корней перемещаемых зубов один раз в течение 4–6 дней. Продолжительность применения очагового дозированного вакуума определялось появлением сливных экстратазов. Курс вакуумной стимуляции во время лечения ортодонтическими аппаратами состоял из 4–6 процедур и зависел от выраженности аномалий. После двухнедельного перерыва начинали следующий курс лечения. Вакуумное повреждение наносили в течение всего периода лечения. Средние сроки лечения больных с небным смещением четырех верхних резцов сокращены на 66 дней.

По мнению Л. М. Гвоздевой, воздействие только очагового дозированного вакуума мало эффективно, поскольку основные изменения он вызывает в мягких тканях, а опосредованное действие на костную ткань

не оказывает влияния на структуру компактной пластинки и не снижает ее плотность [20].

С. И. Криштаб с соавторами [52, 69] изучили влияние очагового дозированного вакуума на продолжительность ортодонтического лечения больных прогенией. До фиксации ортодонтического аппарата больным проводили 2–3 процедуры вакуумной стимуляции, в результате чего ткани периодонта еще до воздействия аппаратов были подготовлены к активной регенерации. Курс вакуумной стимуляции зависел от степени тяжести прогении и состоял из 4–5 процедур с интервалами в 3–5 дней. Для установления равновесия между процессами повреждения и ответной реакцией восстановления, курсы вакуумной терапии осуществляли через двухнедельный перерыв. Продолжительность лечения больных с применением очагового дозированного вакуума сократилась в среднем на 4–7 мес. по сравнению с лечением обычным способом, т. е. с применением только ортодонтического аппарата. Кроме этого, С. И. Криштаб с соавторами [52] разработали также методику вибрационного воздействия при лечении аномалий положения отдельных зубов. Сущность его заключается в том, что колебания высокого и низкого давлений, возникающие в периодонтальной щели и прилегающей ткани при действии вибратора, создают эффект насоса, всасывающего кровь и тканевую жидкость в данную зону, а затем извлекающего их из этой зоны в ходе каждого цикла. Частота механических колебаний равнялась 100 Гц. В результате интенсивность тканевого обмена возрастает, что ведет к активизации процессов резорбции и костеобразования. Волокна периодонта расслабляются, вследствие чего облегчается перемещение зуба. На перемещаемый зуб оказывали вибрационное воздействие, а затем активировали ортодонтический аппарат. Вибрационное воздействие повторяли через 2–3 дня, после 3 процедур делали перерыв на 7–10 дней. Амплитуду, продолжительность вибрации и количество процедур определяли с учетом групповой принадлежности зуба и возраста больного. Полученные результаты свидетельствуют, что вибрационное воздействие сокращает сроки перемещения зубов в 1,5–2 раза.

А. Н. Чумаков с соавторами [101] с целью сокращения продолжительности активного периода ортодонтического лечения применили высокочастотный ультразвук. В эксперименте и клинике использовали ультразвук, генерируемый аппаратом «Ультразвук Т-5» в импульсном режиме, длительность импульса 10 мс, интенсивность 0,4 Вт/см<sup>2</sup>, на курс 10 процедур по 10 мин ежедневно. Ускорение перемещения зубов под воздействием ультразвука авторы связывают с возникновением локального остеопороза, носящего обратимый характер, повышением пластичности кости и с вероятным селективным влиянием данного метода на ткани периодонта, находящегося в состоянии хронической микротравмы, вызываемой ортодонтическими аппаратами. Предложенный метод позволил ускорить

перемещение зубов в активном периоде ортодонтического лечения сужения зубных рядов и сократить его сроки в 2 раза.

Z. Davidovitch в эксперименте на котятках использовал для ускорения перемещения зубов воздействие постоянным током [110]. О. И. Ефанов и П. В. Иванов [31] изучали влияние электрофореза 5%-ного раствора трилона Б на костную ткань челюстей собак в эксперименте. Провели 15 процедур при плотности тока 1,5–2,0 мА/см<sup>2</sup>, длительность процедур 20 мин. На основании морфологических исследований они показали, что электрофоретическое введение трилона Б можно применять для снижения минеральной насыщенности костной ткани.

С. В. Ивашенко [39] оценивал воздействие электрофореза 1%-, 3%-, 5%-ного растворов трилона Б на костную ткань челюсти кролика. Проводилось 10 процедур при терапевтической плотности тока 0,5–1,0 мА/см<sup>2</sup>, длительность процедуры 10 мин. Наилучший результат декальцинации костной ткани достигнут при использовании для электрофореза 1%-ного раствора трилона Б.

Но методом электрофореза, как известно, можно ввести небольшое количество лекарства, а сам физический фактор не вызывает заметной структурной перестройки костной ткани. Поэтому автором продолжалось изучение и других физиотерапевтических методов декальцинации костной ткани [14, 23, 35, 36, 39].

Е. Ю. Симановская с соавторами [87], основываясь на данных, полученных в эксперименте, включили в комплекс ортодонтического лечения помимо ортодонтического аппаратного воздействия курс физиотерапии, состоящий из очагового дозированного вакуума и электрофореза 2%-ного раствора лития хлорида. Очаговый дозированный вакуум (720 мм рт. ст.) создавали с помощью аппарата Кулаженко, экспозиция 20 с. Электрофорез 2%-ного раствора лития хлорида проводили с положительного полюса аппарата ГЭ-5-03 в течение 15–25 мин. Число процедур — от 5 до 15, через день. Сроки лечения больных детей старшего школьного возраста и взрослых при этом сократились в 2–2,5 раза.

С. А. Наумович [72] на основании клинико-экспериментальных исследований рекомендовал в активном периоде ортодонтического лечения (без компактостеотомии) использовать ежедневное облучение периодонта перемещаемых ортодонтическим аппаратом зубов сочетанным излучением гелий-неонового ( $\lambda = 632,8$  нм) и гелий-кадмиевого ( $\lambda = 441,6$  нм) лазеров с выходной мощностью 20 мвт и экспозицией на одну точку 0,5–1 мин, 8–9 процедур, 1–2 курса лечения.

И. И. Гунько [23–25] получил хорошие результаты при применении в активном периоде ортодонтического лечения магнитофореза и высокочастотного ультрафонофореза трилона Б. Для магнитофореза [24] он использовал 4%-ный раствор трилона Б, магнитоиндуктор с рабочей

поверхностью 5–7 см<sup>2</sup>, пульсирующее магнитное поле частотой 50 Гц в непрерывном режиме с индукцией 20–25 мТл, продолжительностью 12–15 мин ежедневно, на курс лечения 10–15 процедур. Применение этого метода позволило сократить сроки активного периода ортодонтического лечения в 2,1–2,3 раза.

Для проведения ультрафонофореза [25] применялся аппарат УЗТ-3.04.С, излучатель 0,3, интенсивность озвучивания 0,2 Вт/см<sup>2</sup>, режим работы — непрерывный, продолжительность процедуры 8–10 минут, курс — от 5 до 10 процедур. Для ультрафонофореза готовился 1%-ный раствор трилона Б. По своей эффективности этот метод уступает магнитофорезу и индуктотермоэлектрофорезу трилона Б.

Нами [37–39] проведено сравнительное изучение влияния некоторых физиотерапевтических методов (электрофорез лекарственных веществ — трилон Б, хлористый литий, уксуснокислый натрий, УВЧ-индуктотермия, индуктотермоэлектрофорез трилона Б, низкочастотная фонотерапия) на декальцинацию костной ткани. Исследования выполнены на 77 кроликах породы шиншилла с массой от 2700 до 3400 г. После окончания эксперимента животных выводили из опыта под наркозом и брали для гистологических исследований и спектрального анализа элементного состава кости фрагмент нижней челюсти с наружной и внутренней компактной пластинкой и губчатым веществом. Выполненные экспериментальные исследования позволили установить ряд важных положений.

В целом декальцинирующий эффект от воздействия электрофореза 3%-ного раствора уксуснокислого натрия проявлялся сильнее, чем после электрофореза 2%-ного раствора хлористого лития. После 10 процедур электрофореза уксуснокислого натрия, наряду с декальцинирующим наблюдалось резорбционное, рассасывающее действие на костную ткань, характеризующееся истончением и частичным исчезновением костных балочек (рарефикация кости). Комплекс этих изменений наиболее сильно был выражен при использовании для электрофореза 1%-ного раствора трилона Б, который и стал в дальнейшем применяться нами в клинической практике. Ни очагового, ни более распространенного некроза костной ткани применявшиеся методы не вызывали. В условиях проведенных опытов основными способами резорбции костной ткани являлись пазушное рассасывание и галистез.

В опытах с УВЧ-индуктотермией наиболее выраженные изменения выявлены при воздействии, проводимом при выходной мощности 40 Вт. В этих опытах отмечается умеренная гиперемия надкостницы, камбиальный слой содержит меньше клеток, несколько фиброзирован, преобладает кость губчатого строения с широкими межбалочными пространствами и более тонкими балочками со слабой базофилией, мозаичностью, беспо-

рядочно расположенными многочисленными широкими линиями склеивания (резорбции) — признаками идущей перестройки.

При применении для УВЧ-индуктотермии малых (10 Вт) и средних (20 Вт) дозировок изменения в целом были сходными, но при средних дозах они выражены несколько интенсивнее.

С учетом вышеизложенного, становится очевидно, что применение больших доз (40 Вт) индуктотермии приводит к начинающемуся фиброзу надкостницы, частичной резорбции и перестройке костной ткани. При малых (10 Вт) и средних (20 Вт) дозах изменения сводятся преимущественно к активной гиперемии, особенно надкостницы, и некоторому усилению остеогенеза.

После индуктотермоэлектрофореза 1%-ного раствора трилона Б, согласно данным морфологического исследования, с нарастанием мощности воздействия усиливается декальцинирующий эффект. Он является максимальным при мощности индуктотермии 40 Вт.

Воздействие на костную ткань низкочастотным ультразвуком не вызывало ее некротических изменений, наоборот, более сильное (44кГц) — оказывало стимулирующий эффект в смысле усиления пролиферации остеогенных элементов, эндостального костеобразования и, с другой стороны, замещения ее волокнистой соединительной. Также наблюдалось ослабление базофилии межклеточного вещества компактного слоя, заметнее в губчатом веществе [40].

Можно предположить, что применявшиеся воздействия, особенно ультразвука частотой (44 кГц) вызывает не только деминерализацию, но и последующий переход костной ткани в волокнистую соединительную, а остецитов в фибробласты и фиброциты с включением «оголенных» коллагеновых волокон в эту оставшуюся «на месте» ткань. Последняя может начать пролиферировать, замещать предсуществовавшую костную и другие ткани, объединяться с собственно соединительной тканью. Эти процессы, вызывающие ослабление костной ткани альвеолярного отростка челюсти, могут способствовать более быстрой деминерализации, а в последующем, рекальцинации и восстановлению структуры костной ткани.

Приведенные данные со всей очевидностью свидетельствуют о принципиальной возможности использования физиотерапевтических методов для декальцинации и ослабления прочности костной ткани, профилактике деструктивных изменений, которые облегчают и ускоряют ортодонтическое лечение больных с зубочелюстными аномалиями и деформациями, делают его легче переносимым и более эффективным.

### Глава 3

#### Характер и величина действующих сил ортодонтических аппаратов

В ортодонтии применяются разные аппараты с различной силой действия: большой или слабой, механической или функциональной, постоянной или перемежающейся. В результате действия различных сил ответная реакция организма в виде тканевых преобразований бывает также различной. Перестройку костной ткани в процессе ортодонтического лечения определяет действующая на нее сила. Необходимо, чтобы процессы резорбции и аппозиции костной ткани были сбалансированными.

Изучением дозирования сил при ортодонтическом лечении занимались многие авторы. Сторонники аппаратов прерывистого действия [69] отмечают, что сила ортодонтического аппарата, действующая прерывисто, способствует большей эффективности и закреплению достигнутых результатов лечения. Подвижность зубов наблюдается реже. Авторы считают, что при применении аппаратов прерывистого действия вначале периодонт сдавливается и кровообращение нарушается, но, поскольку действие силы, даже большой, непродолжительно, кровообращение быстро восстанавливается, и тканевые изменения бывают незначительными.

Другие авторы [103] высказывают противоположную точку зрения: они рекомендуют применять небольшие, но постоянно действующие силы. Д. А. Калвелис [46, 47] считал, что разницы в применении прерывистой и непрерывной силы нет. Вопрос заключается в правильном применении аппаратов и величины силы. Он также указывает, что при применении больших сил происходит резорбция цемента корня.

А. М. Шварц [127] оптимальной считал силу, не превышающую капиллярное давление ( $20-26 \text{ г/см}^2$ ), а при корпусном перемещении —  $40-50 \text{ г/см}^2$ . Он определил характер морфологических изменений и выделил четыре степени реакции периодонта в зависимости от величины силы. Он считал, что большие силы ( $60-70 \text{ г/см}^2$ ) приводят к сдавливанию сосудов и нарушению кровообращения.

А. И. Позднякова [83] на основании экспериментальных данных установила, что применение слабых сил не вызывает изменения в цементе смещаемых зубов, рассасывание его может наступить при применении больших сил или в случае длительного смещения зубов.

А. И. Бетельман (цит. по Л. С. Величко [12]) рекомендует при перемещении зубов малые силы, которые не сдавливают капилляры и не нарушают трофику периодонта.

Имеется ряд работ, направленных на методы определения силы действующих элементов ортодонтических аппаратов и ее влияния на периодонт перемещаемых зубов.

В. Н. Володкин (цит. по А. В. Козел [49]) при помощи предложенного им аппарата механического типа исследовал силы, развиваемые эластичными резиновыми кольцами различного диаметра, а также расширяющими петлями типа петель Коффина из ортодонтической проволоки. Автор

сообщает, что кольца одинакового диаметра, но из резины разной марки развивают неодинаковые силы. Величина силы расширяющих петель типа петель Коффина зависит от диаметра проволоки, из которой они изготовлены, и степени активации.

Л. С. Величко в соавторстве с Н. А. Пучко (а. с. №427707 «Устройство для определения силы действия ортодонтических аппаратов») измеряли силу действия ортодонтических аппаратов при помощи аппарата, работающего по принципу пружинного динамометра.

Также Л. С. Величко [13], используя методы сопротивления материалов и теоретической механики, изучил распределение напряжения в периодонте в зависимости от степени атрофии лунки и угла наклона зуба. Так, при действии на зуб горизонтальной нагрузки напряжение в периодонте возрастает при увеличении угла наклона зуба и степени атрофии его лунки.

Е. Л. Кирияк [48] при лечении небнопрорезавшихся резцов и клыков для более точного дозирования силы ортодонтического аппарата предложил в готовый ортодонтический аппарат при помощи самотвердеющей пластмассы фиксировать градуированную в миллиметрах линейку длиной 1–1,5 см и шириной 0,5 см. В результате 980 измерений 240 ортодонтических аппаратов автор пришел к выводу, что сила действующих частей очень варьирует и зависит от количества изгибов, формы, ширины, величины активации и толщины ортодонтической проволоки. Автор считает, что наиболее целесообразно активировать действующие части ортодонтических аппаратов в среднем на 1 мм один раз в 2 недели.

Э. В. Щербакова [104] для перемещения верхних резцов с клинически здоровой десной рекомендует силу действия ортодонтического аппарата не более 45 г на каждый смещаемый зуб; перемещение верхних клыков целесообразно осуществлять пружиной, имеющей мягкую силовую характеристику (5 г на каждый миллиметр активации). Автор считает, что ретракторные вестибулярные дуги из ортодонтической проволоки диаметром 0,8 мм в практике ортодонтии не применимы, т.к. не поддаются точной дозировке силы вследствие жесткой силовой характеристики и малой широты активации. Указанных недостатков лишены дуги из проволоки диаметром 0,6 мм.

А. П. Иванов с соавторами [33] подтвердили мнения В. Ю. Курляндского [67], Д. А. Калвелеса [47] о том, что больной сам может правильно дозировать силу действия аппарата, основываясь на болевом рефлексе. Решающую роль в выборе силы ортодонтического аппарата играет индивидуальная реактивная способность организма и состояние фиксирующей способности периодонта.

## Глава 4

### Моделирование перемещений и поворотов корня зуба в костной ткани

#### 4.1. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЕЙ ЗУБОВ

В практике ортопедической стоматологии достаточно часто возникает необходимость перемещений и поворотов зубов, связанная с устранением у пациента аномалий и дефектов челюстно-лицевой области. Результаты расчета напряженно-деформированного состояния, возникающего под действием различным образом ориентированных сосредоточенных нагрузок, в системе «зуб–периодонт» представлены в монографии [76]. В настоящей главе рассматривается моделирование перемещений и поворотов корня зуба в костной ткани без учета влияния периодонта.

Следуя [76], будем считать корень зуба абсолютно твердым телом, которое имеет форму эллиптического двуполостного гиперboloида. В этом случае уравнение поверхности корня можно представить в виде:

$$F(x, y, z) = 1 + \frac{z}{H} \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}, \quad (4.1)$$

где  $x, y, z$  — пространственные координаты,  $H$  — параметр, описывающий высоту корня зуба,  $p$  — параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба,  $a_k = a_1$  при  $x \geq 0$  и  $a_k = a_2$  при  $x < 0$ ,  $a_1, a_2, b$  — полуоси эллипса в сечении корня зуба [42]. Следует отметить, что уравнение (4.1) достаточно точно описывает корень зуба, поскольку учитывает закругление вершины корня, а также то обстоятельство, что поперечное сечение зуба имеет одну ось симметрии. Для визуализации корня зуба целесообразно использовать обобщенную цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$  [76]:

$$x = a_k r \cos(\theta), \quad y = b r \sin(\theta), \quad z = H \sqrt{r^2 + p^2}. \quad (4.2)$$

Здесь  $r$  — безразмерный радиус,  $a_k = a_1$  при  $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$  и  $a_k = a_2$  при  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

На рис. 4.1 выполнена визуализация корней зубов для резцов и клыка. При построении корня клыка принимаются геометрические параметры  $a_1 = 2$  мм,  $a_2 = 5$  мм,  $b = 4$  мм,  $H = 25,4$  мм,  $p = 0,5$  (высота корня зуба составляет 15,7 мм); при построении резца принимаем  $a_1 = a_2 = 2,5$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 17,07$  мм,  $p = 0,3$  (высота корня зуба составляет 12,7 мм); при построении премоляра принимаем  $a_1 = a_2 = 5$  мм,  $b = 3,5$  мм,  $H = 21$  мм,  $p = 0,4$  (высота корня зуба составляет 14,2 мм) [77].

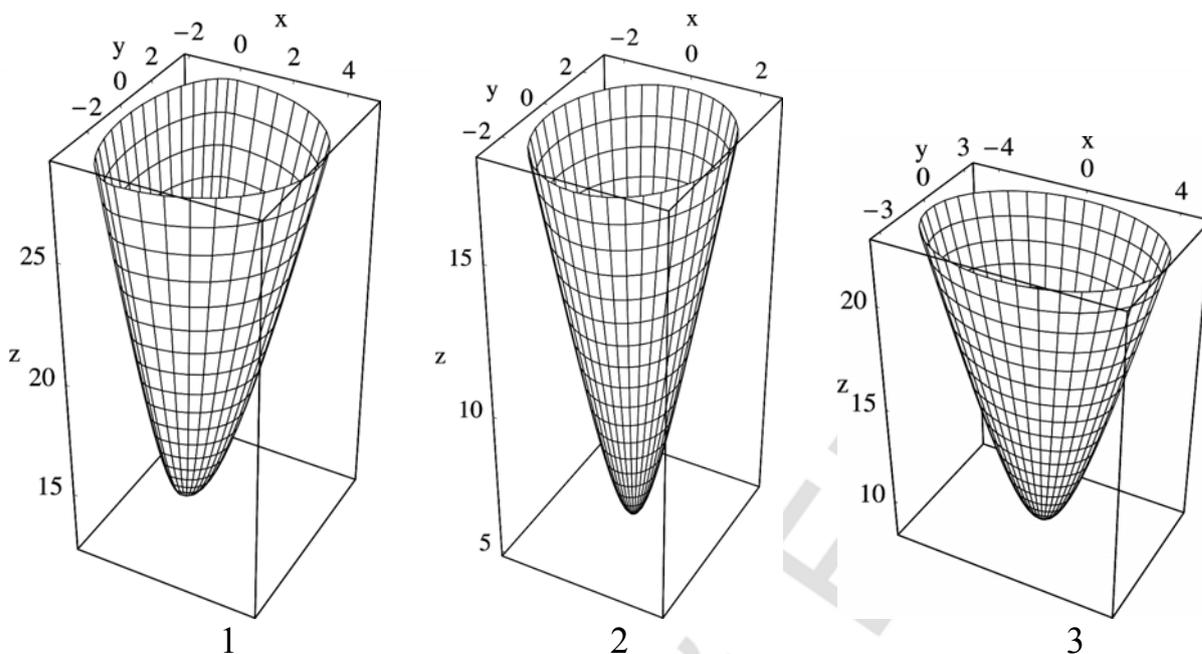


Рис. 4.1. Поверхности, соответствующие корням клыка (1), резца (2) и премоляра (3)

Если на зуб действует произвольным образом ориентированная сосредоточенная нагрузка, корень зуба получает три поступательных перемещения вдоль осей координат и три поворота вокруг осей координат. Перемещение точек костной ткани  $\vec{U} = (u, v, w)$  в направлении координатных осей, представим в следующем виде:

$$\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (4.3)$$

где  $\vec{U}_0 = (u_0, v_0, w_0)$  — вектор поступательного перемещения зуба,  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор полюса (центра сопротивления),  $\vec{r}$  — радиус-вектор произвольной точки костной ткани,  $\vec{\varphi} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  — вектор поворота корня зуба,  $h$  — толщина костной ткани, прилегающей к поверхности корня зуба. Для корня зуба, ограниченного двумя составными эллиптическими гиперболоидами, центр сопротивления при действии силы вдоль оси  $Ox$  лежит на оси  $Oz$  и имеет координаты  $(0, 0, z_1)$ , центр сопротивления при действии силы вдоль оси  $Oy$  лежит в плоскости  $xOz$  и имеет координаты  $(x_2, 0, z_2)$ , центр сопротивления при действии силы вдоль оси  $Oz$  лежит на оси  $Ox$  и имеет координаты  $(x_3, 0, 0)$ . С учетом этого, выражения для упругих перемещений костной ткани можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + (z - z_1)\varphi_y - y\varphi_z, \\ v &= v_0 + (x - x_2)\varphi_z - (z - z_2)\varphi_x \\ w &= w_0 + y\varphi_x - (x - x_3)\varphi_y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Для определения поступательных перемещений и углов поворота корня зуба составим условия равенства нулю главного вектора и главного

момента всех сил, действующих на зуб, а также условие равенства нулю напряжений, возникающих на поверхности контакта корня зуба и костной ткани  $F = 0$ :

$$\int_F (\vec{n} \cdot T dF - \vec{R}) = 0, \quad \int_F ((\vec{r} - \vec{r}_0) \times (\vec{n} \cdot T) ds - \vec{M}) = 0. \quad (4.5)$$

Здесь  $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$  — главный момент внешних сил,  $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)$  — главный вектор внешних сил,  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  — вектор нормали к поверхности  $F = 0$  корня зуба,  $T$  — тензор напряжений, возникающих на поверхности контакта корня зуба и периодонта. Компоненты тензора напряжений представим в виде:

$$T_{ij} = 2G \left( e_{ij} + \frac{\nu \delta_{ij}}{1 - 2\nu} \sum_{k=1}^3 e_{kk} \right), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (4.6)$$

где  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — компоненты тензора деформаций ( $u_1 = u, u_2 = v,$

$u_3 = w, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$  — компоненты вектора перемещений),

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  — модуль сдвига,  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент

Пуассона,  $\delta_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ .

В декартовых координатах в проекциях на оси координат условия (4.5) можно представить следующим образом:

$$\int_F (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) dF - R_x = 0, \quad (4.7)$$

$$\int_F (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) dF - R_y = 0,$$

$$\int_F (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) dF - R_z = 0,$$

$$\int_F \left( y (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) - (z - z_2) (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \right) dF - M_x = 0,$$

$$\int_F \left( (z - z_1) (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) - (x - x_3) (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) \right) dF - M_y = 0, \quad (4.8)$$

$$\int_F \left( (x-x_2) (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) - \right. \\ \left. - y (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) \right) dF - M_z = 0,$$

В формулах (4.7), (4.8) введены обозначения  $\sigma_x = T_{11}$ ,  $\sigma_y = T_{22}$ ,

$$\sigma_z = T_{33}, \quad \tau_{xy} = T_{12}, \quad \tau_{yz} = T_{23} \quad \text{и} \quad \tau_{xz} = T_{13}, \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

$$n_x = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad n_y = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad n_z = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Для эллиптического гиперболоида после несложных преобразований получим:

$$\Delta = \sqrt{\left( p^2 + \left(\frac{x}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right) \left( 1 + p^2 + (1+H^2) \left( \left(\frac{x}{a_k}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right) \right)}, \quad k=1, 2.$$

Для нахождения выражений для координат  $z_1$ ,  $x_2$ ,  $z_2$  и  $x_3$  равенство нулю главного вектора представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{u_0 G}{h} \int_F \left( \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right) \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{(\gamma-1)G}{h} \int_F \left( v_0 \frac{\partial F}{\partial y} + w_0 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{(\gamma-1)G\phi_x}{h} \int_F \left( y \frac{\partial F}{\partial z} - (z-z_2) \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{G\phi_y}{h} \int_F \left( (z-z_1) \left( \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right) - \right. \\ & \left. - (\gamma-1)(x-x_3) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{dF}{\Delta} + \frac{G\phi_z}{h} \int_F \left( (\gamma-1)(x-x_2) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \right. \\ & \left. - y \left( \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta} = R_x, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma-1)G}{h} \int_F \left( u_0 \frac{\partial F}{\partial x} + w_0 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{v_0 G}{h} \int_F \left( \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \gamma \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right) \frac{dF}{\Delta} + \frac{G\phi_x}{h} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_F \left( (\gamma - 1) y \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - (z - z_2) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta} + \\
& + \frac{(\gamma - 1) G \varphi_y}{h} \int_F \left( (z - z_1) \frac{\partial F}{\partial x} - (x - x_3) \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dF}{\Delta} + \\
& + \frac{(\gamma - 1) G \varphi_y}{h} \int_F \left( (z - z_1) \frac{\partial F}{\partial x} - (x - x_3) \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dF}{\Delta} + \\
& + \frac{G \varphi_z}{h} \int_F \left( (x - x_2) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - \right. \\
& \quad \left. - (\gamma - 1) y \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{dF}{\Delta} = R_y,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\gamma - 1) G}{h} \int_F \left( u_0 \frac{\partial F}{\partial x} + v_0 \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dF}{\Delta} + \\
& + \frac{w_0 G}{h} \int_F \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{dF}{\Delta} + \frac{G \varphi_x}{h} \times \\
& \times \int_F \left( y \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - (\gamma - 1) (z - z_2) \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{dF}{\Delta} + \\
& + \frac{G \varphi_y}{h} \int_F \left( (\gamma - 1) (z - z_1) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} - \right. \\
& \quad \left. - (x - x_3) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta} + \\
& + \frac{(\gamma - 1) G \varphi_z}{h} \int_F \left( (x - x_2) \frac{\partial F}{\partial y} - y \frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dF}{\Delta} = R_z, \\
& \gamma = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Отсюда после стандартных рассуждений [76] можно выделить четыре уравнения для нахождения координат центров сопротивления:

$$\int_F \left( (z - z_1) \left( \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - (\gamma - 1) (x - x_3) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{dF}{\Delta} = 0,$$

$$\int_F \left( (\gamma-1)(x-x_2) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - y \left( \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta} = 0,$$

$$\int_F \left( (\gamma-1)y \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - (z-z_2) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta} = 0,$$

$$\int_F \left( (\gamma-1)(z-z_1) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} - (x-x_3) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \right) \frac{dF}{\Delta} = 0.$$

После интегрирования будем иметь:

$$z_1 = \frac{H \left( 3(1-p^2) \frac{b^2}{H^2} + \left( \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + 1 \right) (1-3p^2+2p^3) \right)}{3 \left( (1-p^2) \left( \frac{\gamma b^2}{2a_1 a_2} + \frac{b^2}{H^2} + \frac{1}{2} \right) + \left( 1 + \frac{\gamma b^2}{a_1 a_2} \right) p^2 \ln(p) \right)},$$

$$x_2 = \frac{4(a_1 - a_2)}{3\pi \left( \left( \frac{H^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \right) \left( \frac{1-p^2}{2} + p^2 \ln(p) \right) + 1 - p^2 \right)} \times$$

$$\times \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-p^2)^3}}{3} - p^2 \sqrt{1-p^2} + p^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} \right) + \sqrt{(1-p^2)^3} \right),$$

$$z_2 = \frac{H \left( \frac{3b^2}{H^2} (1-p^2) + (1-3p^2+2p^2) \left( \frac{b^2}{a_1 a_2} + \frac{\gamma_2 b^2}{H^2} + \gamma \right) \right)}{3 \left( (1-p^2) \left( \frac{b^2}{2a_1 a_2} + \frac{b^2}{H^2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \left( \gamma + \frac{b^2}{a_1 a_2} \right) p^2 \ln(p) \right)},$$

$$x_3 = \frac{4(a_1 - a_2)}{3\pi \left( H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( \frac{1-p^2}{2} + p^2 \ln(p) \right) + \gamma (1-p^2) \right)} \times$$

$$\times \left( \frac{H^2}{b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-p^2)^3}}{3} - p^2 \sqrt{1-p^2} + p^3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} \right) + \gamma \sqrt{(1-p^2)^3} \right).$$

Здесь  $\gamma_2 = \gamma - 2$ .

Для нахождения поступательных перемещений  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$  из выражений (4.9)–(4.11) выделим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{u_0 G}{h} \int_F \left( \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{(\gamma-1)G}{h} \int_F \left( v_0 \frac{\partial F}{\partial y} + w_0 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dF}{\Delta} = R_x, \\ & \frac{(\gamma-1)G}{h} \int_F \left( u_0 \frac{\partial F}{\partial x} + w_0 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{v_0 G}{h} \int_F \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{dF}{\Delta} = R_y, \\ & \frac{(\gamma-1)G}{h} \int_F \left( u_0 \frac{\partial F}{\partial x} + v_0 \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dF}{\Delta} + \\ & + \frac{w_0 G}{h} \int_F \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{dF}{\Delta} = R_z. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} u_0 &= 2R_x h \times \\ & \times \frac{1}{\pi G(a_1 + a_2) b \left( \left( \frac{\gamma H^2}{2a_1 a_2} + \frac{H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - p^2) + H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\gamma}{a_1 a_2} \right) p^2 \ln(p) \right)}, \\ v_0 &= 2R_y h \times \\ & \times \frac{1}{\pi G(a_1 + a_2) b \left( \left( \frac{H^2}{2a_1 a_2} + \frac{\gamma H^2}{2b^2} + 1 \right) (1 - p^2) + H^2 \left( \frac{\gamma}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) p^2 \ln(p) \right)}, \quad (4.12) \\ w_0 &= \frac{2R_z h}{\pi G(a_1 + a_2) b \left( H^2 \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a_1 a_2} \right) \left( \frac{1 - p^2}{2} + p^2 \ln(p) \right) + \gamma (1 - p^2) \right)}, \end{aligned}$$

Для определения углов поворота корня зуба относительно координатных осей воспользуемся уравнениями (4.8), которые с учетом наличия плоскости симметрии  $xOz$  можно представить в виде:

$$\mu_x \varphi_x + \mu_{xz} \varphi_z = M_x,$$

$$\mu_y \varphi_y = M_y,$$

$$\mu_{xz} \varphi_x + \mu_z \varphi_z = M_z,$$

или

$$\begin{aligned} \mu_x \varphi_x + \mu_{xz} \varphi_z &= y_f R_z - (z_f - z_2) R_y, \\ \mu_y \varphi_y &= (z_f - z_1) R_x - (x_f - x_3) R_z, \\ \mu_{xz} \varphi_x + \mu_z \varphi_z &= (x_f - x_2) R_y - y_f R_x. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Здесь  $x_f, y_f, z_f$  — координаты точки приложения внешней сосредоточенной нагрузки;  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  и  $\mu_{xz}$  — жесткости при вращении, причем коэффициенты  $\mu_x, \mu_y$  и  $\mu_z$  характеризуют моменты сил, которые необходимо приложить к зубу, чтобы повернуть на угол  $\varphi_x = 1, \varphi_y = 1$  и  $\varphi_z = 1$  соответственно, коэффициент  $\mu_{xz}$  характеризует момент сил, который нужно приложить относительно оси  $Ox$ , чтобы повернуть зуб вокруг оси  $Oz$  на угол  $\varphi_z = 1$ . Для расчета этих величин имеем:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{G}{h} \int_F \left( y^2 \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) + \right. \\ &+ z(z - z_2) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - \\ &\left. - (\gamma - 1)(y(z - z_2) + zy) \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{dF}{\Delta}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \mu_y &= \frac{G}{h} \int_F \left( z \left( (z - z_1) \left( \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - \right. \right. \\ &\left. - (\gamma - 1)(x - x_3) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \right) + x \left( (x - x_3) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - \right. \\ &\left. - (\gamma - 1)(z - z_1) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \right) \frac{dF}{\Delta}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mu_z &= \frac{G}{h} \int_F \left( x \left( (x - x_2) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - \right. \right. \\ &\left. - (\gamma - 1)y \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \right) + y \left( y \left( \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - \right. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$-(\gamma-1)(x-x_2)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{dF}{\Delta},$$

$$\begin{aligned} \mu_{xz} = & \frac{G}{h} \int_F \left( (\gamma-1)y \left( (x-x_2)\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial z} - \right. \\ & \left. -z \left( (x-x_2) \left( \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right) - (\gamma-1)y \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \frac{dF}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

После интегрирования формул (4.14)–(4.17) получим следующие соотношения для жесткостей при вращении зуба:

$$\begin{aligned} \mu_x = & \frac{\pi G b H^2 (a_1 + a_2)}{8h} \left( (1-p^2)^2 \left( \frac{3b^2}{4a_1a_2} + \frac{\gamma b^2}{H^2} + \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} \right) + \right. \\ & + \frac{(1-p^2)}{2} \left( 5 - \frac{b^2}{a_1a_2} \right) - p^4 \left( 3 + \frac{b^2}{a_1a_2} \right) \ln(p) - \frac{4z_2}{3H} (2(1-p^3) + \\ & \left. + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3p^2 + 2p^3) \right), \\ \mu_y = & \frac{\pi G b H^2 (a_1 + a_2)}{8h} \left( (1-p^2)^2 \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{H^2}{b^2} + \frac{\gamma H^2}{a_1a_2} + 2\gamma - \frac{7}{4} + \left( \frac{\gamma}{H^2} + \frac{3}{4b^2} \right) (a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2) \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{1-p^2}{2} \right) \left( \frac{a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2}{b^2} - 5 \right) - \left( \frac{a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2}{b^2} + 3 \right) p^4 \ln(p) - \frac{8(1-p^3)z_1}{3H} - \right. \\ & \left. - \frac{4z_1}{3H} \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3p^2 + 2p^3) - \frac{16(a_1 - a_2)x_3}{3\pi b^2} \left( \frac{\sqrt{(1-p^2)^3}}{3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - p^2 \sqrt{1-p^2} + p^3 \arctg \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} + \frac{\gamma b^2}{H^2} \sqrt{(1-p^2)^3} \right) \right), \\ \mu_z = & \frac{\pi G b H^2 (a_1 + a_2)}{8h} \left( \left( \frac{\gamma (a_1^2 - a_1a_2 + a_2^2)}{b^2} + \frac{\gamma b^2}{a_1a_2} - 2\gamma + 8 \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{(1-p^2)^2}{4} - p^2 \left( \frac{1-p^2}{2} + p^2 \ln(p) \right) \right) + \\
& + \frac{(1-p^2)^2 (a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2 + b^2)}{H^2} - \frac{16\gamma x_2 (a_1 - a_2) \sqrt{(1-p^2)^3}}{3\pi b^2} \Bigg), \\
\mu_{xz} = & -\frac{2GHb(a_1 + a_2)}{3h} \left( (a_1 - a_2) \left( \sqrt{(1-d^2)^3} + \frac{\gamma H^2}{b^2} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left( \frac{\sqrt{(1-d^2)^3}}{4} - \frac{3d^2 \sqrt{1-d^2}}{8} + \frac{3}{8} d^4 \ln \frac{1 + \sqrt{1-d^2}}{d} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\pi x_2}{4} \left( 2(1-d^3) + \left( \frac{\gamma H^2}{b^2} + \frac{H^2}{a_1 a_2} + \gamma - 1 \right) (1-3d^2 + 2d^3) \right) \right).
\end{aligned}$$

Из системы линейных уравнений (4.13) найдем углы поворота корня зуба и с учетом выражений для поступательных перемещений (4.12) по формулам (4.4) выполним построение корня зуба после его перемещения под действием сосредоточенной нагрузки в нормальной и ослабленной костной ткани (толщина костной ткани здесь и далее принимается за единицу) [42]. Значения модуля упругости для нормальной костной ткани составляет  $E = 161,0$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$  [40]. Эксперименты по определению упругих свойств декальцинированной костной ткани показывают, что в качестве значений технических констант можно принять  $E = 80,5$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0,125$  [40]. Величину нагрузки примем равной 100 Н. Направление силы соответствует случаю дистального перемещения (углы между линией вдоль которой действует сила, и осями абсцисс, ординат и аппликата составляют  $54,7^\circ$ ). На рис. 4.2 представлены начальное и конечное положения клыка после дистального перемещения в нормальной и ослабленной костной ткани.

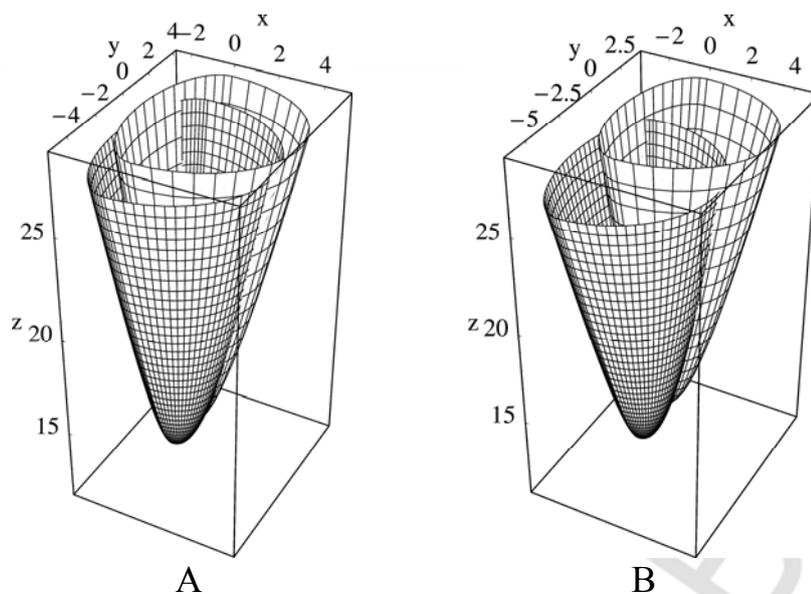


Рис. 4.2. Начальное и конечное положение корня клыка после действия сосредоточенной нагрузки для случая нормальной (А) и ослабленной (В) костной ткани

Координаты точки приложения нагрузки составляют (3,73, 2,67, 28,4). Геометрические размеры корня зуба  $a_1 = 2$  мм,  $a_2 = 5$  мм,  $b = 4$  мм,  $H = 25,4$  мм,  $p = 0,5$  (высота корня зуба составляет 15,7 мм). Значения координат здесь и далее формулируются в миллиметрах, более грубая сетка соответствует начальному положению корня зуба, более мелкая сетка — конечному положению корня после действия силы.

Более полный количественный анализ перемещений позволяют выполнить сечения корня зуба в начальном и конечном положениях различными плоскостями. В частности, на рис. 4.3 и 4.4 представлены сечения корня клыка плоскостями координат  $x = 0$  и  $y = 0$  для случая, когда перемещение осуществляется в нормальной и ослабленной костной ткани соответственно (числовые данные прежние).

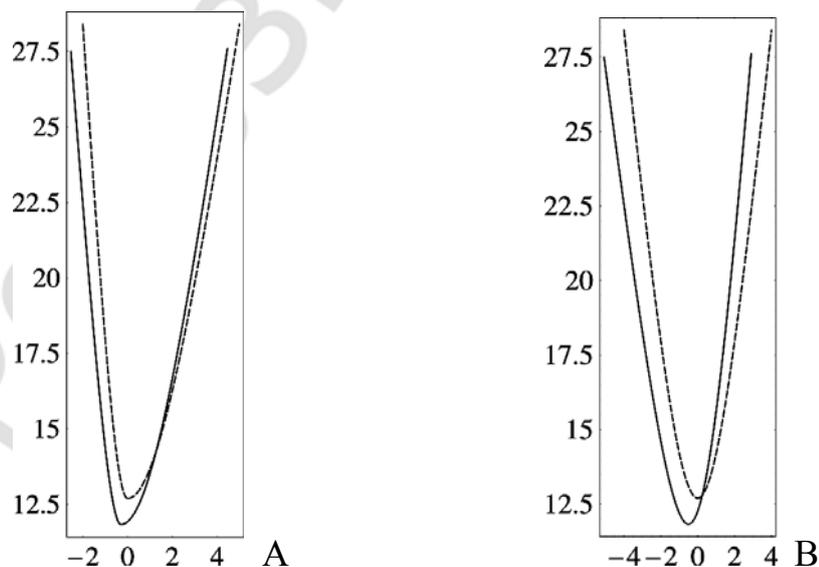


Рис. 4.3. Начальное (штриховая линия) и конечное (сплошная линия) положения сечений корня клыка в нормальной костной ткани плоскостью: А —  $y = 0$ ; В —  $x = 0$

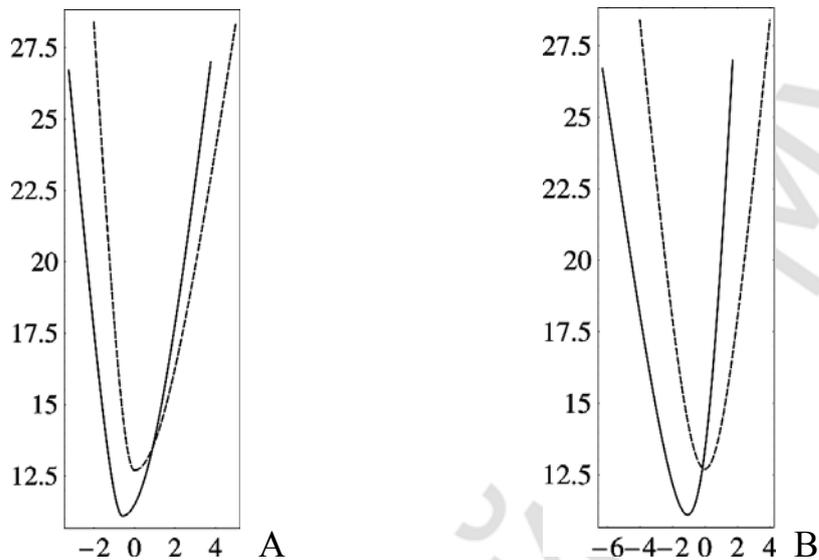


Рис. 4.4. Начальное (штриховая линия) и конечное (сплошная линия) положения сечений корня клыка в ослабленной костной ткани плоскостью: А —  $y = 0$ ; В —  $x = 0$

Из рис. 4.3 и 4.4 видно, что максимальные перемещения корня клыка вдоль оси ординат в нормальной и ослабленной костной ткани наблюдаются в плоскости  $x = 0$ ; их величины составляют 0,9 и  $\approx 1,7$  мм соответственно. Отметим, что в плоскости  $x = 0$  расстояние между кривыми, ограничивающими корень зуба, у поверхности корня уменьшается по сравнению с расстоянием между этими кривыми в начальном положении. Это означает, что помимо перемещения, корень зуба поворачивается относительно координатных осей на определенные углы. Расчет угловых перемещений показывает, что в рассматриваемом случае  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ , и  $\varphi_z$  в нормальной и ослабленной костной ткани составляют  $2,13^\circ$ ,  $-0,88^\circ$ ,  $-0,15^\circ$  и  $4,56^\circ$ ,  $-2,39^\circ$  и  $0,14^\circ$  соответственно.

Рассмотрим вестибулярное перемещение резца, представленного на рис. 4.1 (2) (сила направлена вдоль оси  $Ox$ , перпендикулярно осям  $Oy$  и  $Oz$ ), и описываемого геометрическими параметрами  $a_1 = a_2 = 2,5$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 17,07$  мм,  $p = 0,3$  (высота корня зуба составляет 12,7 мм) [77]. Величина нагрузки составляет 60 Н. Точка приложения сосредоточенной силы имеет координаты (2,5, 0, 17,8). На рис. 4.5 показаны начальное и конечное положение корня зуба в нормальной и ослабленной костных тканях.

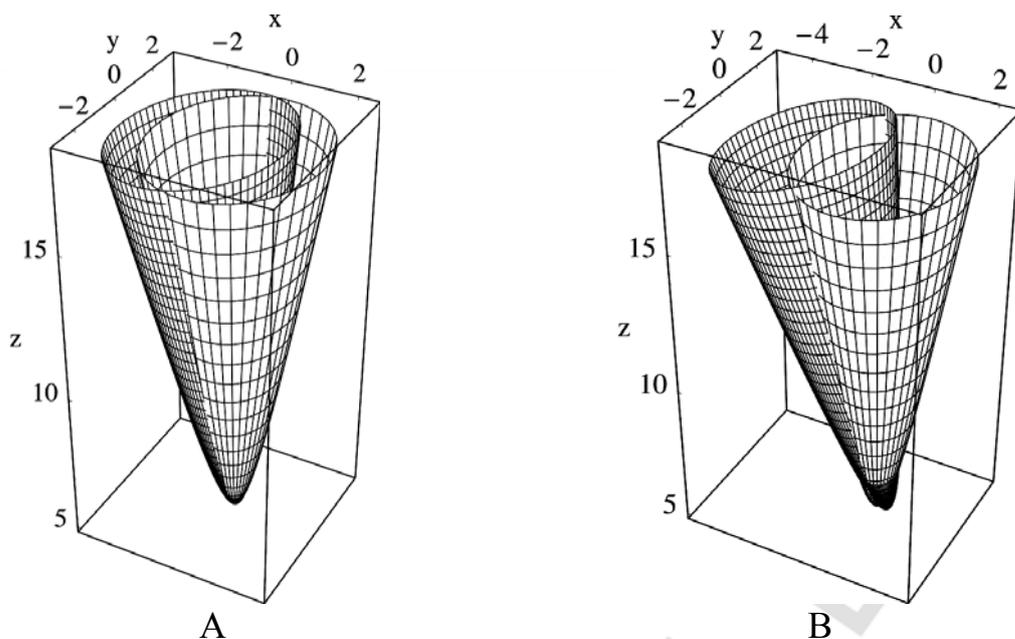


Рис. 4.5. Начальное и конечное положение корня резца в нормальной (А) и ослабленной (В) костной ткани после действия сосредоточенной нагрузки

Рис. 4.5 показывает, что количественный анализ перемещений и поворотов корня резца целесообразно провести в сечении корня плоскостью  $y = 0$  и плоскостью перпендикулярной оси  $Oz$ . На рис. 4.6 и 4.7 представлены начальное и конечное положения сечений корня рассматриваемого зуба плоскостью  $y = 0$  и плоскостью  $z = 16$  после перемещения в нормальной и ослабленной костной тканях.

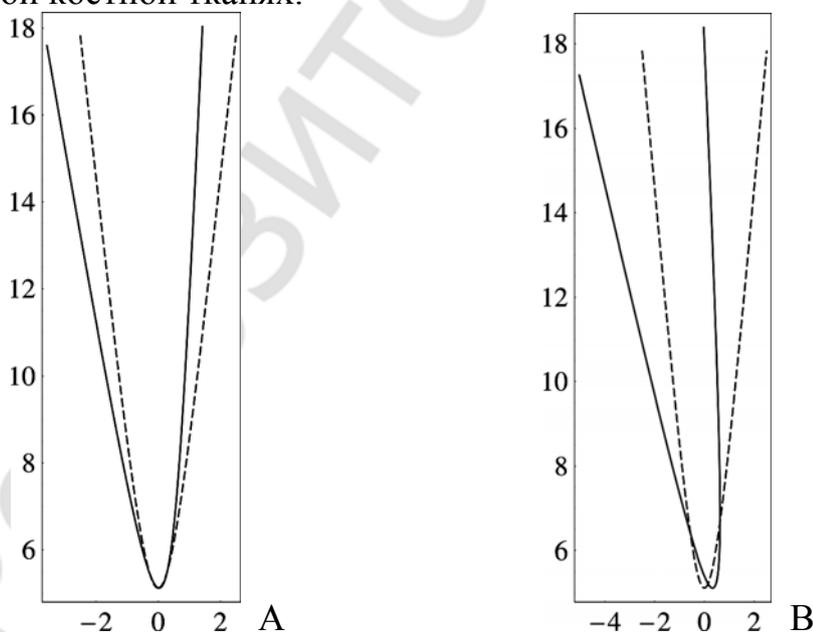


Рис. 4.6. Начальное (штриховая линия) и конечное (сплошная линия) положения сечений корня резца в нормальной (А) и ослабленной (В) костной ткани плоскостью  $y = 0$

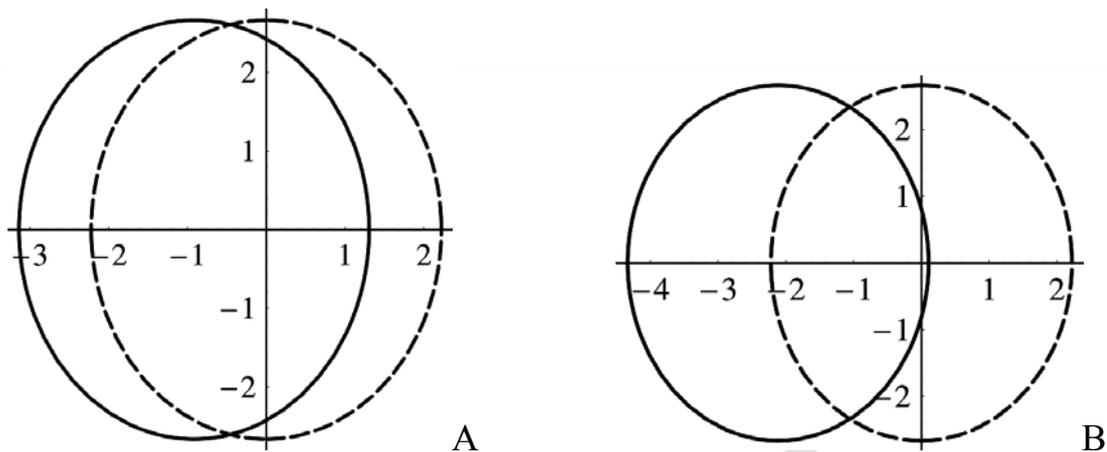


Рис. 4.7. Начальное (штриховая линия) и конечное (сплошная линия) положения сечений корня резца в нормальной (А) и ослабленной (В) костной ткани плоскостью  $z = 16$

Из рис. 4.6 и 4.7 видно, что корень зуба перемещается вдоль оси абсцисс и поворачивается относительно оси  $Oy$ . Численный расчет углов поворота показывает, что  $\varphi_x$  и  $\varphi_z$ , как в нормальной, так и в ослабленной костной тканях, равны нулю. Угол поворота  $\varphi_y$  в нормальной и ослабленной костной кости составляет  $-5,04^\circ$  и  $-13^\circ$  соответственно. Максимальные перемещения зубов вдоль координатной оси  $Ox$  в нормальной костной ткани составляет  $\approx 1,1$ , в ослабленной костной ткани  $\approx 2,5$  мм.

Рассмотрим действие вертикальной нагрузки (сила направлена противоположно оси  $Oz$ , перпендикулярно осям  $Ox$  и  $Oy$ ) на премоляр. Геометрические размеры корня зуба описываются параметрами  $a_1 = a_2 = 5$  мм,  $b = 3,5$  мм,  $H = 21$  мм,  $p = 0,4$  (высота корня зуба составляет 14,2 мм) [77]. Величина сосредоточенной нагрузки составляет 100 Н, точка приложения силы имеет координаты  $(0, 0, 22,6)$ . На рис. 4.8 показаны начальное и конечное положение корня премоляра в нормальной и ослабленной костной ткани.

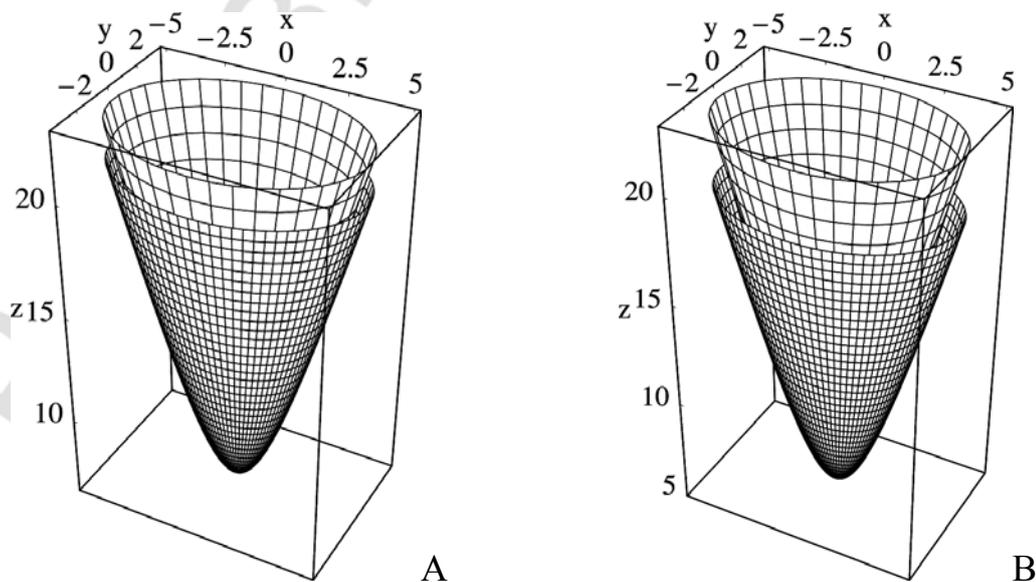


Рис. 4.8. Начальное и конечное положение корня премоляра в нормальной (А) и ослабленной (В) костной ткани после действия сосредоточенной нагрузки

Из рис. 4.8 видно, что корень зуба перемещается корпусно, не поворачиваясь относительно координатных осей. Для количественной оценки перемещений рассмотрим сечения, представленных на рис. 4.8 поверхностей корня премоляра, координатной плоскостью  $x = 0$ . Соответствующие кривые представлены на рис. 4.9.

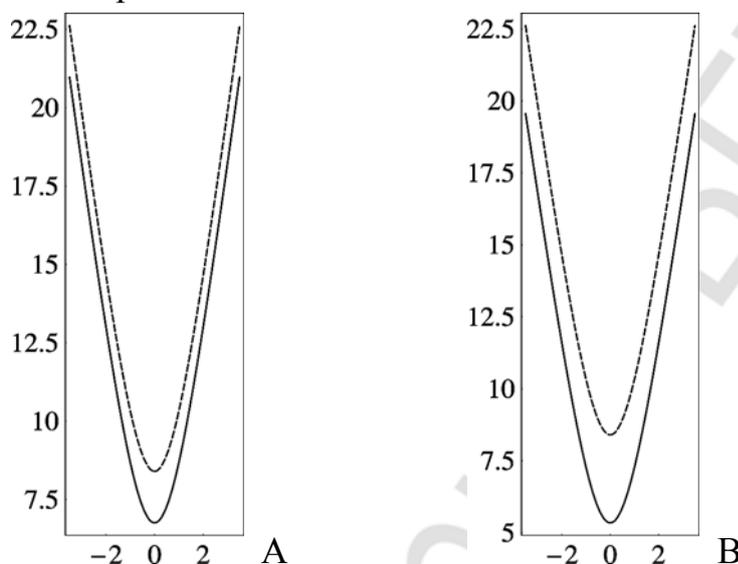


Рис. 4.9. Начальное (штриховая линия) и конечное (сплошная линия) положения сечений корня премоляра в кортикальной нормальной (А) и ослабленной (В) костной ткани плоскостью  $y = 0$

Рис. 4.9 подтверждает то обстоятельство, что повороты корня зуба отсутствуют. Максимальное перемещение корня зуба в нормальной костной ткани составляет  $\approx 1,6$  мм; в ослабленной костной ткани  $\approx 3$  мм.

#### 4.2. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЕЙ ЗУБОВ В НОРМАЛЬНОЙ И ОСЛАБЛЕННОЙ КОСТНОЙ ТКАНИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КЛИНИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ

В качестве конкретных примеров реализаций полученных в предыдущем пункте соотношений для перемещений и поворотов корней зубов, рассмотрим два клинических случая, один из которых связан с устранением эстетического дефекта, другой — с созданием условий для протезирования. Исходные положения зубов верхнего зубного ряда, соответствующие первому случаю, представлены на рис. 4.10.



1



2

Рис. 4.10. Модели верхней челюсти с эстетическим дефектом:  
1 — модель челюсти; 2 — зубы срезаны для проведения измерений

При внешнем осмотре пациента, обратившегося с жалобами на выступание верхней губы справа, выяснено, что ортодонтическое лечение ранее не проводилось. После анамнеза поставлен следующий диагноз: соотношение зубных рядов соответствует первому классу по Энгля, вестибулярное положение зуба 13, нёбное положение зуба 12. Пациенту рекомендовано удалить зуб 14, дистализировать зуб 13, вестибулярно переместить зуб 12. Далее рассмотрим математическое моделирование перемещений зубов в нормальной и ослабленной костной ткани на основании результатов пункта 4.1. Измерения начальных смещений зуба 12 показывает, что корень зуба необходимо переместить вдоль положительного направления оси абсцисс на 5 мм. При расчете перемещений резца и клыка будем считать, что действие сосредоточенной нагрузки  $P_{im}^{(1)}(t)$  и  $P_{im}^{(2)}(t)$  с течением времени в ослабленной и нормальной костной ткани изменяется в соответствии с выражениями:

$$P_{im}^{(1)} = P_0 \exp(-0.002t), \quad P_{im}^{(2)} = P_0 \exp(-0.00375t), \quad (4.18)$$

где  $P_0$  — нагрузка, действующая на корень в начальный момент времени.

В нашем случае будем считать, что начальная нагрузка  $P_0 = 6$  Н. На рис. 4.11 показано начальное положение корня зуба 12 до устранения дефекта и положение зуба после действия сосредоточенной нагрузки, изменяющейся по закону (4.18), в ослабленной костной ткани. Временной промежуток действия силы составляет 186,2 суток. Координаты точки приложения нагрузки составляют  $(-5, 0, -17,3)$ . Геометрические характеристики резца  $a_1 = a_2 = 2,5$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 17,07$  мм,  $p = 0,3$ . Константы упругости ослабленной костной ткани  $\nu = 0,125$ ,  $E = 80,5$  МПа. Заметим,

что здесь и на рис. 4.13, 4.15 более мелкая сетка соответствует начальному положению резца, более грубая сетка — положению резца, которое он принимает в результате действия сосредоточенной силы.

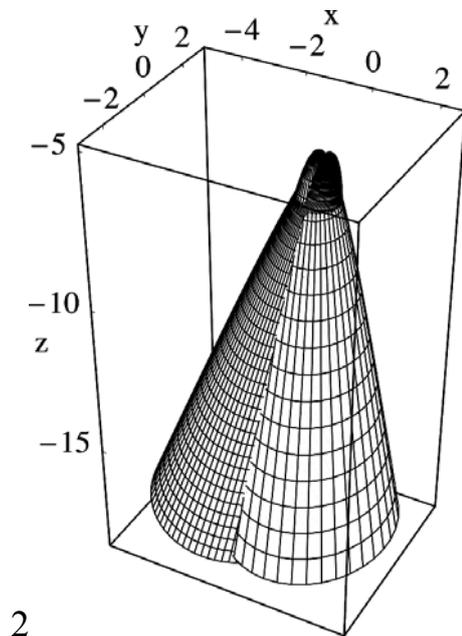


Рис. 4.11. Перемещение резца в ослабленной костной ткани

Количественный анализ перемещений корня зуба вдоль оси абсцисс показывает, что максимальное перемещение составляет 5,04 мм. Расчет, проведенный для случая, когда корень зуба перемещается в нормальной костной ткани в течение такого же промежутка времени и той же нагрузки, показывает, что наибольшее перемещение вдоль координатной оси  $Ox$  составляет 2,05 мм. На рис. 4.12 показаны сечения корня зуба плоскостью  $y = 0$  в исходном состоянии, а также после перемещения в ослабленной костной ткани под действием  $P_0 = 6$  Н в течение 186,2 суток.

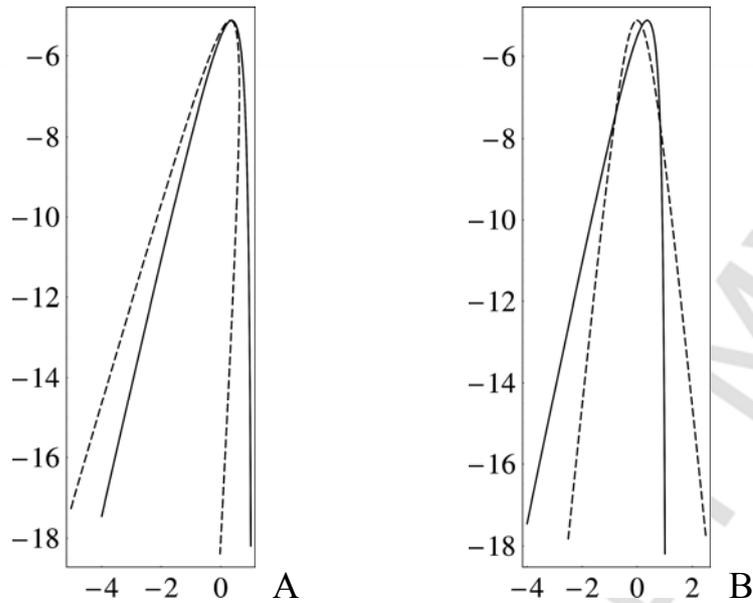


Рис. 4.12. Сечения корня резца в исходном состоянии и после перемещения в ослабленной и нормальной костной ткани:

А — исходное положение резца (штриховая линия) и его положение после перемещения в нормальной костной ткани (сплошная линия); В — положение резца после перемещения в нормальной костной ткани (штриховая линия) и его положение после перемещения в ослабленной костной ткани (сплошная линия)

Расчет перемещений корня резца в нормальной костной ткани показывает, что для приведения корня зуба в вертикальное положение при  $P_0 = 6$  Н необходимо воздействие нагрузки в течение 312,8 суток, что существенно превышает временной промежуток воздействия нагрузки в декальцинированной костной ткани. Добиться перемещения величиной 5 мм в нормальной костной ткани за 186,2 суток можно, увеличив величину начальной нагрузки до 14 Н.

При расчете перемещений клыка будем считать, что действие сосредоточенной нагрузки  $P_{im}^{(1)}(t)$  и  $P_{im}^{(2)}(t)$  с течением времени в ослабленной и нормальной костной ткани изменяется в соответствии с выражениями:

$$P_c^{(1)} = P_c^{(2)} = P_0 \exp(-0.0038t), \quad (4.19)$$

где  $P_0$  — начальная нагрузка.

Направление действия сосредоточенной нагрузки зададим таким образом, чтобы вектор силы к отрицательному направлению оси абсцисс и аппликат составлял  $60^\circ$  и  $30^\circ$  соответственно. Начальную величину сосредоточенной нагрузки  $P_0$  примем равной 6 Н. Геометрические размеры клыка описываются параметрами  $a_1 = 2$  мм,  $a_2 = 5$  мм,  $b = 4$  мм,  $H = 25,4$  мм,  $p = 0,5$ . На рис. 4.13 с двух разных точек обзора показаны исходное положение корня зуба и положение корня, являющееся результатом действия на корень сосредоточенной нагрузки в ослабленной костной ткани. Координаты точки приложения нагрузки составляют  $(0, 0, -26,4)$ .

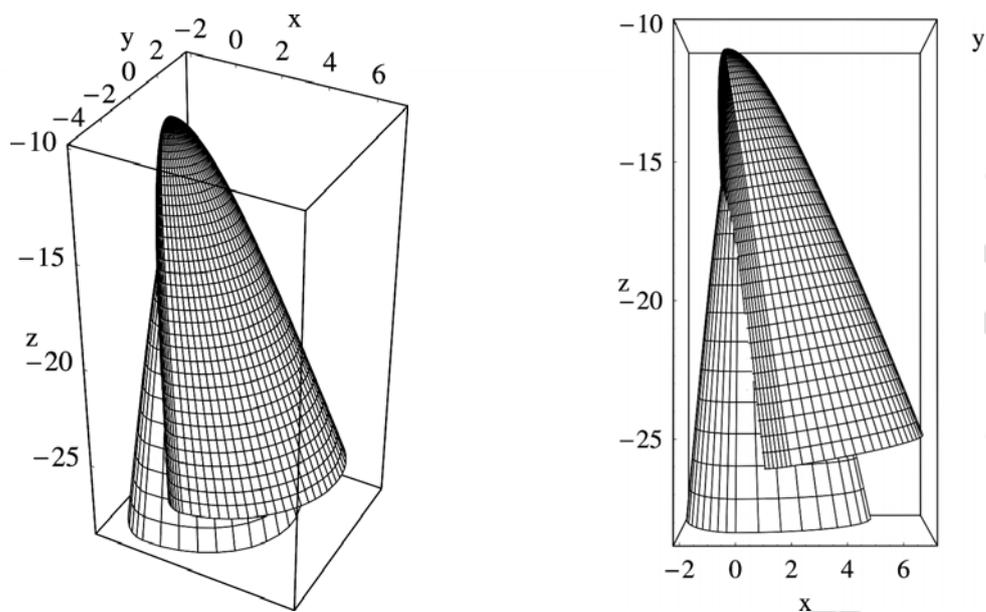


Рис. 4.13. Перемещение клыка в ослабленной костной ткани

Расчет перемещений по координатным осям показывает, что величина смещения вдоль оси  $Ox$  составляет 2,02 мм, по оси  $Oz$  корень зуба смещается на 1,7 мм. Промежуток времени, в течении которого осуществляется перемещение зуба составляет 62,4 суток. Найдем перемещения корня зуба в нормальной костной ткани в тех же условиях за тот же временной промежуток. Соответствующие положения корней клыка в плоскости  $y = 0$  показаны на рис. 4.14.

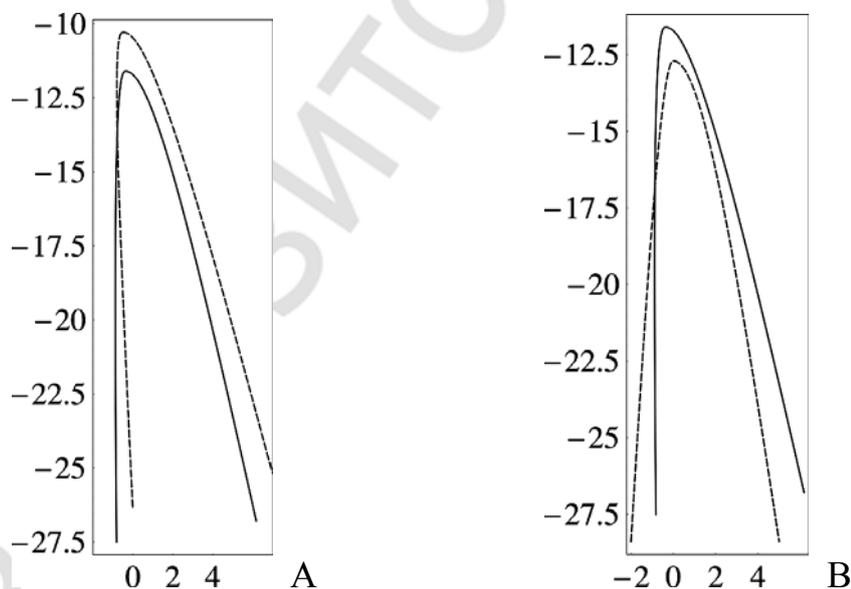


Рис. 4.14. Сечения корня клыка в исходном состоянии (1) и после перемещений в ослабленной (2) и нормальной (3) костной ткани:

А — исходное положение клыка (штриховая линия) и его положение после перемещения в нормальной костной ткани (сплошная линия); В — положение клыка после перемещения в нормальной костной ткани (штриховая линия) и его положение после перемещения в ослабленной костной ткани (сплошная линия)

Из рис. 4.14 видно, что по вертикали и горизонтали максимальное перемещение корня клыка составляет 1,6 мм и 0,8 мм соответственно. Трехмерная визуализация исходного положения клыка и положения корня после перемещения в нормальной костной ткани в течение 62,4 суток при начальной нагрузке  $P_0 = 6$  Н с двух точек обзора показана на рис. 4.15.

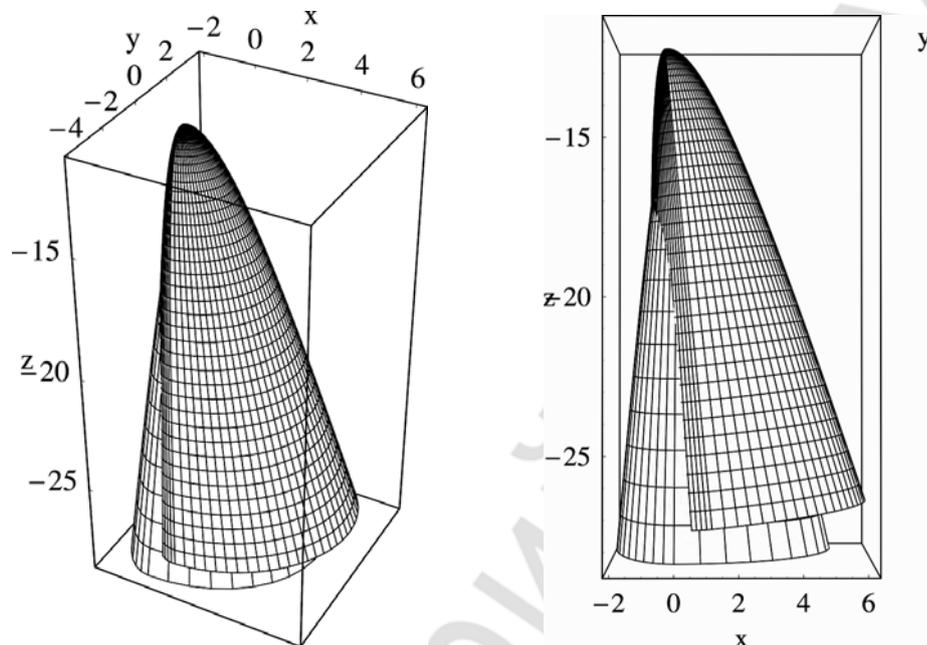


Рис. 4.15. Перемещение клыка в нормальной костной ткани с двух точек обзора

Расчет временного промежутка, необходимого для приведения клыка в вертикальное положение, проведенный в соответствие с формулой (4.18), показывает, что воздействие сосредоточенной нагрузки на корень клыка в нормальной костной ткани при  $P_0 = 6$  Н должно продолжаться 159,5 суток. Этот промежуток более чем в два раза превышает время воздействия силы на корень зуба в ослабленной костной ткани.

Рассмотрим следующий пример. На кафедру ортопедической стоматологии обратился пациент 36 лет, с жалобами на затрудненное пережевывание пищи и отсутствие места для изготовления мостовидных протезов. Из анамнеза установлено, что жевательные зубы потеряны более десяти лет назад, пациент ранее не протезировался. Объективно: Внешний осмотр без особенностей. Диагноз: частичная вторичная адентия верхней и нижней челюстей, третий класс по Кеннеди, зубоальвеолярное выдвигание в области зубов 35, 37 соответствуют первому классу по Пономарёвой. Изображения моделей челюстей пациента представлены на рис. 4.16.

Пациенту рекомендовано изготовить разобщающий мостовидный протез с опорой на зубы 13, 15 и 18. Предварительно необходимо путем поэтапного повышения прикуса переместить зубы 35 и 37 в исходное положение.

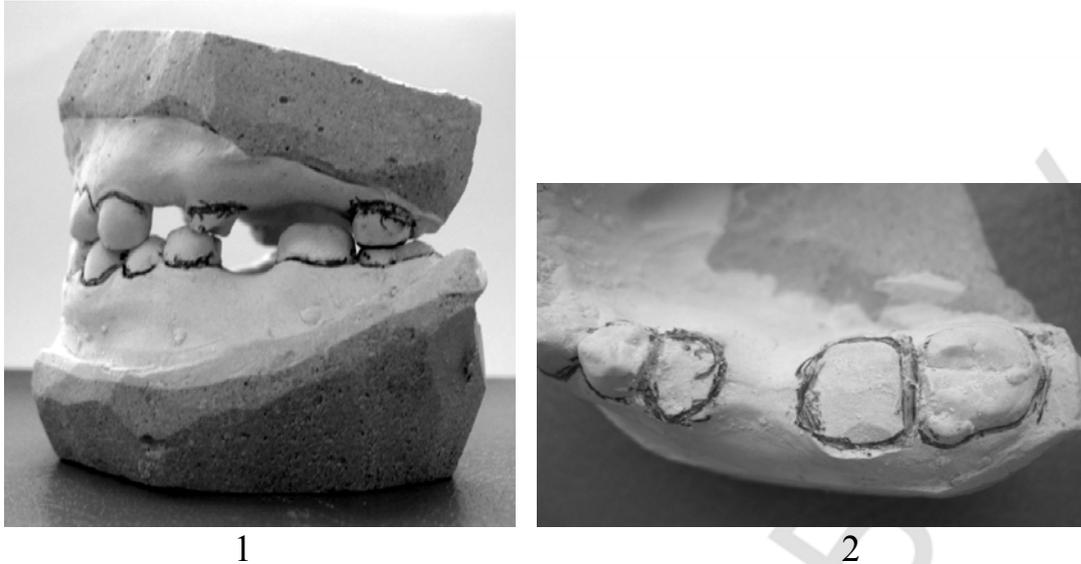


Рис. 4.16. Модели челюстей с отсутствием места для протезирования:  
1 — модель в прикусе; 2 — зубы срезаны для проведения измерений

Далее рассмотрим моделирование перемещения зуба 35 в ослабленной и нормальной костной ткани, считая, что действие сосредоточенной нагрузки на зуб в нормальной и ослабленной костной ткани изменяется в соответствии с формулами (4.18). Геометрические характеристики корня зуба примем  $a_1 = a_2 = 5$  мм,  $b = 3,5$  мм,  $H = 21$  мм,  $p = 0,4$ . Сосредоточенную нагрузку приложим в точке с координатами  $(0, 0, 22,62)$  и направим противоположно положительному направлению оси аппликат. Начальная величина силы  $P_0 = 6$  Н. На рис. 4.17 показаны сечения корня премоляра плоскостью  $y = 0$  при его перемещении в ослабленной и нормальной костной ткани в течение 166,6 суток.

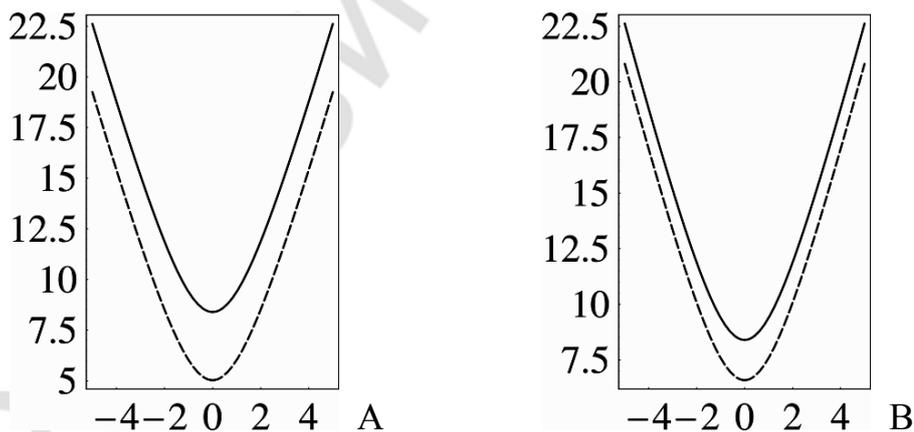


Рис. 4.17. Сечения корня премоляра в исходном состоянии и после перемещения в ослабленной и нормальной костной ткани:

А — исходное положение корня премоляра (сплошная линия) и конечное положение после перемещения в ослабленной костной ткани (штриховая линия); В — исходное положение корня премоляра (сплошная линия) и конечное положение после перемещения в нормальной костной ткани (штриховая линия)

Расчет величин перемещений по оси аппликат показывает, что в ослабленной и нормальной костной ткани в течение указанного промежутка времени перемещение корня зуба составляет 3,4 и 1,8 мм соответственно. Для смещения корня в нормальной костной ткани на величину 3,4 мм, продолжительность действия сосредоточенной нагрузки, изменяющейся согласно формуле (4.18), должна составить 224,4 суток.

### 4.3. ВЛИЯНИЕ АТРОФИИ КОСТНОЙ ТКАНИ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОРНЕЙ ЗУБОВ

Для вычисления перемещений корней зубов при наличии атрофии костной ткани, связанной с изменением глубины закрепления корня, целесообразно выполнить преобразования геометрических параметров. Для этого введем обозначения:

$$a_k = \frac{a_{k0} \sqrt{s(1-p)(p(2-s)+s)}}{\sqrt{1-p^2}}, b_k = \frac{b_{k0} \sqrt{s(1-p)(p(2-s)+s)}}{\sqrt{1-p^2}}, \quad (4.20)$$

$$H = \frac{h_n s}{\sqrt{1+p^2}-p}, s = \frac{h}{h_n},$$

где  $h$  — высота корня зуба при атрофии,  $h_n$  — высота корня зуба в норме,  $a_{k0}, b_0$  — полуоси эллипсов верхнего поперечного сечения в норме,  $k = 1, 2$ . В результате преобразований выражения для координат центров сопротивления примут вид:

С учетом выражений (4.19) для жесткостей корня зуба при повороте будем иметь:

$$z_{atr}^{(1)} = \frac{(1-p)h_n s}{3(\sqrt{1+p^2}-p)} \left( \frac{3b_0^2}{h_n^2 s} (\sqrt{1+p^2}-p)^2 (p(2-s)+s) + \right. \\ \left. + (1-p)(1+2p) \left( 1 + \frac{b_0^2 \gamma}{a_{10} a_{20}} + \frac{b_0^2 \gamma_2 (\sqrt{1+p^2}-p)^2 (p(2-s)+s)}{(1+p)h_n^2 s} \right) \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{2}(1-p^2) \left( 1 + \frac{2b_0^2 (\sqrt{1+p^2}-p)^2 (p(2-s)+s)}{(1+p)h_n^2 s} + \frac{b_0^2 \gamma}{a_{10} a_{20}} \right) + \right. \\ \left. + p^2 \left( 1 + \frac{b_0^2 \gamma}{a_{10} a_{20}} \right) \ln(p) \right)^{-1},$$

$$\begin{aligned}
x_{atr}^{(2)} &= \frac{4(a_{10} - a_{20})\sqrt{s(1-p)(p(2-s)+s)}}{3\pi\sqrt{1-p^2}} \left( \sqrt{(1-p^2)^3} + \right. \\
&+ \left. \frac{(1+p)h_n^2 s \gamma \left( \sqrt{(1-p^2)^3} - 3p^2\sqrt{(1-p^2)} + 3p^3 \arctan\left(\frac{\sqrt{(1-p^2)}}{p}\right) \right)}{3b_0^2 \left( \sqrt{(1-p^2)} - p \right)^2 (p(2-s)+s)} \right) \times \\
&\times \left( 1-p^2 + \frac{(1+p)h_n^2 s (b_0^2 + a_{10}a_{20}\gamma)(1-p^2 + 2p^2 \ln(p))}{2a_{10}a_{20}b_0^2 \left( \sqrt{(1-p^2)} - p \right)^2 (p(2-s)+s)} \right)^{-1}, \\
z_{atr}^{(2)} &= \frac{(1-p)h_n s}{\left( \sqrt{1+p^2} - p \right)} \left( \frac{3b_0^2 \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s)+s)}{h_n^2 s} + \right. \\
&+ (1-p)(1+2p) \left( \frac{b_0^2}{a_{10}a_{20}} + \gamma + \frac{b_0^2 \gamma_2 \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s)+s)}{(1+p)h_n^2 s} \right) \times \\
&\times \left( \frac{3}{2}(1-p^2) \left( \frac{b_0^2}{a_{10}a_{20}} + \frac{2b_0^2 \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s)+s)}{(1+p)h_n^2 s} + \gamma \right) + \right. \\
&\left. + p^2 \left( \frac{b_0^2}{a_{10}a_{20}} + \gamma \right) \ln(p) \right)^{-1}, \\
x_{atr}^{(3)} &= \frac{4(a_{10} - a_{20})\sqrt{s(1-p)(p(2-s)+s)}}{3\pi\sqrt{1-p^2}} \left( \gamma\sqrt{(1-p^2)^3} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. \left. \left. \left. (1+p)h_n^2s \left( \sqrt{(1-p^2)^3} - 3p^2\sqrt{(1-p^2)} + 3p^3 \arctan \left( \frac{\sqrt{(1-p^2)}}{p} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \times \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \frac{+}{3b_0^2(\sqrt{1+p^2}-p)^2(p(2-s)+s)} \right) \right) \right) \right) \times \\
& \times \left( \gamma(1-p^2) + \left( \frac{h_n^2s^2\sqrt{1-p^2}}{b_0(\sqrt{1+p^2}-p)^2\sqrt{s(1-p)(p(2-s)+s)}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1+p}{a_{10}a_{20}s(2p+s-ps)} \right) \left( \frac{1}{2}(1-p^2) + p^2 \ln(p) \right) \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

С учетом обозначений (4.20) необходимо выполнить преобразование выражений (4.12) для поступательных перемещений и выражений для жесткостей при вращении зуба. В результате для поступательных перемещений получим

$$\begin{aligned}
u_{atr}^{(0)} &= \frac{4R_x h a_{10} a_{20} b_0 (\sqrt{1+p^2}-p)^2}{\pi s G (a_{10} + a_{20})} \times \\
& \times \left( (1-p)(a_{10}a_{20} \left( 2b_0^2 \left( 1-2p(\sqrt{1+p^2}-p) \right) \right) (p(2-s)+s) + (1+p)h_n^2s) + \right. \\
& \left. + b_0^2(1+p)h_n^2s\gamma + 2p^2h_n^2s(a_{10}a_{20} + \gamma b_0^2) \ln(p) \right)^{-1}, \\
v_{atr}^{(0)} &= \frac{4R_y h a_{10} a_{20} b_0 (\sqrt{1+p^2}-p)^2}{\pi s G (a_{10} + a_{20})} \times \\
& \times \left( (1-p)(a_{10}a_{20} \left( 2b_0^2 \left( 1-2p(\sqrt{1+p^2}-p) \right) \right) (p(2-s)+s) + (1+p)h_n^2s\gamma) + \right. \\
& \left. - b_0^2(1+p)h_n^2s + 2p^2h_n^2s(a_{10}a_{20}\gamma + b_0^2) \ln(p) \right)^{-1}, \\
v_{atr}^{(0)} &= \frac{4R_z h a_{10} a_{20} b_0 (\sqrt{1+p^2}-p)^2}{\pi s G (a_{10} + a_{20})} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left( (1-p) \left( b_0^2 (1+p) h_n^2 s + a_{10} a_{20} \left( (1+p) h_n^2 s + 2b_0^2 \gamma \left( 1 - 2p \left( \sqrt{1+p^2} - p \right) \right) \right) \right) \times \right. \\ \left. \times (p(2-s) + s) \right) + 2 \left( a_{10} a_{20} + b_0^2 \right) p^2 h_n^2 s \ln(p) \Big)^{-1}.$$

Выпишем выражения для жесткостей при вращении. Учитывая вид системы (4.13), выпишем соотношения для жесткостей при вращении относительно осей координат и жесткости, характеризующей момент сил относительно оси абсцисс, необходимый для поворота зуба вокруг оси аппликата на угол равный 1 рад. После несложных преобразований получим

$$\mu_{atr}^{(x)} = \frac{1}{8h \left( \sqrt{1-p^2} - p \right)^2 (1-p)} \left( h_n^2 s^3 G b_0 \pi (a_{10} + a_{20}) (1-p) (p(2-s) + s) \times \right. \\ \times \left( \frac{1-p^2}{2} \left( 5 - \frac{b_0^2}{a_{10} a_{20}} \right) + (1-p^2)^2 \left[ \frac{(1+p) h_n^2 s}{a_{10} a_{20} \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s) + s)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3b_0^2}{4a_{10} a_{20}} - \frac{7}{4} + 2\gamma + \frac{b_0^2 \gamma \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s) + s)}{(1+p) h_n^2 s} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1+p) h_n^2 s \gamma}{b_0^2 \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s) + s)} \right] - \frac{4 \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^{z_{atr}^{(2)}}}{3h_n s} \left( 2(1-p^3) + (1-p)^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1+2p) \left[ \frac{(1+p) h_n^2 s}{\left( \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)^2 (p(2-s) + s) \right) \left( \frac{1}{a_{10} a_{20}} + \frac{\gamma}{b_0^2} \right) + \gamma - 1} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( 3 + \frac{b_0^2}{a_{10} a_{20}} \right) p^4 \ln(p) \right] \right) \Big), \\ \mu_{atr}^{(xz)} = \frac{1}{3h(1-p^2) \left( \sqrt{1+p^2} - p \right)} \left( 2s^2 G b_0 h_n (a_{10} + a_{20}) (1-p) (p(2-s) + s) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{1}{4} \pi x_{atr}^{(2)} \left( 2(1-p^3) + (1-p)^2(1+2p) \left( \frac{(1+p)h_n^2 s}{(\sqrt{1+p^2}-p)^2 (p(2-s)+s)} \times \right. \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left. \left( \frac{1}{a_{10}a_{20}} + \frac{\gamma}{b_0^2} \right) + \gamma - 1 \right) \right) + \frac{(a_{10}-a_{20})\sqrt{s(1-p)(p(2-s)+s)}}{\sqrt{1-p^2}} \left( \sqrt{(1-p^2)^3} + \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{(1+p)h_n^2 s \gamma \left( 2\sqrt{(1-p^2)^3} - 3p^2\sqrt{(1-p^2)} + 3p^4 \ln \left( \frac{p+\sqrt{1-p^2}}{p} \right) \right)}{8b_0^2 (\sqrt{1-p^2}-p)^2 (p(2-s)+s)} \right) \right) \right), \\
\mu_{atr}^{(y)} &= \frac{1}{48h(\sqrt{1+p^2}-p)^2(1-p^2)} \left( h_n^2 s^3 b_0 G \pi (a_{10} + a_{20}) (1-p)(p(2-s)+s) \times \right. \\
& \times \left( \frac{3(a_{10}a_{20} + 5b_0^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2)(1-p^2)}{b_0^2} - \frac{16z_{atr}^{(1)}(1-p^2)(\sqrt{1+p^2}-p)}{h_n s} \right. \\
& \left. \left. - \frac{8z_{atr}^{(1)}(1-p)^2(1+2p)(\sqrt{1+p^2}-p)}{h_n s} \left( \frac{(1+p)h_n^2 s}{a_{10}a_{20}(\sqrt{1+p^2}-p)^2(p(2-s)+s)} \times \right. \right. \right. \\
& \times \left. \left. \left. \left( \frac{1}{a_{10}a_{20}} + \frac{\gamma}{b_0^2} \right) + \gamma - 1 \right) + \frac{3}{2}(1-p^2)^2 \left( \frac{4(1+p)h_n^2 t}{b_0^2 (\sqrt{1+p^2}-p)^2 (p(2-s)+s)} - \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{-7+8\gamma + \frac{4(1+p)h_n^2 t \gamma}{a_{10}a_{20}(\sqrt{1+p^2}-p)^2(p(2-s)+s)} + \frac{a_{10}^2 - a_{10}a_{20} - a_{20}^2}{b_0^2(1+p)h_n^2 s} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \times \left( 3(1+p)h_n^2 s + 4\gamma b_0^2 \left( 1 - 2p(\sqrt{1+p^2}-p) \right) (p(2-s)+s) \right) \right) \right) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{32x_{atr}^{(3)}(a_{10} - a_{20})\sqrt{1-p^2}}{\pi b_0^2 \sqrt{s(1-p)}(p(2-s)-s)} \left( \frac{1}{3} \sqrt{(1-p^2)^3} - p^2 \sqrt{1-p^2} + p^3 \arctan \left( \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b_0^2 \gamma \sqrt{(1-p^2)^3} (\sqrt{1+p^2} - p)^2 (p(2-s)+s)}{(1+p)h_n^2 t} \right) - \\
& \quad \left. - \frac{6p^4 (a_{10}^2 - a_{10}a_{20} + a_{20}^2 + 3b_0^2) \ln(p)}{b_0^2} \right) \Bigg), \\
\mu_{atr}^{(z)} = & \frac{1}{8h(\sqrt{1+p^2} - p)^2 (1-p^2)} (h_n^2 s^3 b_0 G \pi (a_{10} + a_{20}) (1-p)(p(2-s)+s) \times \\
& \left( 8 + \gamma \left( \frac{a_{10}^2 - a_{10}a_{20} + a_{20}^2}{b_0^2} + \frac{b_0^2}{a_{10}a_{20}} - 2 \right) \right) \left( \frac{1}{4} (1-p^2)^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(a_{10}^2 - a_{10}a_{20} + a_{20}^2 + b_0^2)(1-p)^2 (1+p)(\sqrt{1+p^2} - p)^2 (p(2-s)+s)}{h_n^2 s} + \right. \\
& \left. - \frac{16x_{atr}^{(2)} \gamma (a_{10} - a_{20}) (1-p^2) \sqrt{(1-p^2)^3}}{3\pi b_0^2 \sqrt{1-p^2} \sqrt{s(1-p)}(p(2-s)+s)} - \frac{1}{2} p^2 (1-p^2 (1-2\ln(p))) \right) \Bigg).
\end{aligned}$$

Чтобы продемонстрировать влияние атрофии костной ткани на поведение корня зуба, находящегося под действием сосредоточенной силы, выполним расчет углов поворота корня клыка и резца. Геометрические размеры корней клыка и резца описываются константами  $a_1 = 2$  мм,  $a_2 = 5$  мм,  $b = 4$  мм,  $H = 25,4$  мм,  $p = 0,5$  (высота корня клыка составляет  $h_n = 15,7$  мм) и  $a_1 = a_2 = 2,5$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 17,07$  мм,  $p = 0,3$  (высота корня резца составляет  $h_n = 12,7$  мм) соответственно. Координаты точки приложения нагрузки величиной 100 Н к корню клыка составляют (3,73, 2,67, 28,4), направление силы составляет  $54,7^\circ$  к отрицательному направлению координатных осей. Координаты точки приложения нагрузки величиной 60 Н к резцу составляют (2,5, 0, 17,8), сила направлена противоположно положительному направлению оси абсцисс и перпендикулярно осям ординат и аппликата. Значения модуля упругости для нормальной костной ткани  $E = 161,0$  МПа, коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$ . Результаты расчета при

отсутствии атрофии и для случаев атрофии 25 % и 50 % представлены в табл. 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

**Углы поворота клыка под действием сосредоточенной силы**

Описание костной ткани	Углы поворота относительно осей координат, °		
	$\varphi_x$	$\varphi_y$	$\varphi_z$
Отсутствие атрофии	2,14	-0,88	-0,13
Атрофия 25 %	7,82	-6,98	-5,21
Атрофия 50 %	43,89	-57,0	-46,2

Таблица 4.2

**Углы поворота резца под действием сосредоточенной силы**

Описание костной ткани	Угол поворота $\varphi_r$ , °
Отсутствие атрофии	-5,02
Атрофия 25 %	-26,27
Атрофия 50 %	-77,28

Заметим, что углы поворота корня резца относительно осей абсцисс и аппликата под действием рассматриваемой нагрузки равны нулю.

Как видно из представленных выше данных при атрофии костной ткани на 50 % при перемещениях клыка и резца углы поворота могут составлять от -46,2 до -77,28°, что в свою очередь может привести к вывихиванию и потере перемещаемого зуба.

## Глава 5

### Расчет напряжений, возникающих в костной ткани под действием сосредоточенной нагрузки

Компоненты тензора напряжений, возникающих в костной ткани, найдем в соответствии с формулами (4.6) с учетом выражений для компонент вектора перемещений (4.4):

$$\sigma_x = -\frac{G}{h} \left( \frac{H}{F_k} \left( \frac{\gamma x (u_0 + (z - z_1) \varphi_y - y \varphi_z)}{a_k^2} + \frac{\gamma_2 y (v_0 + (x - x_2) \varphi_z - (z - z_2) \varphi_x)}{b^2} \right) - \gamma_2 (w_0 - (x - x_3) \varphi_y + y \varphi_x) \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{G}{h} \left( \frac{H}{F_k} \left( \frac{\gamma y (v_0 + (x - x_2) \varphi_z - (z - z_2) \varphi_x)}{b^2} + \frac{\gamma_2 x (u_0 + (z - z_1) \varphi_y - y \varphi_z)}{a_k^2} \right) - \gamma_2 (w_0 - (x - x_3) \varphi_y + y \varphi_x) \right),$$

$$\sigma_z = -\frac{G}{h} \left( \frac{H}{F_k} \left( \frac{x(u_0 + (z - z_1)\varphi_y - y\varphi_z)}{a_k^2} + \frac{y(v_0 + (x - x_2)\varphi_z - (z - z_2)\varphi_x)}{b^2} \right) - \gamma(w_0 - (x - x_3)\varphi_y + y\varphi_x) \right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{GH}{hF_k} \left( \frac{x(v_0 + (x - x_2)\varphi_z - (z - z_2)\varphi_x)}{a_k^2} + \frac{y(u_0 + (z - z_1)\varphi_y - y\varphi_z)}{b^2} \right),$$

$$\tau_{xz} = \frac{G}{h} \left( u_0 + (z - z_1)\varphi_y - y\varphi_z - \frac{xH(w_0 - (x - x_3)\varphi_y + y\varphi_x)}{a_k^2 F_k} \right),$$

$$\tau_{yz} = \frac{G}{h} \left( v_0 + (x - x_2)\varphi_z - (z - z_2)\varphi_x - \frac{yH(w_0 - (x - x_3)\varphi_y + y\varphi_x)}{b^2 F_k} \right),$$

$$F_k = \sqrt{\frac{x^2}{a_k^2} + \frac{y^2}{b^2} + p^2}, \quad k = 1, 2.$$

Применим полученные формулы для нахождения компонент тензора напряжений, возникающих в нормальной ( $E = 161,0$  МПа,  $\nu = 0,25$ ) и ослабленной ( $E = 80,5$  МПа,  $\nu = 0,125$ ) костной ткани при перемещениях корней зубов под действием сосредоточенной нагрузки. На рис. 5.1–5.12 представлены распределения нормальных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  и касательных напряжений  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  в окрестности корня клыка, описываемого геометрическими параметрами  $a_1 = 2$  мм,  $a_2 = 5$  мм,  $b = 4$  мм,  $H = 25,4$  мм,  $p = 0,5$ . Величина нагрузки составляет 10 Н. Линия действия силы наклонена к осям абсцисс, ординат и аппликат на угол  $-54,7^\circ$ . Точка приложения силы имеет координаты (3,73, 2,67, 28,4).

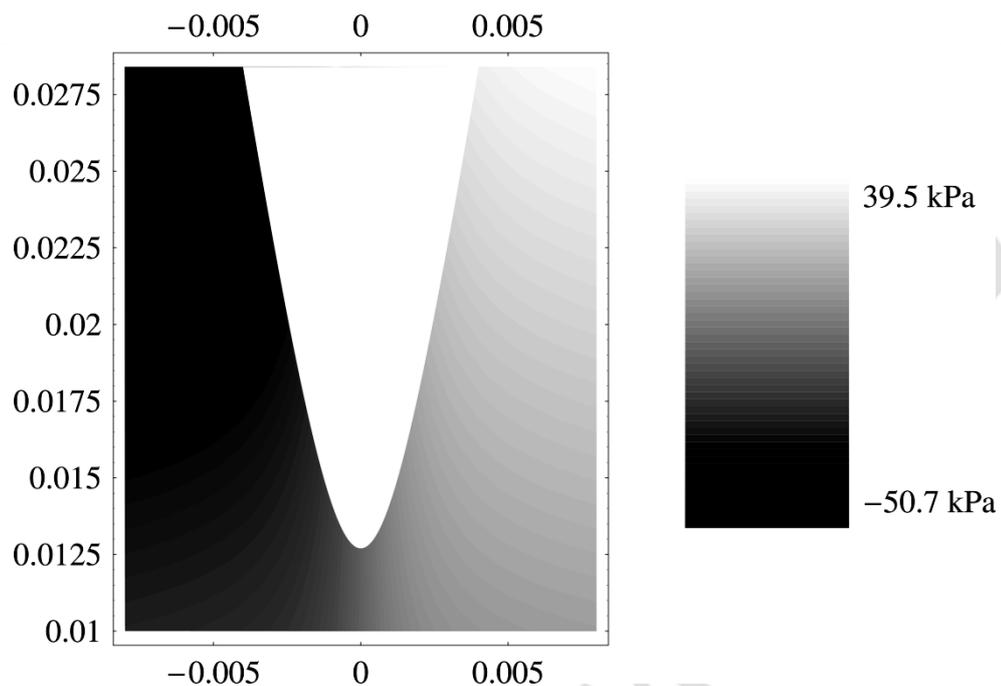


Рис. 5.1. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

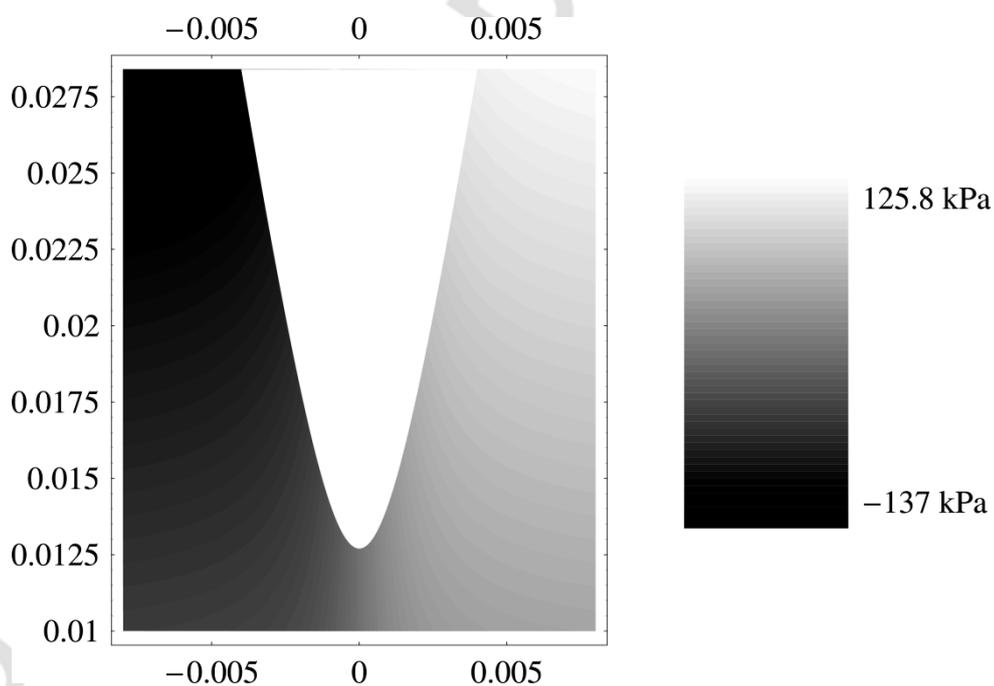


Рис. 5.2. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

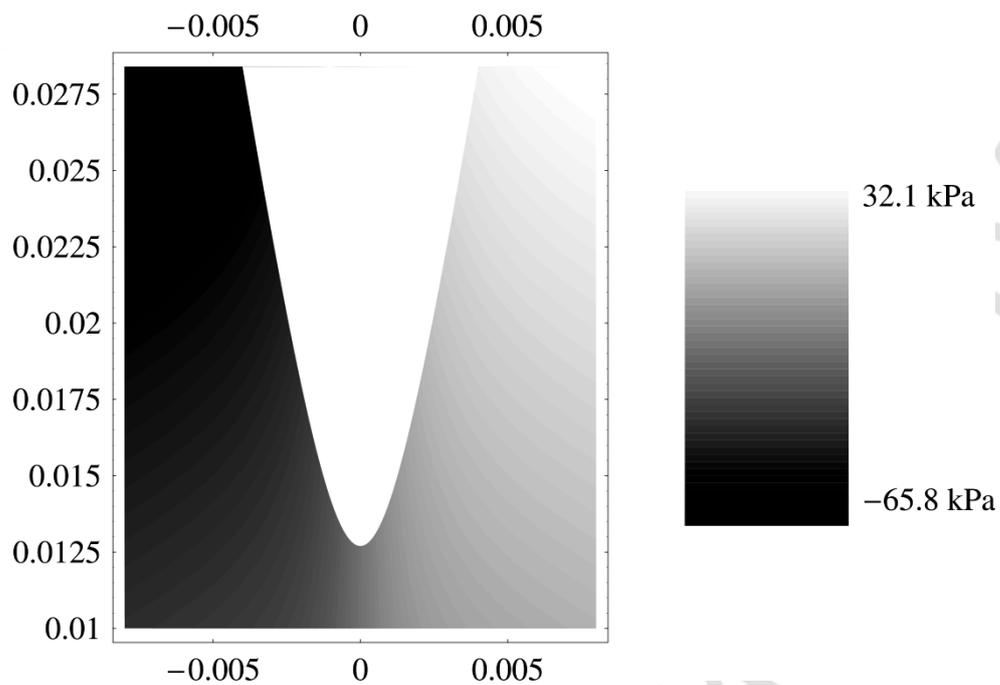


Рис. 5.3. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

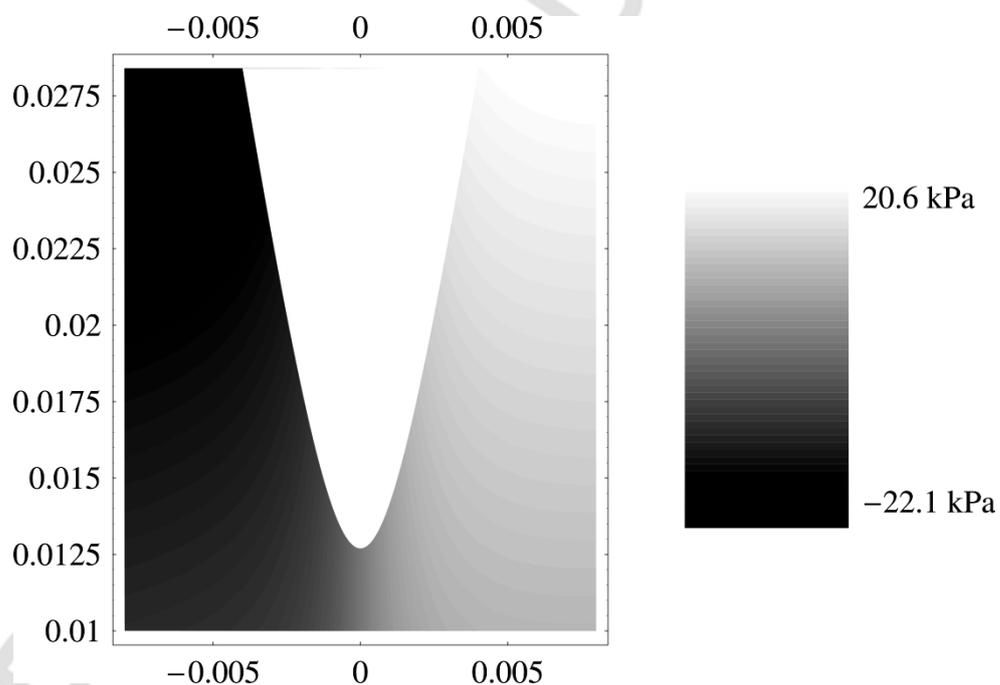


Рис. 5.4. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

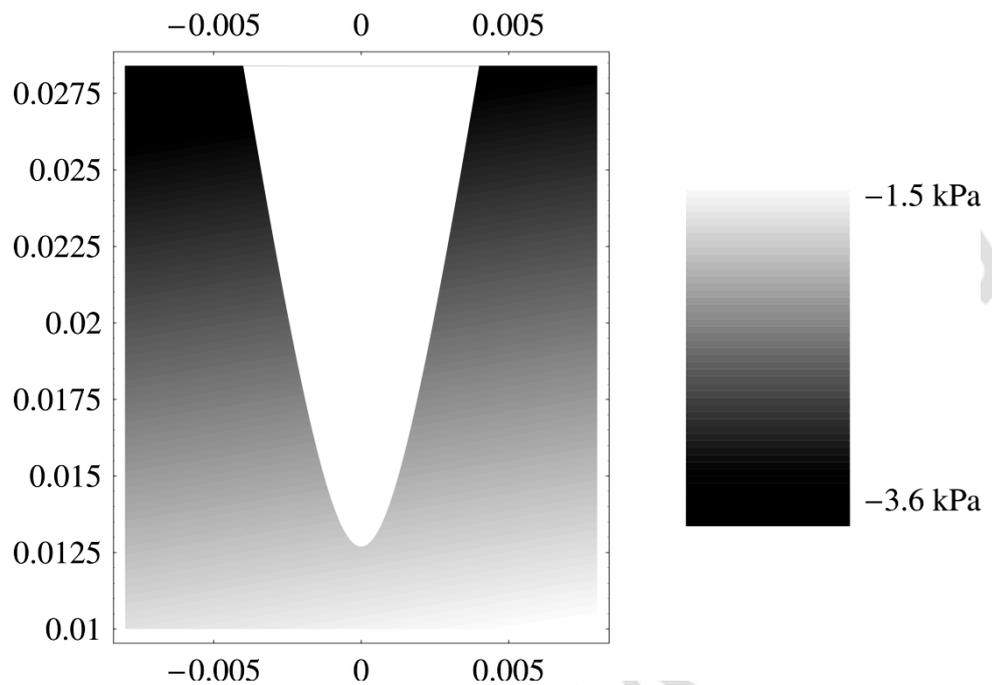


Рис. 5.5. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

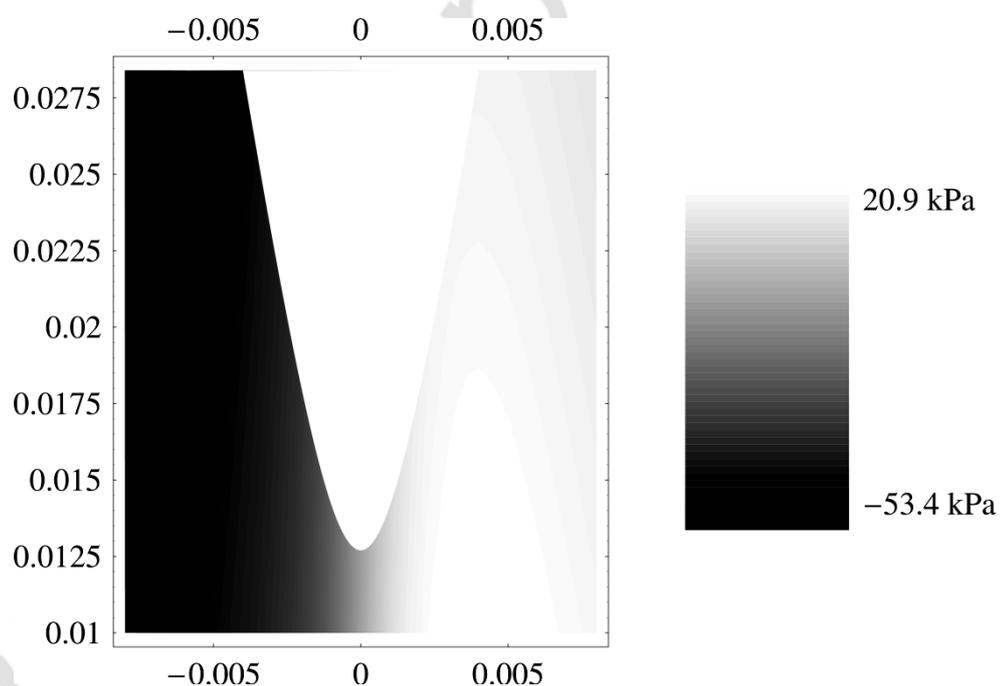


Рис. 5.6. Распределение касательных напряжений  $\tau_{yz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

В ослабленной костной ткани нормальные напряжения незначительно уменьшаются. Это обстоятельство иллюстрирует распределение наиболь-

шей из нормальных напряжений компоненты  $\sigma_y$ , представленное на рис. 5.7 и 5.8.

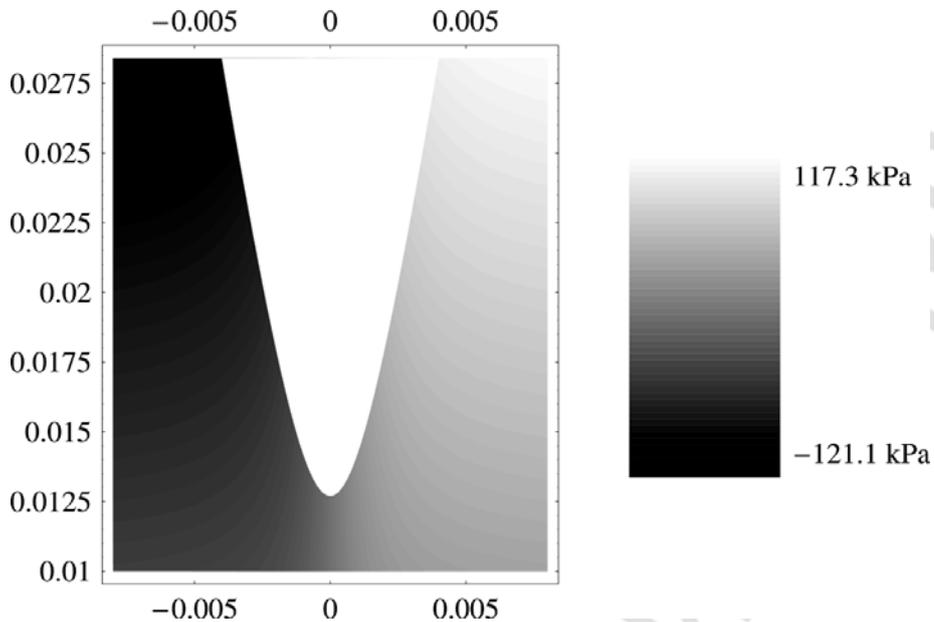


Рис. 5.7. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$ , возникающих в ослабленной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

Касательные напряжения в ослабленной костной ткани могут, как увеличиваться, так и уменьшаться. В частности, на рис. 5.8 представлено распределение компоненты  $\tau_{yz}$ , которое показывает, что максимальное значение напряжения понизилось, а минимальное повысилось по сравнению с соответствующим распределением в нормальной костной ткани.

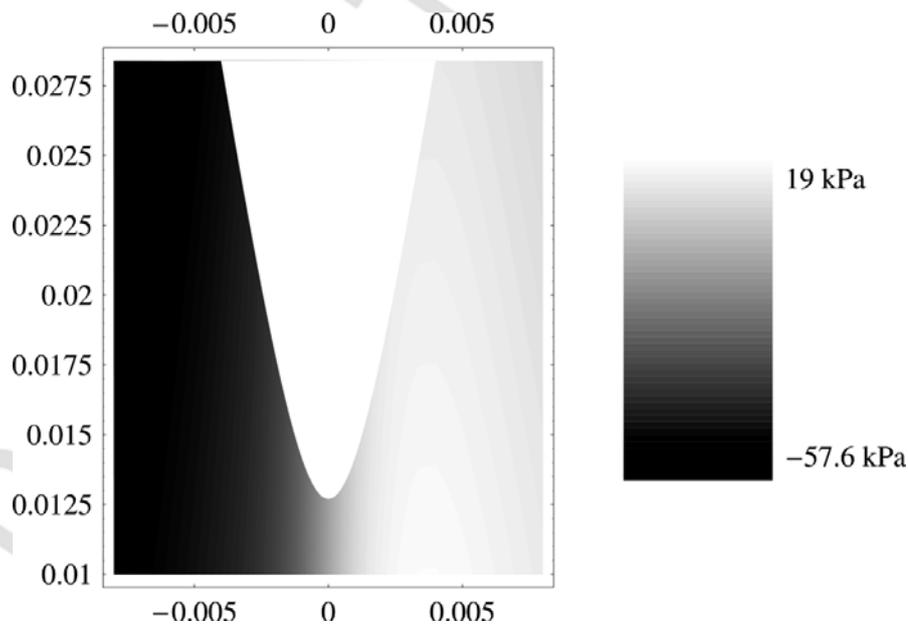


Рис. 5.8. Распределение нормальных напряжений  $\tau_{yz}$ , возникающих в ослабленной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

Распределение трех нормальных напряжений и компоненты касательных напряжений  $\tau_{xy}$  в сечении корня зуба и прилегающей костной ткани в плоскости  $y = 0$  имеют тот же вид, что представленные на рис. 5.1–5.4 диаграммы. Отличия наблюдаются для касательных напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ . Соответствующие распределения для напряжений, возникающих в нормальной костной ткани, представлены на рис. 5.9 и 5.10.

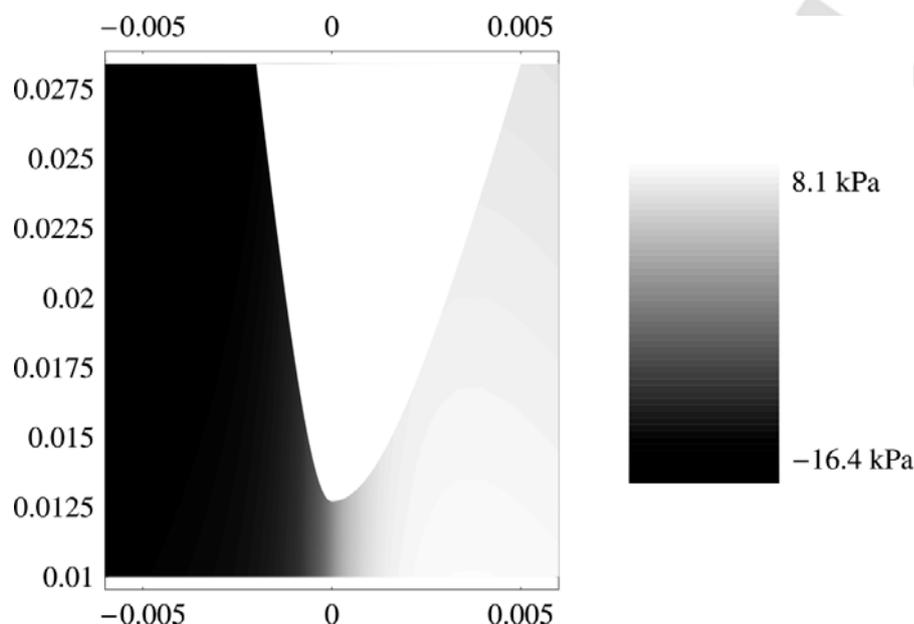


Рис. 5.9. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $y = 0$

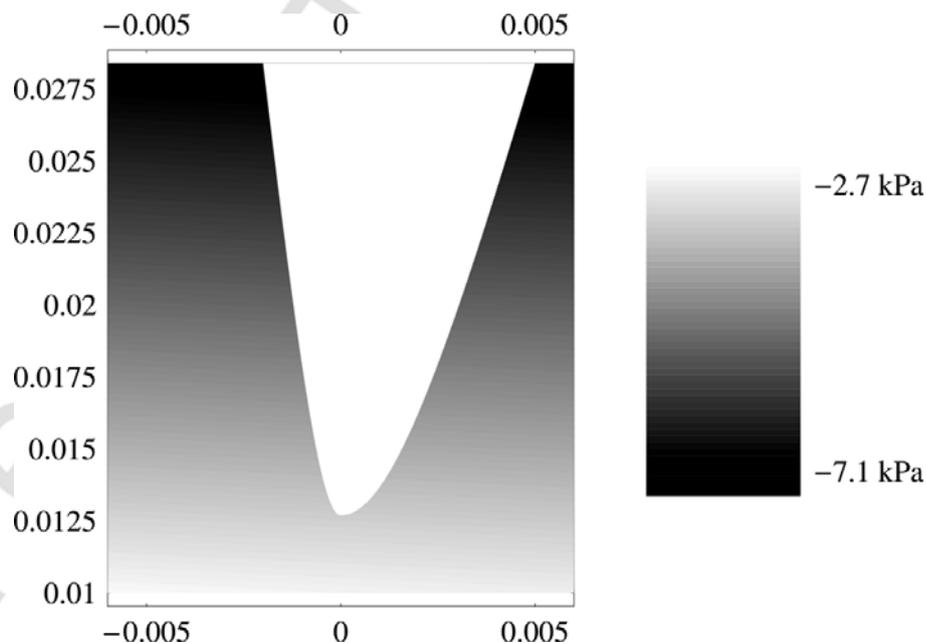


Рис. 5.10. Распределение касательных напряжений  $\tau_{yz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на клык, в сечении плоскостью  $x = 0$

Рассмотрим распределения нормальных и касательных напряжений в окрестности корня резца, возникающих под действием сосредоточенной нагрузки, модуль которой равен 10 Н. Геометрическая форма корня зуба характеризуется параметрами  $a_1 = a_2 = 2,5$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 17,07$  мм,  $p = 0,3$ . Сила приложена в точке  $(2,5, 0, 17,8)$  и направлена противоположно оси абсцисс (перпендикулярно осям ординат и аппликат). Ниже, на рис. 5.11–5.16 представлены диаграммы нормальных и касательных напряжений, полученные в плоскости  $z = 16$ , для случая нормальной костной ткани.

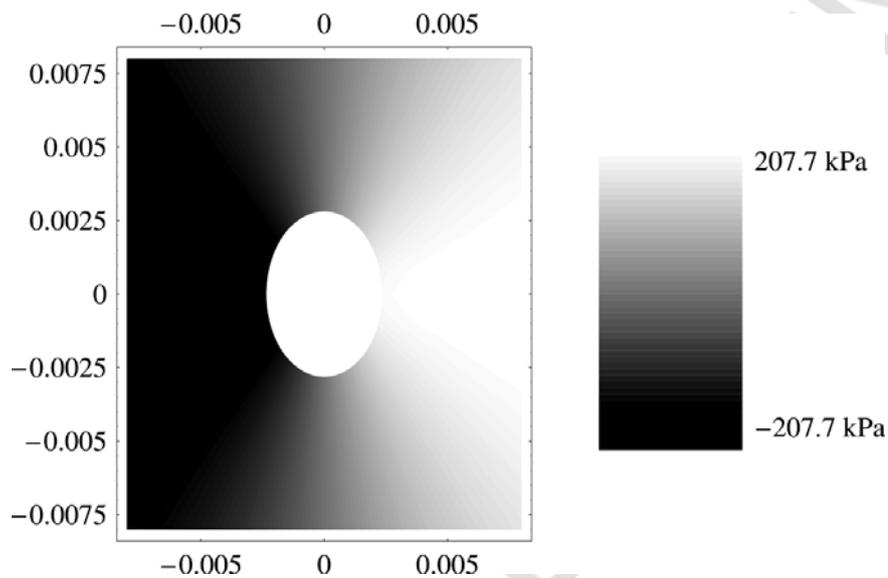


Рис. 5.11. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $z = 16$

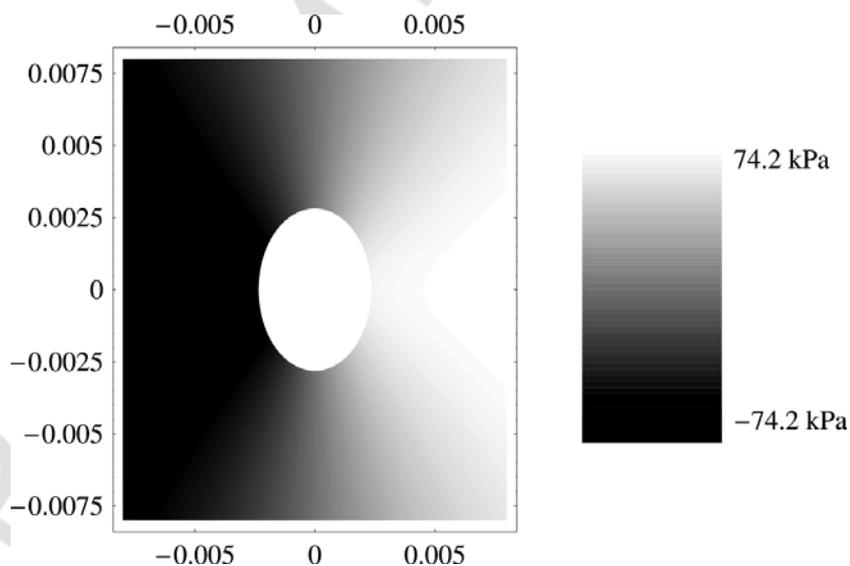


Рис. 5.12. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $z = 16$

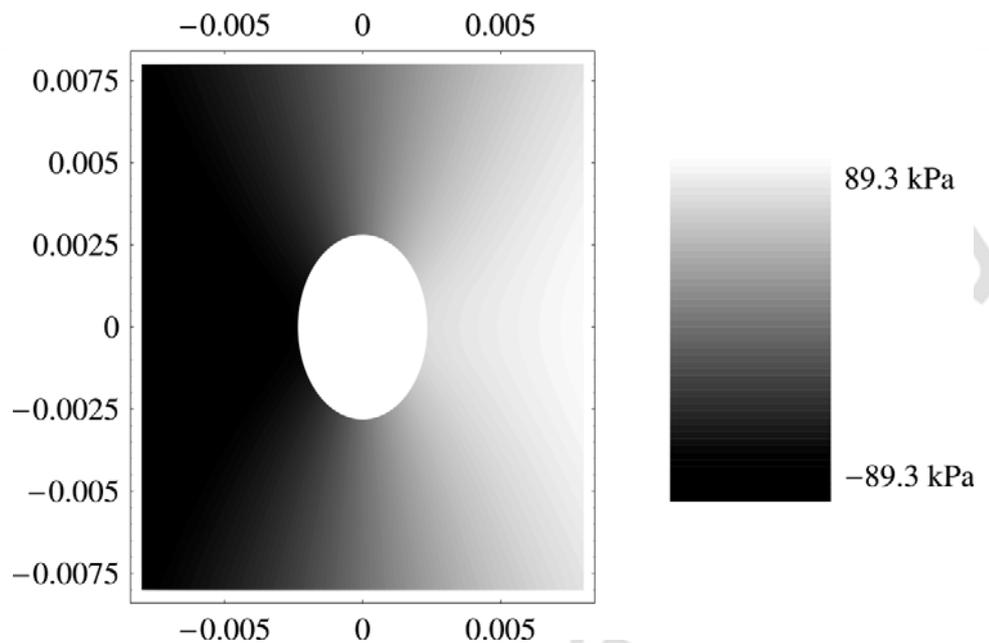


Рис. 5.13. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_z$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $z = 16$

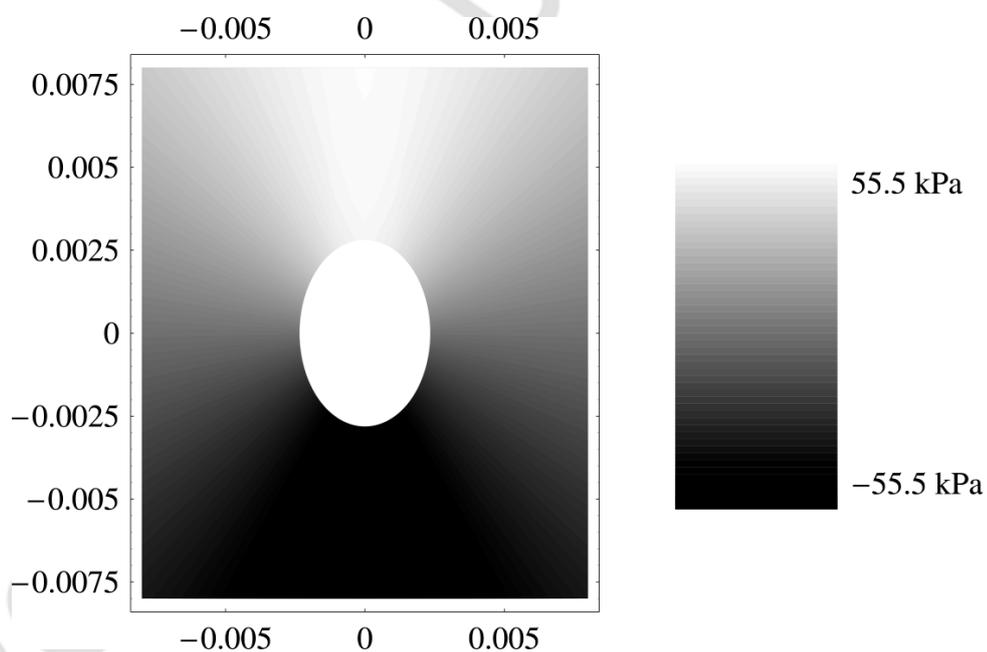


Рис. 5.14. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xy}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $z = 16$

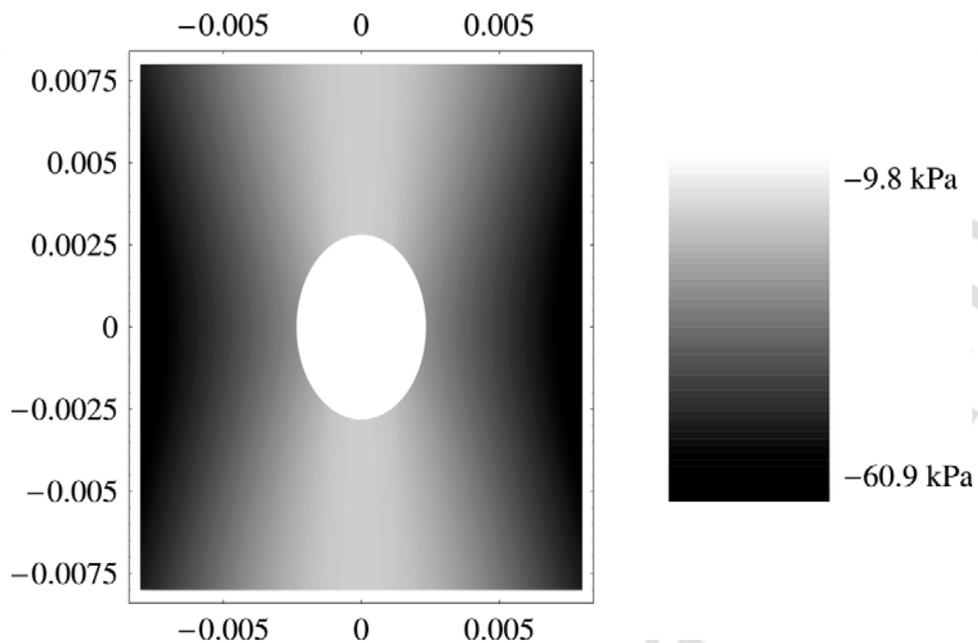


Рис. 5.15. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $z = 16$

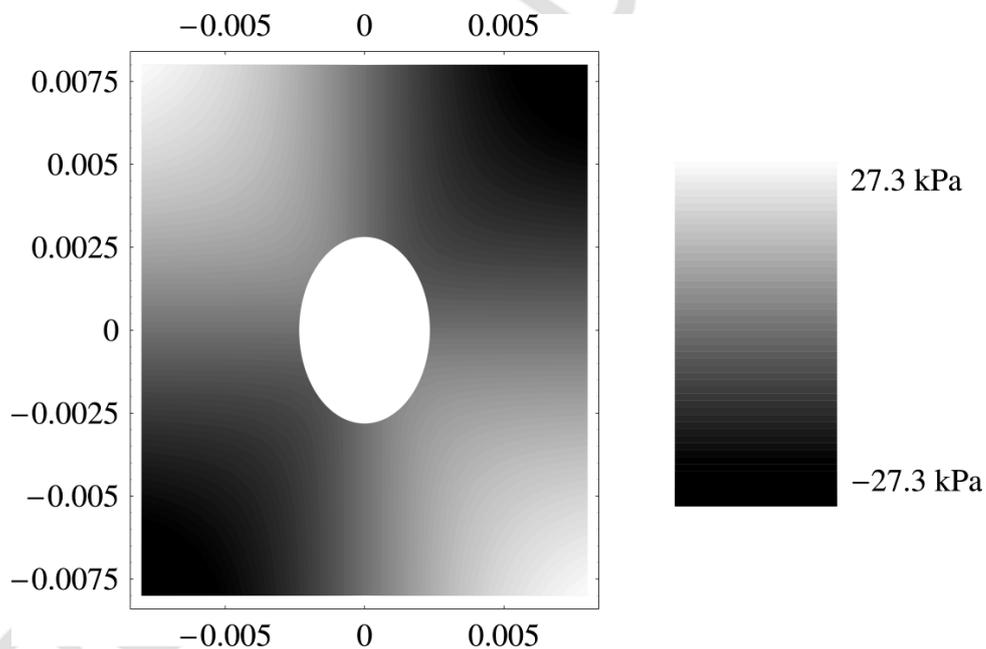


Рис. 5.16. Распределение касательных напряжений  $\tau_{yz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $z = 16$

Как следует из рис. 5.11–5.16, при перемещении резца наибольшими среди остальных напряжений является компонента напряжения  $\sigma_x$ , что обусловлено характером приложенной нагрузки. На всех диаграммах, за исключением распределения компоненты  $\tau_{xz}$ , в костной ткани возникают зоны нулевых напряжений. Отметим также, что с изменением высоты распределение напряжений может существенно изменяться. Проиллюстрируем это обстоятельство на примере диаграммы для нормального напряжения  $\sigma_x$ , полученной в плоскости  $y = 0$ . Результаты построения представлены на рис. 5.17.

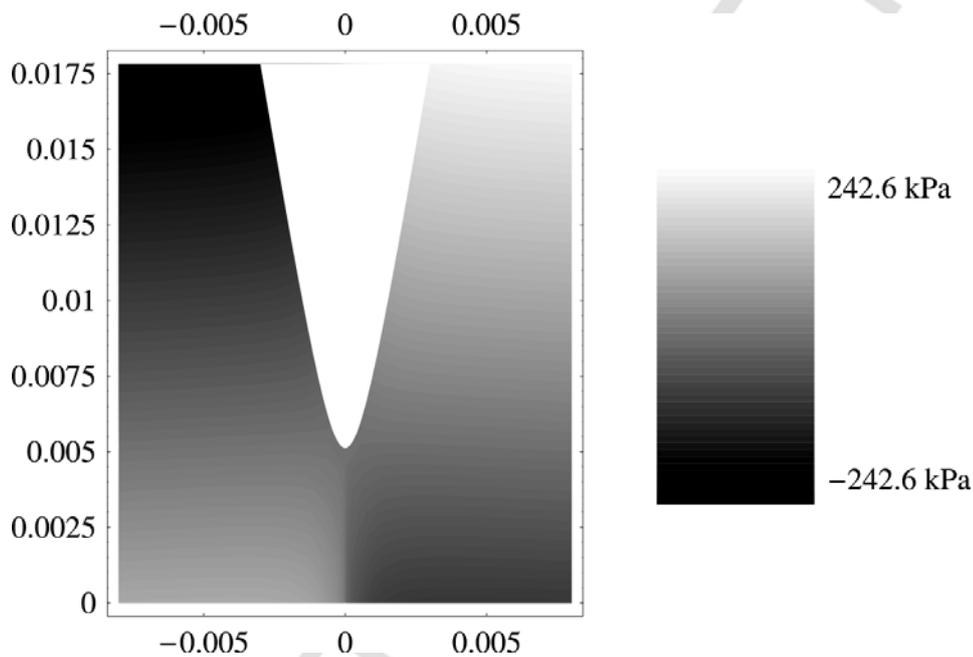


Рис. 5.17. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на резец, в сечении плоскостью  $y = 0$

Из рис. 5.17 видно, что с уменьшением координаты  $z$  от 17,8 мм до нуля, напряжения  $\sigma_x$  изменяются как по абсолютной величине, так и по знаку. В частности, наибольшие сжимающие напряжения в области слева от корня зуба переходят в растягивающие напряжения и наоборот, наибольшие растягивающие переходят в сжимающие. Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения по абсолютной величине равны 98,9 кПа. В ослабленной костной ткани диаграммы напряжений качественно не изменяются. В этом случае наблюдается незначительное уменьшение нормальных напряжений, например максимальное значение компоненты  $\sigma_x$  в плоскости  $z = 16$  уменьшается до 203,3 кПа, а также увеличение касательных напряжений. В частности, максимальное значение компоненты  $\tau_{xy}$  с 55,5 кПа увеличивается до 71,2 кПа.

Рассмотрим распределения нормальных и касательных напряжений в окрестности корня моляра, возникающих под действием сосредоточенной нагрузки, модуль которой равен 10 Н. Геометрическая форма корня зуба характеризуется параметрами  $a_1 = a_2 = 2,5$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 17,07$  мм,  $p = 0,3$ . Сила приложена в точке  $(0, 0, 22,62)$  и направлена противоположно оси аппликат (перпендикулярно осям абсцисс и ординат). Нормальные напряжения и компоненты  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  в этом случае в костной ткани распределены равномерно. Значения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  равны -14,1, -14,1 и -42,3 кПа соответственно. Касательные напряжения  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  равны нулю. Диаграмма компоненты касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , полученная в плоскости  $y = 0$ , для случая нормальной костной ткани показана на рис. 3.18.

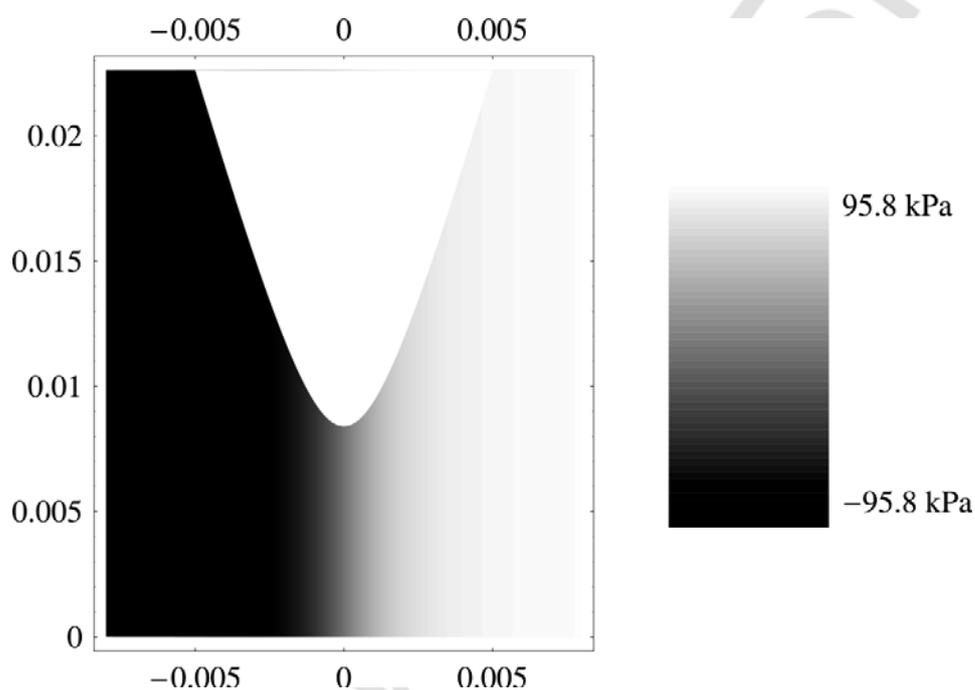


Рис. 5.18. Распределение касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , возникающих в нормальной костной ткани в результате действия сосредоточенной нагрузки на моляр, в сечении плоскостью  $y = 0$

В ослабленной костной ткани нормальные напряжения уменьшаются и составляют -4,8 кПа для компонент  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и -33,6 кПа для компоненты  $\sigma_z$ . Компонента касательных напряжений  $\tau_{xz}$  незначительно увеличивается и по абсолютной величине достигает 97,8 кПа.

## Глава 6

### Биомеханическое моделирование действия сосредоточенной нагрузки на многокорневые зубы

В работе [76] при определении реакций опор и перемещений мостовидного протеза использована модель абсолютно твердого тела, расположенного на упругих податливых опорах. Этот подход применяется в настоящей главе для расчета перемещений двухкорневых зубов под действием сосредоточенной нагрузки, создаваемой ортодонтическим аппаратом, с учетом различных констант упругости костной ткани.

Далее рассмотрим двухкорневой зуб, все корни которого являются круговыми гиперблоидами и располагаются на одной прямой, совпадающей с осью  $Oy$  (начало координат совпадает с основанием первого корня). Координатная ось  $Ox$  перпендикулярна ряду корней, ось  $Oz$  направлена вверх. Будем считать, при воздействии силовых факторов зуб получает три поступательных и три угловых перемещения при вращении вокруг осей координат. Жесткости каждого корня при поступательном перемещении вдоль соответствующих координатных осей равны  $c_{kx}$ ,  $c_{ky}$ ,  $c_{kz}$ , жесткости корней при повороте относительно осей координат —  $\mu_{kx}$ ,  $\mu_{ky}$ ,  $\mu_{kz}$ ,  $k = 1, 2$ . Уравнения равновесия трехкорневого зуба представим в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 (R_{kx}) - P_x = 0, \quad \sum_{k=1}^2 (R_{ky}) - P_y = 0, \quad \sum_{k=1}^2 (R_{kz}) - P_z = 0, \\ \sum_{k=1}^2 (M_{kx}) + R_{z2}s = P_z y_f - z_f P_y, \\ \sum_{k=1}^2 (M_{ky}) = P_x z_f - x_f P_z, \quad \sum_{k=1}^2 (M_{kz}) - R_{z2}s = P_y x_f - y_f P_x, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  — проекции главного вектора внешних сил;  $R_{kx} = c_{kx}u_k$ ,  $R_{ky} = c_{ky}v_k$ ,  $R_{kz} = c_{kz}w_k$  — проекции реакций опор,  $u_k$ ,  $v_k$ ,  $w_k$  — поступательные перемещения  $k$ -го корня,  $x_f$ ,  $y_f$ ,  $z_f$  — координаты точки приложения силы,  $M_{kx}$ ,  $M_{ky}$ ,  $M_{kz}$  — проекции главных моментов внешних сил,  $s$  — расстояние между опорами.

Поскольку ось  $Oy$  расположена вдоль ряда корней, перемещения  $v_k$  для всех опор одинаковы и равны  $v_1$ . Перемещения второго и третьего корней вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  выражаются через перемещения первого зуба и углы поворота зуба следующим образом:

$$u_2 = u_1 - \varphi_z s_1, \quad w_2 = w_1 + \varphi_x s_1. \quad (6.2)$$

Подставим формулы для проекций реакций опор и выражения (2) в систему (1). В результате будем иметь следующие шесть уравнений относительно неизвестных перемещений  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  и углов поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ :

$$\begin{aligned}
u_1(c_{1x} + c_{2x}) - \varphi_z c_{2x} s &= P_x, \quad v_1(c_{1y} + c_{2y}) = P_y, \\
w_1(c_{1z} + c_{2z}) + \varphi_x c_{2z} s_1 &= P_z, \\
\varphi_x(\mu_{1x} + \mu_{2x} + c_{2z} s_1^2) + w_1 c_{2z} s_1 &= y_f P_z - z_f P_y, \\
\varphi_y(\mu_{1y} + \mu_{2y}) &= z_f P_x - x_f P_z, \\
\varphi_z(c_{2x} s_1^2 - \mu_{1z} - \mu_{2z}) - u_1 c_{2x} s_1 &= x_f P_y - y_f P_x.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Найдем решение системы (6.3) для случая, когда жесткости корней при поступательном перемещении вдоль координатной осей и жесткости корней при повороте относительно оси координат в силу различной геометрической формы не совпадают друг с другом. После несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{c_{2x} s (P_y x_f + P_x (s - y_f)) + P_x (\mu_{1z} + \mu_{2z})}{c_{1x} (c_{2x} s^2 - \mu_{1z} - \mu_{2z}) - c_{2x} (\mu_{1z} + \mu_{2z})}, \quad v_1 = \frac{P_y}{c_{1y} + c_{2y}}, \\
w_1 &= \frac{c_{2z} s (P_z (s - y_f) + P_y z_f) + P_z (\mu_{1x} + \mu_{2x})}{c_{2z} (\mu_{1x} + \mu_{2x}) + c_{1z} (c_{2z} s^2 + \mu_{1x} + \mu_{2x})}, \\
\varphi_x &= \frac{P_z y_f (c_{1z} + c_{2z} (1 - s)) - P_y z_f (c_{1z} + c_{2z})}{c_{2z} (\mu_{1x} + \mu_{2x}) + c_{1z} (c_{2z} s^2 + \mu_{1x} + \mu_{2x})}, \\
\varphi_y &= \frac{P_x z_f - P_z x_f}{\mu_{1y} + \mu_{2y}}, \quad \varphi_z = \frac{P_x (c_{2x} s - y_f (c_{1x} + c_{2x})) + P_y x_f (c_{1x} + c_{2x})}{c_{1x} (c_{2x} s^2 - \mu_{1z} - \mu_{2z}) - c_{2x} (\mu_{1z} + \mu_{2z})}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Жесткости каждого из двух корней при поступательном перемещении и при повороте представим на основе соответствующих выражений, полученных в [1], следующим образом:

$$\begin{aligned}
c_{kx} = c_{ky} &= \frac{\pi a_k^2 G}{h} \left( (1 - p_k^2) \left( 1 + \frac{H^2}{2a_k^2} (1 + \gamma) \right) + p_k^2 \frac{H^2}{a_k^2} (1 + \gamma) \ln(p_k) \right), \\
c_{kz} &= \frac{\pi a_k^2 G}{h} \left( (1 - p_k) \gamma + \frac{2H^2}{a_k^2} \left( \frac{1}{2} (1 - p_k^2) + p_k^2 \ln(p_k) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{kx} &= \frac{\pi a_k G H^2}{8h} \left( (1-p_k^2)(3-p_k^2) \left( 2\gamma - 1 + \frac{a_k^2 \gamma}{H^2} + \frac{H^2}{a_k^2} (1+\gamma) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3H} \left( 4z_2^{(k)} (2-p_k^3) + (1-3p_k^2 + 2p_k^3) \left( \gamma - 1 + \frac{H^2}{a_k^2} (1+\gamma) \right) - 4p_k^4 \ln(p_k) \right) \right), \\ &\quad + (1-p_k^2)^2 \left( 2\gamma - \frac{7}{4} + \frac{H^2}{a_k^2} (1+\gamma) - a_k^2 \left( \frac{3}{4a_k^2} + \frac{\gamma}{H^2} \right) \right) - 4p_k^4 \ln(p_k), \\ \mu_{ky} &= \frac{\pi a_k G H^2}{8h} \left( 2(1-p_k^2) - \frac{4z_1^{(k)}}{3H} \left( 2(1-p_k^2) + (1-3p_k^2 + 2p_k^3) \left( \gamma - 1 + \frac{H^2}{a_k^2} (1+\gamma) \right) \right) \right), \\ \mu_z &= \frac{\pi a_k G H^2}{h} \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{2a_k^2}{H^2} \right) (1-p_k^2)^2 - p_k^2 \left( \frac{1}{2} (1-p_k^2) + p_k^2 \ln(p_k) \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь  $a_k$  — радиус верхней части корня,  $H$  — параметр, характеризующий высоту корня зуба,  $p_k$  — параметр, описывающий закругление вершины зуба,  $G$  — модуль сдвига,  $\gamma = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Выражения для  $z_1^{(k)}$  и  $z_2^{(k)}$  в соответствии с соотношениями, полученными в [1], для координат центров сопротивления, можно представить в виде:

$$\begin{aligned} z_1^{(k)} &= \frac{2H \left( H^2 (1-p_k)^2 (1+2p_k) (1+\gamma) + a_k^2 \left( 3(1-p_k^2) + \gamma_2 (1-3p_k^2 + 2p_k^3) \right) \right)}{3 \left( (1-p_k^2) (2a_k^2 + H^2 (1+\gamma)) + 2p_k^2 H^2 (1+\gamma) \ln(p_k) \right)}, \\ z_2^{(k)} &= \frac{2H \left( H^2 (1-p_k)^2 (1+2p_k) (1+\gamma) + a_k^2 \left( 3(1-p_k^2) + \gamma_2 (1-3p_k^2 + 2p_k^3) \right) \right)}{3(1-p_k^2) (2a_k^2 + H^2 (1+\gamma)) + 2p_k^2 H^2 (1+\gamma) \ln(p)}, \end{aligned}$$

где  $\gamma_2 = \gamma - 2$ .

Проведем расчет перемещений корней зуба и выполним визуализацию исходного и конечного положений зуба для различных значений технических констант, соответствующей нормальной и ослабленной костной ткани. Примем геометрические размеры корней  $a_1 = a_2 = a = 2,25$  мм,  $b = 3$  мм,  $H = 23$  мм,  $p = 0,5$  (заданные значения параметров  $H$  и  $p$  соответствуют высоте корней зубов 14,2 мм). Изображение корня зуба, соответствующее указанным геометрическим параметрам приведено на рис. 6.1.

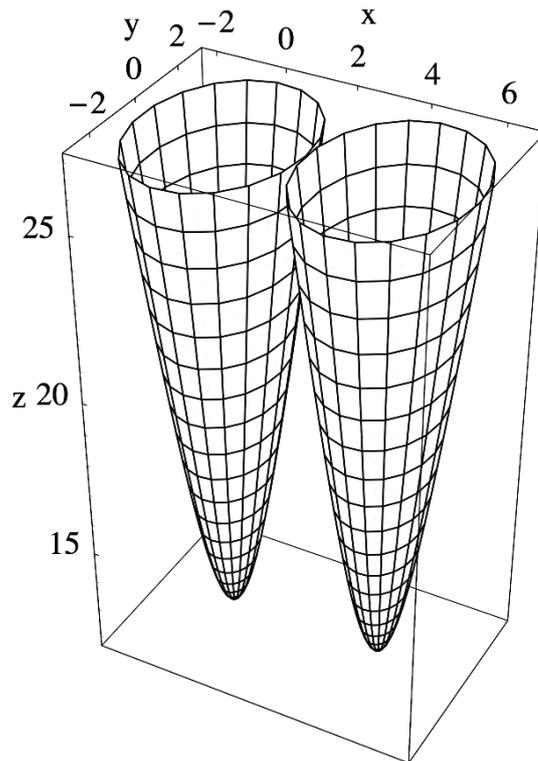


Рис. 6.1. Корни верхнего первого премоляра

Примем величину сосредоточенной нагрузки равной 100 Н и выполним визуализацию перемещений корней зубов под действием сосредоточенной нагрузки в нормальной и ослабленной костной ткани. На рис. 6.2 показаны начальное и конечное положения корней четвертого зуба при его перемещении в нормальной костной ткани по вертикали (точка приложения силы  $(0, 0, 25,72)$ , линия действия силы перпендикулярна осям абсцисс и ординат), в направлении нормальной десне (точка приложения силы  $(-2, 0, 25,72)$ , линия действия силы перпендикулярна осям ординат и аппликата) и вдоль десны (точка приложения силы  $(0, 3, 25,72)$ , сила направлена перпендикулярно осям абсцисс и аппликата). Значения технических констант для нормальной костной ткани прежние. Более грубая сетка соответствует начальному положению корня зуба.

Как следует из полученных численных и графических результатов на величины корни зуба в нормальной костной ткани не велики и практически отсутствуют повороты корней. В ослабленной костной ткани величины перемещений корней вдоль координатных осей возрастают. Визуализация перемещений корней для прежних значений геометрических параметров корней зубов, величины нагрузки, ее направления и точек приложения показаны на рис. 6.3. Значения модуля упругости и коэффициента Пуассона для ослабленной костной ткани приведены ранее.

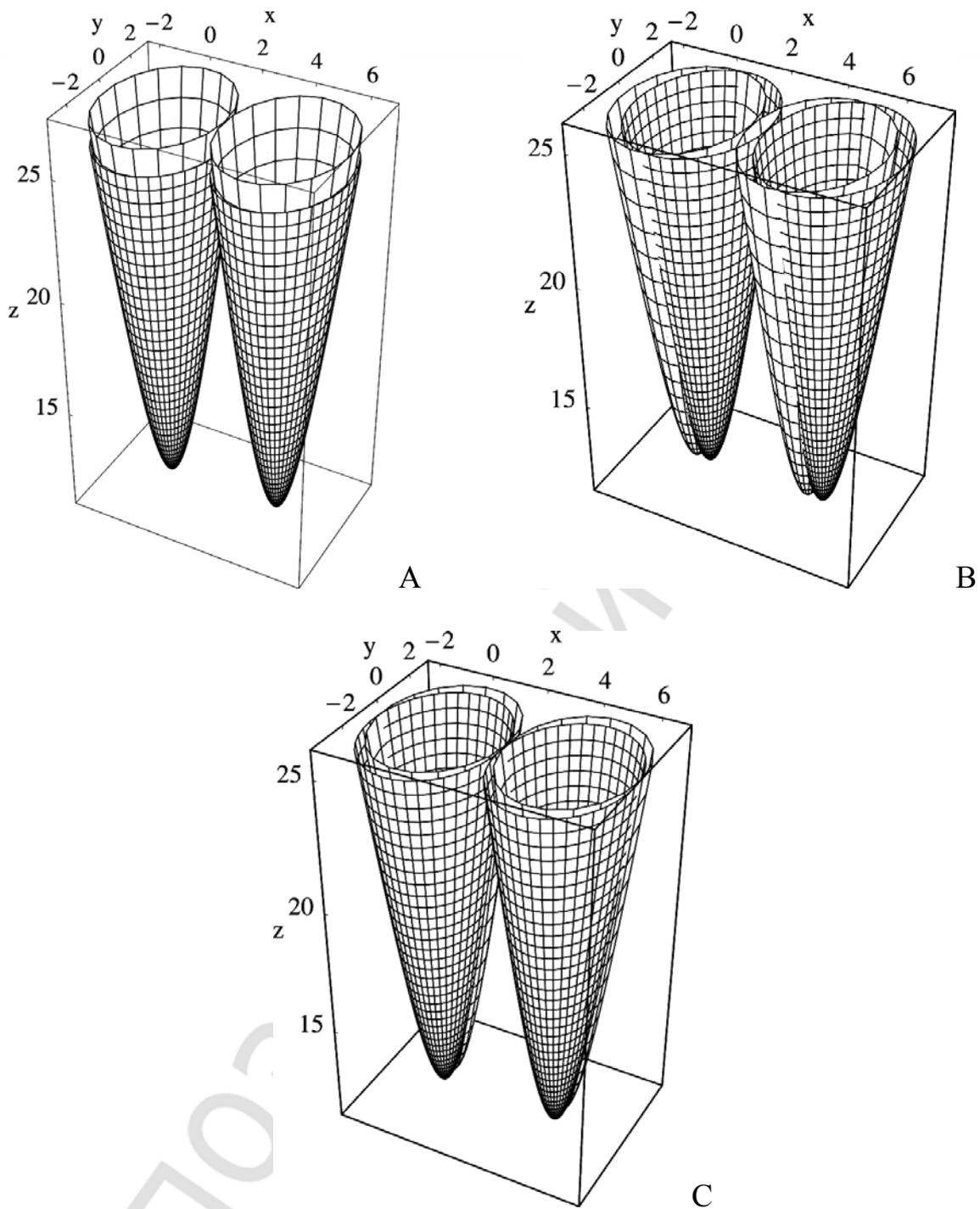


Рис. 6.2. Перемещения двухкорневого зуба под действием сосредоточенной нагрузки, направленной вдоль оси  $Oz$  (A),  $Ox$  (B) и  $Oy$  (C) в нормальной костной ткани

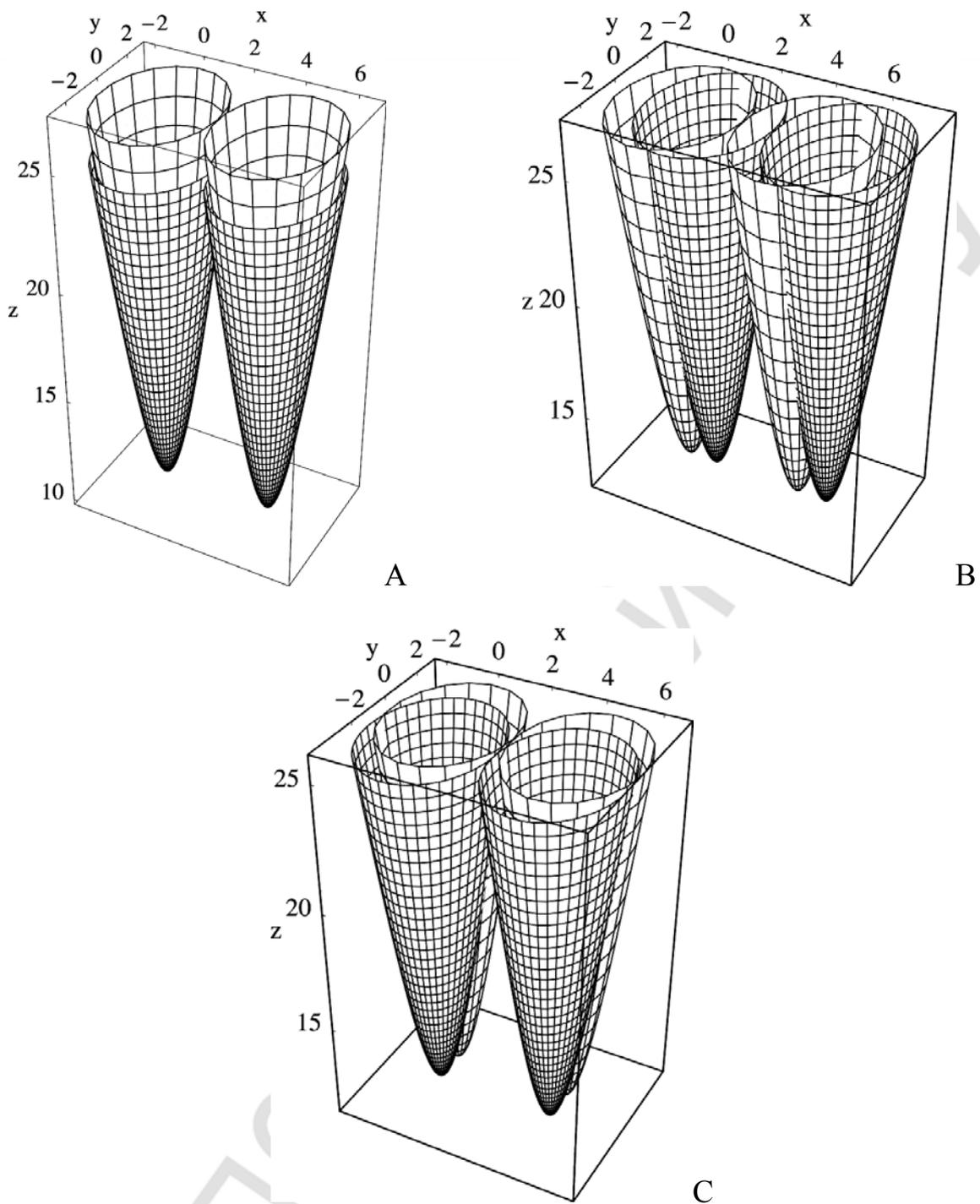


Рис. 6.3. Перемещения двухкорневого зуба под действием сосредоточенной нагрузки, направленной вдоль оси  $0z$  (А),  $0x$  (В) и  $0y$  (С) в нормальной костной ткани

## Глава 7

### Визуализация напряжённо-деформированного состояния нижней челюсти под воздействием сосредоточенной нагрузки с помощью метода голографической интерферометрии

#### 7.1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ, МЕТОД И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для выполнения экспериментов объект исследования — кадаверная челюсть, подготовлен в трёх вариантах. Первый макет (№ 1) изготовлен в виде приближенной к натурному варианту консоли с фиксацией челюсти верхушками суставных отростков в несущей протакриловой стойке. Изображение макета № 1 приведено на рис. 7.1.



Рис. 7.1. Изображение макета № 1

Второй макет (№ 2) изготовлен путем фиксации тела челюсти по всей длине в жестком протакриловом ложе. Его изображение показано на рис. 7.2.



Рис. 7.2. Изображение макета № 2

Для третьего варианта кадаверная нижняя челюсть была препарирована следующим образом. На коронку каждого зуба зубного ряда были зафиксированы брекететы, в пазы ввели флекс-дугу, концы которой фиксировались на металлической оси, продетой через отверстия, просверленные в суставных отростках в плоскости зубного ряда. Вращением оси создавалось тянущее усилие, подвергающее нагрузке каждый зуб. Изображение макета № 3 показано на рис. 7.3.



Рис. 7.3. Макет № 3, в виде зафиксированной консольно челюсти в несущей протакриловой стойке, на коронках всех зубов зафиксированы брекететы

Вращающий момент на оси создавался нагрузкой на ортогонально закрепленный на ней рычаг. Экспериментальный диапазон тянущего усилия задавался в пределах 5–10 кгс.

Макеты № 1, № 2 и № 3 использовались для исследования деформационного поля челюсти, соответственно, при боковых и осевых нагрузках. Нагрузочное приспособление на макете № 1 монтировалось на нем самом, а для осевых нагрузок на макете № 2 использовался специальный нагрузочный стенд.

Во всех случаях получение интерферограмм производилось методом двух экспозиций по контрнаправленной схеме до и после декальцинации, представленной на рис. 7.4. Такая схема допускает возможность максимального сближения фотопластины с объектом и тем самым обеспечивает максимальный угол обзора деформационного поля, а соответственно, и максимальный диапазон наблюдаемой подвижности интерференционных полос, по которому оценивается и качественно и количественно характер деформации.

В большинстве практических схем интерферометрии вектор чувствительности  $K$  (рис. 7.5), совпадающий с биссектрисой угла между направлениями освещения  $K_1$  и наблюдения  $K_2$ , имеет направление, близкое к нормали к исследуемой поверхности  $A$ .

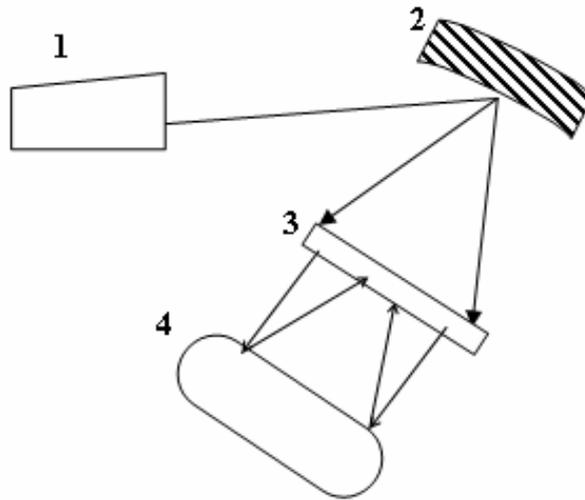


Рис. 7.4. Схема проведения эксперимента:  
1 — лазер, 2 — расширитель лазерного пучка, 3 — фотопластинка, 4 — объект

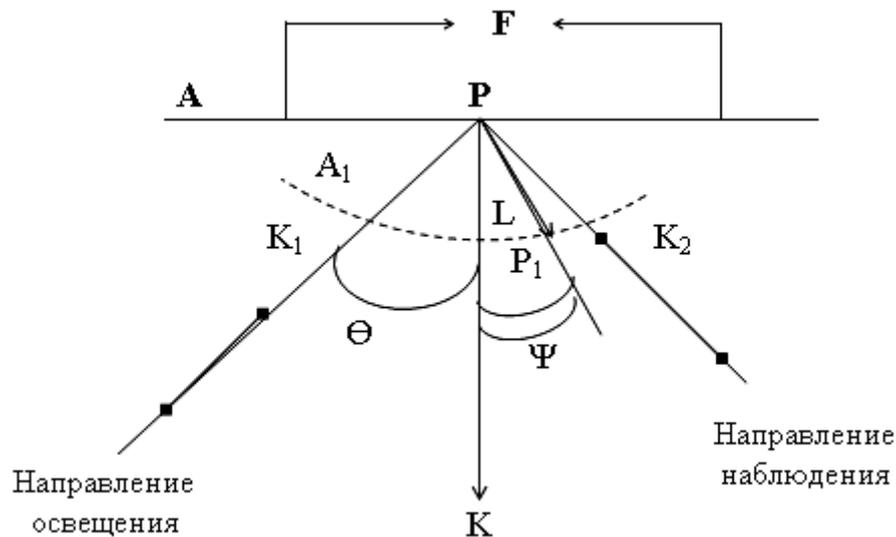


Рис. 7.5. Компланарное смещение

Соответственно, если в этом, или близком к нему направлении ориентирован вектор деформационного смещения  $L$ , то есть смещение является компланарным, имеет место максимальная чувствительность метода, а само смещение определяется по формуле:

$$L = \frac{\lambda N}{\cos(\theta)\cos(\Psi)}. \quad (7.1)$$

При использовании в нашем эксперименте традиционного варианта построения оптической схемы для исследования и боковых и осевых нагрузок с боковым ракурсом освещения и наблюдения вектора деформирующих усилий  $F$ , будучи ортогональными между собой, ориентированы по нормали также и к вектору чувствительности, т. е. в направлении мини-

мальной чувствительности метода. Это объективный фактор, обусловленный компланарностью указанных векторов с исследуемой поверхностью.

Однако, вполне очевидно, что поскольку деформация объемного тела всегда есть тензор, а не простое смещение исследуемой поверхности в своей плоскости, всегда будет присутствовать деформационная компонента  $L$ , соответствующая смещению некоторой точки  $P$  в точку  $P_1$  и компланарная вектору чувствительности. Соответственно, совокупность таких смещений множества поверхностных точек с одинаковыми по абсолютной величине значениями  $L$ , образует рисунок интерференционной картины, отражающей структуру поверхностной деформации качественно. Визуальное же сканирование указанной картины по разным направлениям наблюдения позволяет получить и количественную информацию.

Целью эксперимента было исследование деформированного состояния костной ткани альвеолярного отростка под действием механических нагрузок до и после декальцинации. Оценка результатов производилась по структуре деформационных полей комплекса «зуб–альвеолярная кость» до и после декальцинации.

Поскольку использованный нами и экспериментально доступный метод декальцинации (путем химического травления азотной кислотой) не позволял получать образцы с последовательностью градаций, выраженных в каких-либо точных количественных единицах, указанная оценка производилась качественно, при декальцинации примерно равной 50 %.

Применительно к боковым нагрузкам представляла интерес оценка их влияния на деформацию костной ткани в области клыка. Соответственно, был отобран и подготовлен на макете № 1 образец челюсти, содержащий целостный фронтальный зубной ряд, а на левой стороне удалили первый премоляр и дистально смещали клык, фиксируя аппарат к крайнему моляру.

К ним и подводилась боковая, сжимающая нагрузка с помощью винтовой ортодонтической пары, подвижные звенья которой свободно фиксировались между анкерами, жестко установленными на указанных зубах. Натяжение создавалось вращением винта. При шаге резьбы ~0,4 мм усилие, достаточное для получения интерферограммы, развивалось при повороте винта в пределах  $\pm 360^\circ$ . Сами интерферограммы получались по оптической схеме с боковым освещением объекта, т. к. именно этот ракурс при обсуждаемом способе нагружения позволял наиболее информативно отразить представляющую интерес структуру деформации и челюсти и зуба.

Что касается осевых нагрузок, то оценка их влияния представляла интерес, в основном, применительно к подвижности боковых зубов. Поэтому для эксперимента на макете № 2 был установлен образец челюсти с одиночным моляром с правой стороны. Нагрузка осуществлялась на специальном стенде, изображенном на рис. 7.6. Макет № 2 помещался на платформу стенда так, чтобы силовой шток его рычажного механизма распола-

гался по оси зуба. Давление на зуб задавалось установкой на рычажный механизм сменяемых гирь, или изменением соотношения плеч рычага. Величина возможных нагрузок могла варьироваться в диапазоне 0–40 кгс.

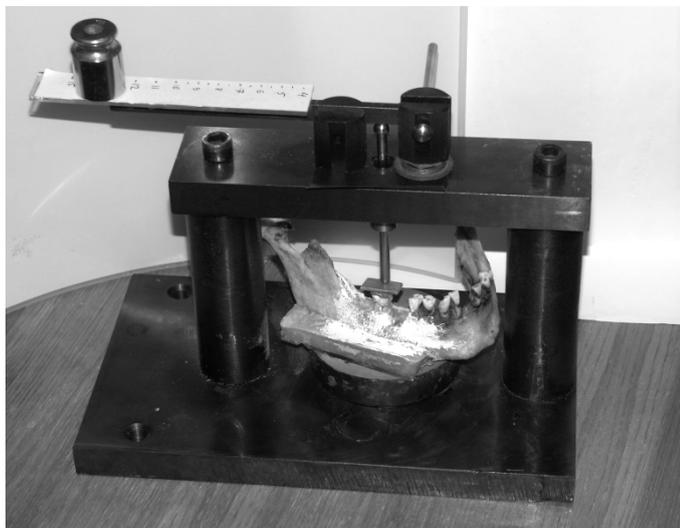


Рис. 7.6. Нагрузочный стенд

Голограммы получались и по схеме с боковым освещением, и по схеме, преобразованной в чисто компланарный вариант с практически соосным положением векторов  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K$  и  $L$ . При этом углы  $\theta$  и  $\psi$  максимально минимизированы, а формула (7.1) предельно упрощается и принимает следующий вид:

$$L = \lambda N. \quad (7.2)$$

Кроме того, механическая схема дооборудована двумя «рычагами-свидетелями», ориентированными по нормали к вектору  $L$  и закрепленными с одной стороны жестко, а с другой стороны опирающимися: один — на зуб, а второй — на кость непосредственно вблизи лунки так, как это показано на рис. 7.7.



Рис. 7.7. Нагрузочный стенд, ракурс с видом на «рычаги-свидетели»

В таком исполнении экспериментальной схемы полосы на «рычагах-свидетелях» количественно однозначно и индивидуально характеризуют прогиб челюстного сегмента и осадку расположенного на нем зуба.

## 7.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

### 7.2.1. Боковые нагрузки на клык с недекальцинированной лункой

На рис. 7.8 и 7.9 представлены интерферограммы, иллюстрирующие структуру деформационного поля объекта при знакопеременных нагрузках, задаваемых поворотом винта на  $\pm 360^\circ$  от некоторого стартового положения, фиксирующего начальное натяжение.



Рис. 7.8. Интерферограмма деформационного поля до декальцинации при повороте винта  $+360^\circ$



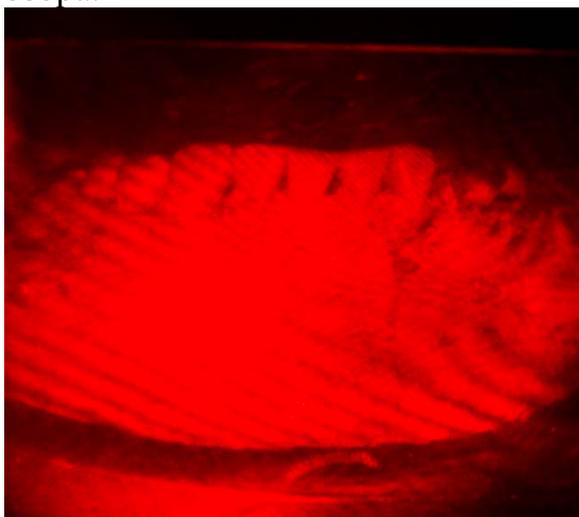
Рис. 7.9. Интерферограмма деформационного поля до декальцинации при повороте винта  $-360^\circ$

Как видим, обе интерференционные картины практически идентичны. Это свидетельствует об отсутствии деформационного гистерезиса, т. е. что деформация носит упругий характер.

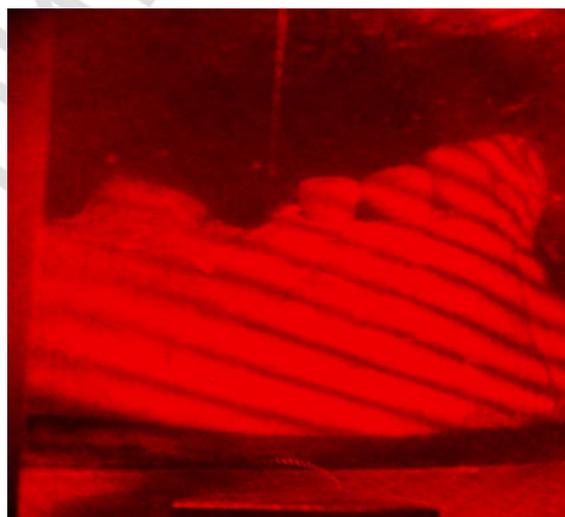
На обеих интерферограммах, наблюдаемых статически, под нагружаемым клыком заметна четко локализованная зона № 1, охватывающая также корневую область фронтального зубного ряда. Выделяется она не только более плотной концентрацией полос, но и практически ортогональной ориентацией их геометрического рисунка по отношению к таковому на всей остальной видимой поверхности объекта, где также имеется несколько характерных зон. В качестве таких характерных зон выделим следующие:

- зона № 2, непосредственно между точками приложения нагрузки, т. е. между клыком и опорным моляром;
- зона № 3, задняя относительно зоны № 2 боковая ветвь челюсти с суставным отростком;
- зона № 4, участок челюсти непосредственно под нагружаемым клыком;
- зона № 5, фронтальный участок;
- зона № 6, противоположная сторона челюсти.

Последние две зоны показаны на рис. 7.10 и 7.11 с различных точек обзора.



*Рис. 7.10.* Интерферограмма деформационного поля до декальцинации (фронтальный ракурс)



*Рис. 7.11.* Интерферограмма деформационного поля до декальцинации (боковой ракурс на противоположную сторону тела челюсти)

Обзор всех приведенных на рис. 7.8–7.11 иллюстраций свидетельствует о том, что в каждой из перечисленных зон даже статически видимый рисунок интерференционных картин индивидуален и это означает, что они, эти зоны, деформируются по-разному.

В зоне № 1 полосы подвижны только при горизонтальном сканировании голограмм, т.е. по направлению действия нагрузки. Это означает, что напряжение, а, следовательно, и деформация, создаются выворачивающим

усилием корня клыка при его повороте в направлении нагрузки и, что по глубине усилия не выходит за пределы альвеолярного отростка, чем и объясняется локальность обсуждаемой зоны. Кроме того, подвижность полос в зоне возрастает по мере удаления от клыка к фронтальному сегменту. Это, как мы полагаем, есть следствие влияния других деформирующих факторов, связанных с деформацией соседних зон.

В зоне № 2 подвижность полос интенсивная и только при вертикальном сканировании. При этом смещаются они поперечно и противоположно относительно срединной области боковой поверхности челюсти. Это означает, что в зоне № 2 имеются признаки поперечной изгибной деформации, при которой костная ткань в альвеолярной и нижней областях челюстной дуги сжимается и растягивается соответственно.

В зонах № 3 и № 6 интерференционные картины практически неподвижны и отражают пассивное их смещение ввиду удаления от активного силового фактора и прочной пространственной фиксации суставными отростками.

В зоне № 4 полосы подвижны в противоположных относительно нее направлениях при вертикальном сканировании, что означает наличие в этой зоне деформационного перегиба челюсти.

Наконец, во фронтальной зоне № 5 подвижность полос, наблюдаемая также при вертикальном сканировании, соответствует деформации, обусловленной наличием перегиба в соседней зоне № 4. Эта деформация постепенно ослабевает по мере удаления на боковую ветвь в зону № 6.

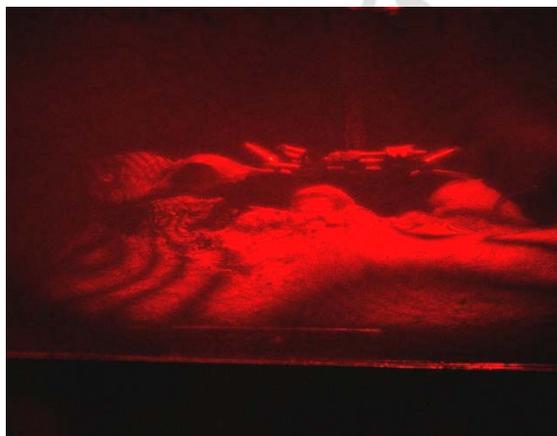
Таким образом, итоговая ситуация, возникающая при боковой нагрузке на клык, представляется следующим образом. Векторное поле выворачивающих усилий, создаваемых нагрузкой, распределяется на составляющие, направленные вниз в области между точками ее приложения и вверх за пределами этой области. Под действием составляющих, направленных вниз, костная ткань сверху сжимается, а внизу растягивается, т. е. в обсуждаемой области тело и альвеолярный отросток челюсти упруго изгибается. Вне этой области на остаточном дистальном участке челюсти верхняя составляющая нейтрализуется прочной пространственной фиксацией суставного отростка, порождая его пассивный прогиб. С фронтальной же стороны челюсти верхняя составляющая нагрузочного вектора проявляется двояко, порождая локальную сдвиговую деформацию в зоне альвеолярного отростка прилегающего фронтального зубного ряда и перегиб челюстной дуги относительно корневой зоны клыка. Этот последний фактор, с учетом сказанного выше относительно деформации в зонах № 4 и № 5, позволяет утверждать, что под действием боковой нагрузки происходит асимметричный перекосяк челюсти относительно некоторой виртуальной оси, проходящий через зону № 4 и неопределенно локализованную точку пересечения с линией между верхушками суставных отростков. При этом, с одной сто-

роны оси свободная от нагрузки челюсть деформируется под действием только перекосного усилия в зоне № 4, а на деформацию другой, нагружаемой стороны, расположенной по другую сторону оси, кроме составляющей, обусловленной упомянутым выше усилием, дополнительно накладывается локальная поперечная деформация зоны № 2.

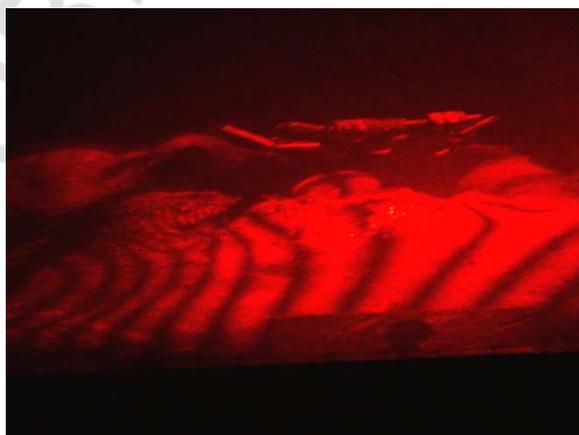
В заключение отметим, что с клинической точки зрения наиболее значимым негативным фактором из выше описанных следует считать локальное влияние на область альвеолярного отростка фронтального зубного ряда.

### **7.2.2. Боковые нагрузки на клык с декальцированной лункой**

На рис. 7.12, 7.13 представлены интерферограммы, иллюстрирующие структуру деформационного поля челюсти после декальцинации лунки клыка при нагрузках, соответствующих повороту винта на  $270^\circ$  и  $360^\circ$ .



*Рис. 7.12.* Интерферограммы деформационного поля после декальцинации, при повороте винта  $+270^\circ$



*Рис. 7.13.* Интерферограммы деформационного поля после декальцинации, при повороте винта  $+360^\circ$

Статически наблюдаемые интерференционные картины преемственно подобны рассмотренным выше в разделе 7.2.1. Заметным отличием является сокращение протяженности зоны № 1 и ее локализация только в корневой области клыка. Это означает, что при размягчении костной ткани лунки клык поворачивается, не создавая существенных сдвиговых напряжений в зоне альвеолярного отростка фронтального зубного ряда, и эта зона, деформируется аналогично деформации фронтальной зоны № 5. Таким образом, этот факт, отмеченный выше как негативный, устраняется процедурой декальцинации и это подтверждает ее целесообразность с клинической точки зрения. Кроме того, существенно изменилась ситуация в зоне № 2. Вместо прежней дугообразной системы полос, ориентированной продольно, возникла новая, промежуточная их структура, ориентация которой плавно меняется от поперечной к продольной, соответственно, со стороны зон № 4 и № 3. Этот плавный переход наблюдается и в динамическом режиме и только, как и прежде, при поперечном визуальном сканировании интерферограмм. Во всех остальных зонах характер подвижности полос остается прежним.

Таким образом, из сказанного выше следует, что ассиметричный перекосяк челюсти сохраняется и после декальцинации зубной лунки клыка и это объективный, в принципе неизбежный фактор, возникающий при боковых нагрузках. Сохраняется также характер деформации свободной от нагрузки стороны челюсти. Что же касается нагружаемой стороны, то следует констатировать, что, вследствие обусловленного декальцинацией более мягкого контактного взаимодействия корня зуба с костной тканью лунки, существенно изменился деформационный тензор челюсти в зоне № 2. В итоге минимизировался поперечный прогиб этой зоны и основной доминантной в формировании деформационного поля обсуждаемой зоны осталось только перекосящее усилие, сохраняющиеся в зоне № 4. Этот факт следует рассматривать как позитивный результат декальцинации, с клинической точки зрения. Отметим еще здесь, что сравнивая динамику и концентрацию полос на обеих ветвях до и после декальцинации, можно предположить, что упоминавшаяся гипотетическая виртуальная ось вращения также повернулась в пространстве из-за смещения второй ее точки локализации на линии между суставными отростками [30].

### **7.2.3. Осевые нагрузки на моляр с недекальцинированной лункой**

На рис. 7.14 и 7.15 представлена интерферограмма, полученная по схеме с ортогональными, относительно направления нагрузки, направлениями освещения и наблюдения. При такой схеме на интерферограмме визуализируется структура деформационного тензора объекта с бокового ракурса, преимущественно характеризующая ситуацию качественно.

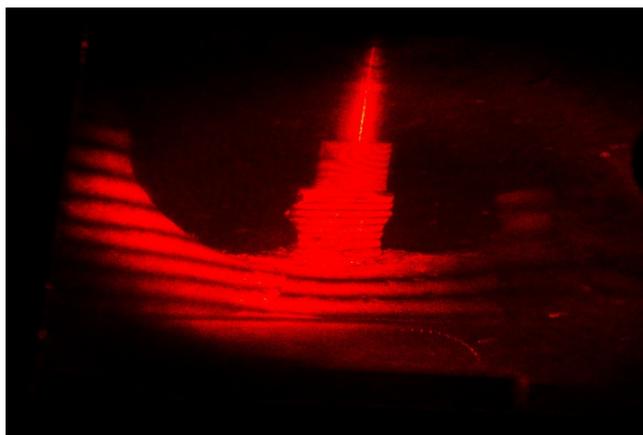


Рис. 7.14. Интерферограмма деформационного поля до декальцинации, боковой ракурс

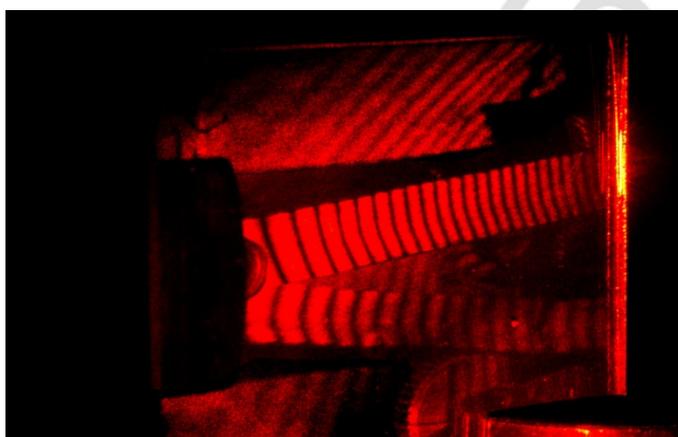


Рис. 7.15. Интерферограмма деформационного поля до декальцинации, ракурс с видом на «рычаги-свидетели»

Из рис. 7.14 и 7.15 видно, что полосы на костной ткани челюсти и на поверхности зуба отражают, соответственно, деформационный прогиб типа пологой вмятины и осевое проседание зуба. При этом, судя по частоте полос, проседание зуба кажется существенно большим, чем указанный выше прогиб. Этот факт, как мы полагаем, есть следствие суммарного влияния ряда факторов, таких как деформация самого зуба, деформация луночной периодонтальной связки (поскольку экспериментальная челюсть сырая), локальная деформация пористой костной ткани под зубом и, наконец, прогиб самого челюстного сегмента.

Раздельная количественная оценка влияния указанных факторов, в соответствии с возможностями метода, экспериментально доступна только по отношению к последнему из них и произведена по данным интерферограмм, полученных с использованием чисто компланарной оптической схемы. Полученные результаты представлены на рис. 7.16. и сформулированы в табл. 7.1, 7.2 и 7.3, а также визуализированы на рис. 7.17, 7.18 и 7.19 в виде зависимостей деформационных показателей от нагрузки.

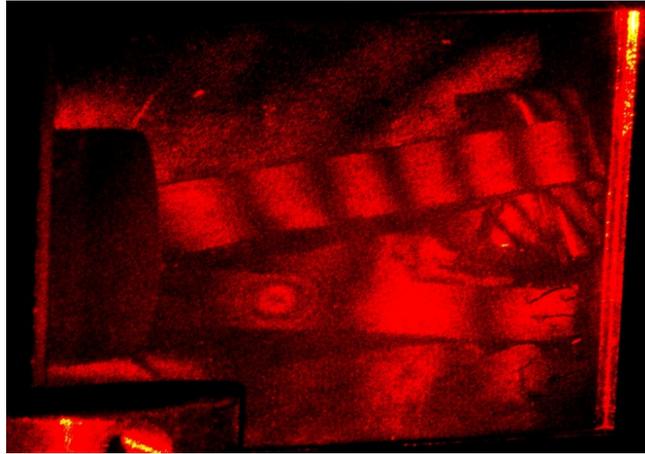


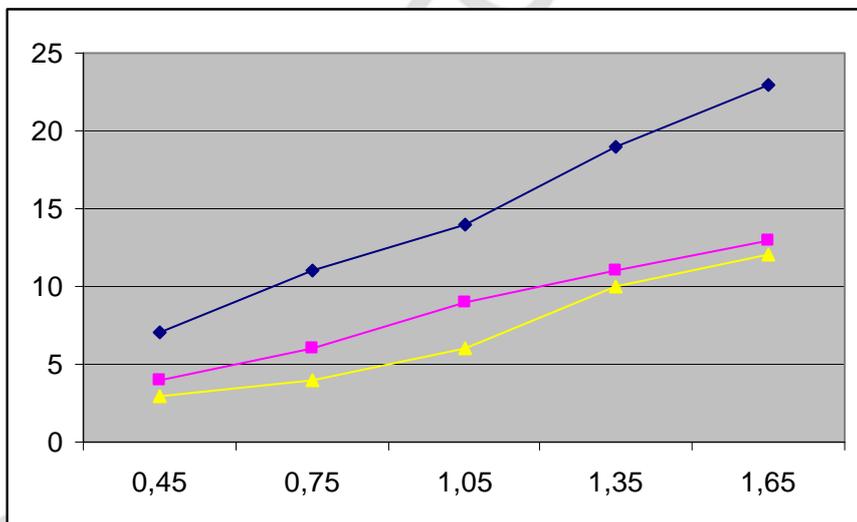
Рис. 7.16. Интерферограмма деформационного поля до декальцинации, ракурс с видом на «рычаги-свидетели»

Таблица 7.1

**Количественная оценка влияния величины нагрузки на деформационный прогиб челюсти при её возрастании**

$P_1$ , кг	$P_2$ , кг	$\Delta P$ , кг	$N_1$	$N_2$	$N_3$
1	2	3	4	5	6
2,1	2,55	0,45	8	3	3
1,8	2,55	0,75	12	7	5
1,5	2,55	1,05	18	10	7
1,2	2,55	1,35	20	12	10
0,9	2,55	1,65	26	15	12

$N_i, i = \overline{1,3}$



$\Delta P$ , кг

Рис. 7.17. Функциональные зависимости деформационных параметров от нагрузки до декальцинации при возрастании нагрузки ( $tg(\alpha_2) = 16, tg(\alpha'_2) = 9$ ):

ломаная синего цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_1$ , опирающемся на зуб, от нагрузки; ломаная красного цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_2$ , опирающемся на зуб, от нагрузки; ломаная желтого цвета — зависимость числа полос на боковой поверхности челюсти  $N_3$ , от нагрузки

Таблица 7.2

**Количественная оценка влияния величины нагрузки на деформационный прогиб челюсти при ее убывании**

$P_1$ , кг	$P_2$ , кг	$\Delta P$ , кг	$N_1$	$N_2$	$N_3$
1	2	3	4	5	6
2,55	2,1	0,45	7	4	3
2,55	1,8	0,75	11	6	4
2,55	1,5	1,05	14	9	6
2,55	1,2	1,35	19	11	10

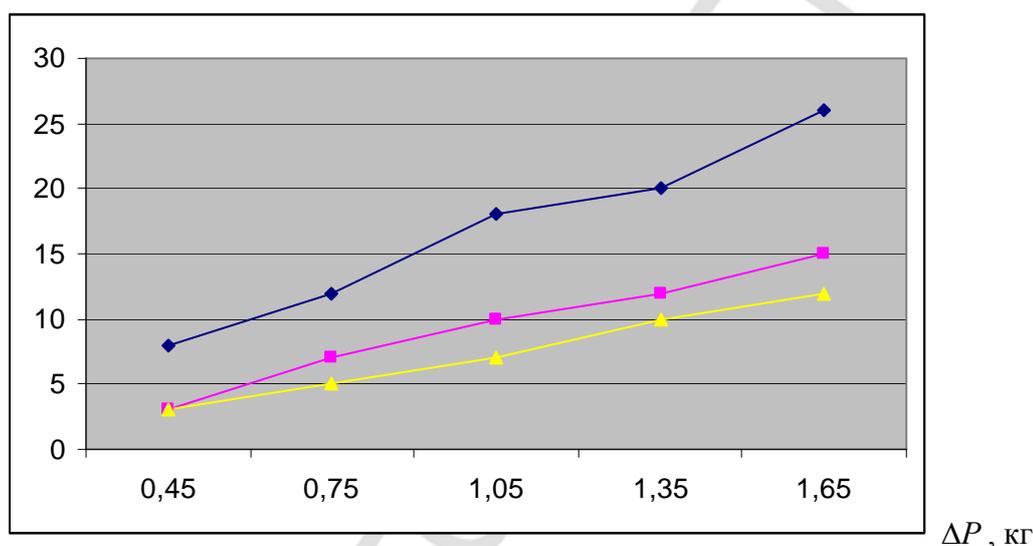
$$N_i, i = \overline{1, 3}$$


Рис. 7.18. Функциональная зависимость деформационных параметров от нагрузки до декальцинации при убывании нагрузки ( $tg(\alpha_2) = 15$ ,  $tg(\alpha'_2) = 8$ ):

ломаная синего цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_1$ , опирающемся на зуб, от нагрузки; ломаная красного цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_2$ , опирающемся на зуб, от нагрузки; ломаная желтого цвета — зависимость числа полос на боковой поверхности челюсти  $N_3$ , от нагрузки

Таблица 7.3

**Количественная оценка влияния величины нагрузки на деформационный прогиб челюсти при возрастании нагрузки кусочно-непрерывным способом**

n	$P_1$ , кг	$P_2$ , кг	$\Delta P$ , кг	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$\Sigma \Delta P$	$\Sigma N_1$	$\Sigma N_2$	$\Sigma N_3$
1	1,4	2,1	0,7	12	6	4	0,7	12	6	4
2	2,1	2,8	0,7	12	7	5	1,4	24	13	9
3	2,8	3,5	0,7	12	6	4	2,1	36	19	13
4	3,5	4,2	0,7	11	5	3	2,8	47	24	16
5	4,2	4,9	0,7	12	7	5	3,5	59	31	21
6	4,9	5,6	0,7	12	6	4	4,2	71	37	25
7	5,6	6,3	0,7	11	5	4	4,9	82	42	29

$$\Sigma N_i, i = \overline{1,3}$$

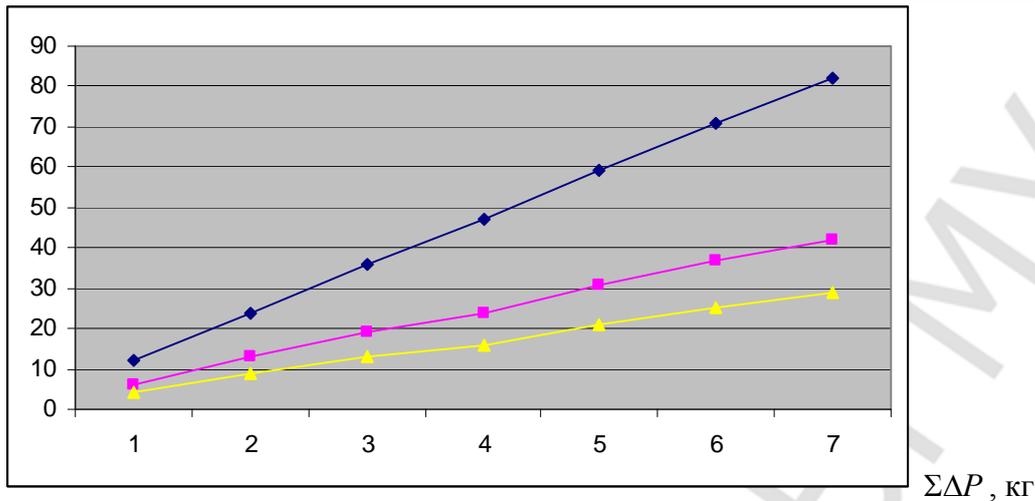


Рис. 7.19. Функциональные зависимости деформационных параметров от нагрузки до декальцинации при возрастании нагрузки кусочно-непрерывным способом ( $tg(\alpha_2) = 16, tg(\alpha'_2) = 9$ ):

Ломаная синего цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_1$ , опирающемся на зуб, от нагрузки; ломаная красного цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_2$ , опирающемся на челюсть в области лунки, от нагрузки; ломаная желтого цвета — зависимость числа полос на боковой поверхности челюсти  $N_3$ , от нагрузки

Как видно из поведения представленных на рис. 7.17–7.19 ломаных, зависимости суммарной деформационной осадки зуба и прогиба челюстного сегмента линейно связаны с величиной нагрузки и при ее возрастании (рис. 7.17) и при убывании (рис. 7.18). Эти зависимости получены при прямых нагрузках до 1,6 кГс, что соответствует диапазону, в пределах которого частота интерференционных полос на интерферограммах визуально различима и этот факт обусловлен спецификой метода.

Для расширения нагрузочного диапазона, с целью оценить протяженность границы линейности, нами использован кусочно-непрерывный метод голографирования, при котором нагрузка задавалась величинами  $P_1$  и  $P_2$ , абсолютные значения которых последовательно увеличивались, а разность  $\Delta P$  между ними сохранялась постоянной. Соответствующие данные приведены в табл. 7.3 и визуализированы на рис. 7.19.

Как видим, линейность зависимости сохраняется при нагрузках до 5 кГс, причем крутизна этой зависимости, выраженная через тангенс углов наклона  $\alpha_1$  и  $\alpha'_1$ , идентична на обоих графиках, соответствующих возрастанию нагрузки.

Незначительный гистерезис, заметный по уменьшению крутизны зависимости в случае с убыванием нагрузки, связан, как мы полагаем, с усталостным явлением либо в области периодонтальной связки, либо

в области луночной пористой костной ткани, т. к. деформация самого зуба является безусловно упругой и потому инверсно восстанавливаемой при знакопеременных нагрузках.

В свою очередь, усталостные явления могут проявляться в виде остаточной деформации и уплотнения среды зубного ложа, т. е. повышения устойчивости к нагрузке, что и приводит к гистерезису. Так или иначе, но его наличие означает, что в структуре охваченных деформационным тензором звеньев челюсти потенциально наиболее податливыми являются указанные области, и что это согласуется с тем фактором, что клиника лечебного процесса в режиме *in vivo* связана с деформационным переобразованием именно этих областей. Далее, из графиков видно, что в суммарной осадке зуба половину составляет вклад от упругого прогиба челюстного сегмента, тогда как вторая половина распределяется по остальным трем, указанным выше, факторам. Эта ситуация отражает тот объективный факт, что ответная реакция на нагрузку в конечном счете формируется в объеме тела костной ткани челюстного сегмента и что именно габаритами этого объема, охваченного деформационным тензором и зависящего от исходных прочностных характеристик остальных, охваченных тем же тензором, звеньев челюсти определяется величина деформационного прогиба обсуждаемого сегмента.

#### 7.2.4. Осевые нагрузки на моляр с декальцинированной лункой

Эксперимент выполнен тем же, кусочно-непрерывным методом и данные представлены в табл. 7.4 и на рис. 7.20 ( $N_1$  — число полос на рычаге, опирающемся на зуб,  $N_2$  — число полос на рычаге, опирающемся на челюсть в области лунки зуба). Сравнивая их с приведенными выше, можно констатировать, что и после декальцинации деформационная ситуация качественно не изменилась, т. е. что линейность исследуемой функциональной связи по-прежнему сохраняется.

Таблица 7.4

**Количественная оценка влияния величины нагрузки на деформационный прогиб челюсти после декальцинации**

n	$P_1$ , кг	$P_2$ , кг	$\Delta P$ , кг	$N_1$	$N_2$	$\Sigma \Delta P$	$\Sigma N_1$	$\Sigma N_2$
1	0,4	0,8	0,4	6	3	0,4	6	3
2	0,8	1,2	0,4	9	3	0,8	15	6
3	1,2	1,6	0,4	12	3	1,2	27	9
4	1,6	2,0	0,4	9	3	1,6	36	12
5	2,0	2,4	0,4	9	3	2,0	45	15

$$\Sigma N_i, i = 1, 2$$

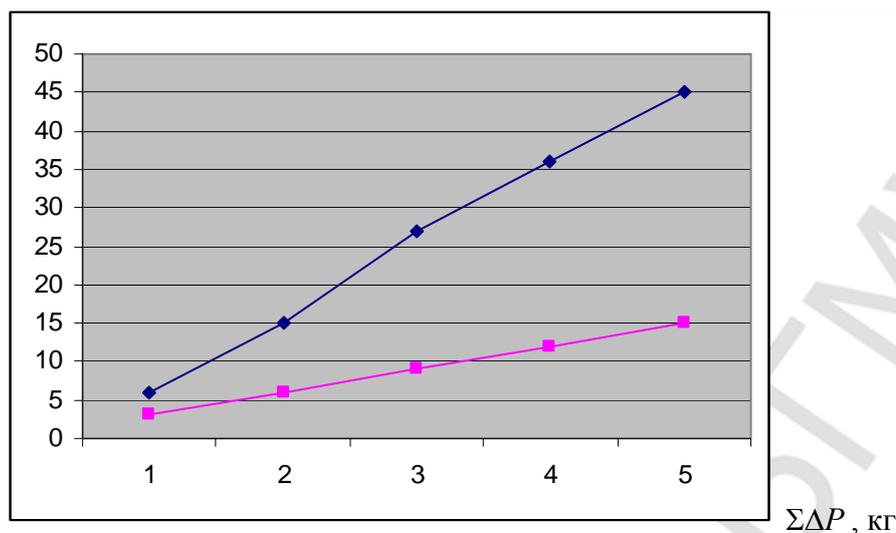


Рис. 7.20. Функциональная зависимость деформационных параметров от нагрузки после декальцинации ( $tg(\alpha_2) = 22.5, tg(\alpha'_2) = 7.5$ ):

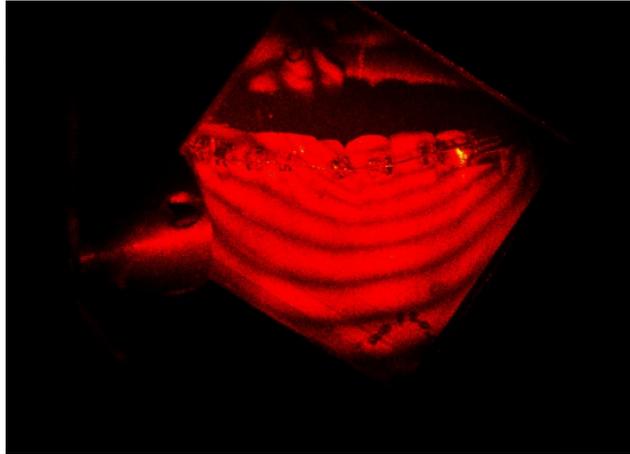
Ломаная синего цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_1$ , опирающемся на зуб, от нагрузки; ломаная красного цвета — зависимость числа полос на «рычаге-свидетеле»  $N_2$ , опирающемся на челюсть в области лунки, от нагрузки

Количественно же последствия оказались весьма существенными. Сопоставляя величины тангенсов углов наклона графиков  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , видим, что суммарная осадка зуба возросла примерно на 40 %, тогда как прогиб челюстного сегмента снизился примерно на 8 %. В соответствии с изложенной выше версией, этот факт можно объяснить следующим образом.

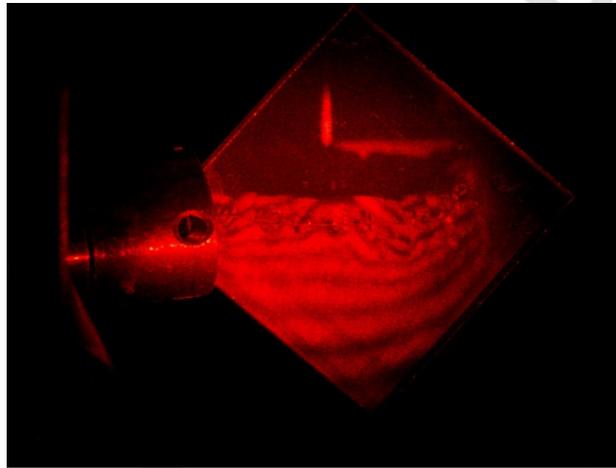
Вполне очевидно, что итогом процедуры декальцинации является ослабление исходных прочностных характеристик звеньев, локализованных в пределах альвеолярного отростка, и костной ткани в прилегающей области. Соответственно, возрастает степень свободы зуба в осевом направлении и, следовательно, возможность его относительного смещения в этом направлении. Кроме того, ослабление прочностных характеристик костной ткани сокращает объем сегментной костной ткани, охватываемой деформационным тензором и участвующей в формировании ответной реакции на нагрузку. А это и снижает долю деформационного вклада сегмента в итоговую осадку зуба. С клинической точки зрения эти данные являются положительными и подтверждают целесообразность применения процедуры декальцинации в практике *in vivo* [41].

### 7.2.5. Исследование деформационного поля челюсти до и после декальцинации при нагрузке на весь зубной ряд

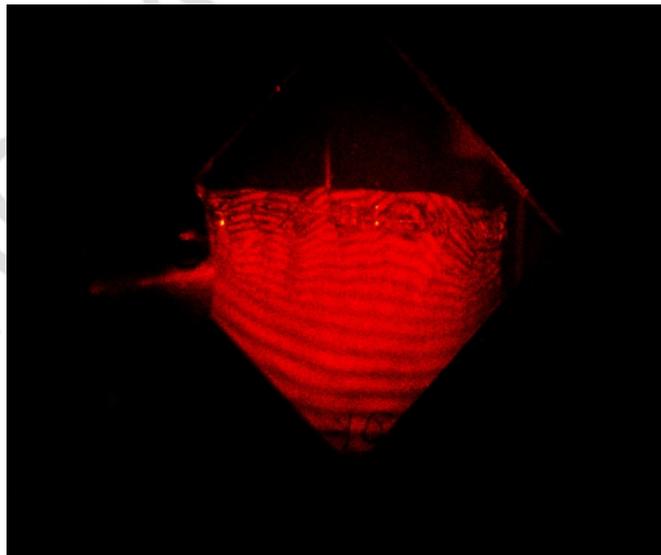
На рис. 7.21–7.24 приведены интерферограммы, иллюстрирующие структуру деформационного поля челюсти до и после декальцинации.



*Рис. 7.21.* Интерферограмма деформационного поля челюсти до декальцинации до декальцинации



*Рис. 7.22.* Интерферограмма деформационного поля челюсти до декальцинации



*Рис. 7.23.* Интерферограмма деформационного поля челюсти после декальцинации

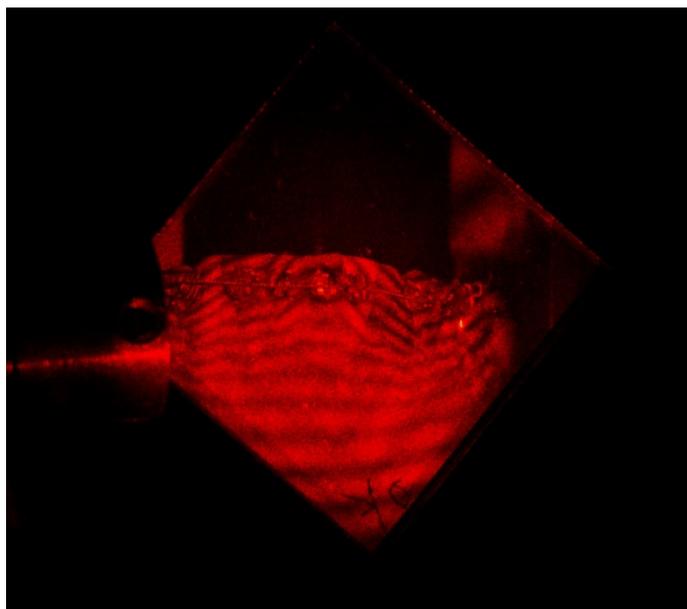


Рис. 7.24. Интерферограмма деформационного поля челюсти после декальцинации

В обоих случаях интерференционные картины представляют собой системы продольных по направлению тела челюсти параллельных полос с частотой, убывающей по мере удаления от альвеолярной области к краю челюсти. Такая геометрия интерференционного рисунка отражает сходящийся внутрь челюсти ее деформационный прогиб в плоскости зубного ряда, что соответствует направлению ответной реакции костной ткани на сходящееся векторное поле тянущей нагрузки.

Убывание частоты полос в направлении края челюсти отражает возрастание ее естественной прочностной структуры в данном направлении.

Также в обоих случаях в области челюсти с аномалиями стоящими зубами имеет место локальное искажение в целом симметричной интерференционной картины. В указанной области расположен наклонённый орально боковой резец. При использованном нами способе нагружения в виде тянущего усилия такое нарушение симметрии зубного ряда порождает в области искривления знакопеременное силовое поле, чем и объясняется указанное локальное искажение.

Однако имеются и существенные различия. В частности, до декальцинации частота полос практически равномерно уменьшается по мере удаления в направлении от альвеолярной области и это характеризует исходное, естественное, равномерное возрастание прочностной структуры челюсти в указанном направлении.

После декальцинации альвеолярной области частота полос на ней возросла примерно в два раза, оставаясь прежней на теле челюсти. Это означает, что процедура декальцинации, пропорционально ее степени, снизила исходную прочностную структуру обсуждаемой зоны и, соответственно,

повысила ее деформационную податливость, в чем и состоял смысл указанной процедуры.

Кроме того, упомянутое выше локальное искажение интерференционной картины также имеет существенные особенности. До декальцинации это искажение выходит за пределы альвеолярной зоны и частично захватывает тело челюсти. Это означает, что, в соответствии с исходной прочностной структурой челюсти, знакопеременное силовое поле, возникающее в искривленном зубном ряду, выходит за пределы альвеолярной зоны, расширяя величину локального деформационного поля. Эту реальность с клинической точки зрения, при практикуемой методике лечения аномалий положения зубов и деформаций зубных рядов с помощью брекет-систем следует считать негативным фактором.

После декальцинации локальное искажение интерференционной картины сосредоточено только в пределах альвеолярной зоны. Следовательно, эта процедура делает процесс указанной коррекции более щадящим, практически устраняя означенный выше негатив.

Таким образом, проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. При боковой нагрузке на клык возникающее в его корневой зоне выворачивающее усилие порождает сложный деформационный тензор, охватывающий всю челюсть. Доминирующим, сохраняющимся и после декальцинации лунки, является общий асимметричный деформационный перекосяк челюсти относительно некоторой виртуальной оси вращения, ориентировочно пересекающейся с линией между верхушками суставных отростков и проходящий через корневую область нагружаемого клыка. Местные, локально ограниченные фрагменты деформационного поля, расположенные вдоль альвеолярного отростка и тела челюсти по обеим сторонам клыка существенно критичны к процедуре декальцинации. До нее деформационное поле фронтального фрагмента, порождаемое внутренней, сжимающей компонентой выворачивающего усилия клыкового корня, ориентированной вдоль альвеолярной зоны по направлению нагрузки, охватывает практически весь фронтальный альвеолярный участок челюсти, а после нее сворачивается до зоны лунки клыка. Соответственно, деформационное поле дистального, относительно клыка, бокового фрагмента, порождаемое наружной, ориентированной внутрь, компонентой выворачивающего усилия корня клыка, и интерпретируемое как поперечно изгибающее, практически деградирует после декальцинации. С клинической точки зрения перекосяк челюсти объективно неизбежен, практически в режиме *in vivo* обратим, и существенного значения не имеет. Наличие же локальных деформационных зон следует отнести к негативным факторам. Устранение этих факторов процедурой декальцинации подтверждает целесообразность ее применения в лечебной практике.

2. При осевой нагрузке на моляр величины его деформационной осадки и прогиба костной ткани расположенного под ним челюстного сегмента линейно связаны с величиной нагрузки до и после декальцинации лунки. Однако в последнем случае, вследствие изменения прочностных характеристик костной ткани, окружающей зуб, возрастает его степень свободы в осевом направлении, в результате чего происходит оппозитное перераспределение количественного соотношения величин ответной деформационной реакции на нагрузку самого зуба и окружающей костной ткани. А именно, осадка зуба возрастает на 40 %, а прогиб челюстного сегмента уменьшается на 8 %. Эти количественные показатели являются относительными, справедливыми только применительно к использованному в наших экспериментах объекту. Достоверность же качественного результата — оппозитности — справедлива, как мы полагаем, и в общем случае, в том числе и в режиме *in vivo*. В этом принципиальная значимость данного результата с клинической точки зрения, подтверждающая целесообразность декальцинации в лечебной практике.

3. При нагружении челюсти в плоскости зубного ряда тянущимся усилием, охватывающим каждый зуб, сходящееся векторное силовое поле вызывает направленный внутрь челюстной дуги ее деформационный прогиб. Судя по характеру интерференционных картин с убывающей в направлении от альвеолярной зоны частотой полос, указанный прогиб является также убывающим. В естественном состоянии, до декальцинации, это убывание является практически монотонным, что характеризует исходную прочностную структуру челюсти в указанном направлении как монотонно возрастающую. После целенаправленного изменения указанной структуры посредством процедуры декальцинации, преобладающим, четко выраженным и зависящим от степени этой декальцинации, является прогиб декальцинированной, в нашем случае альвеолярной, зоны. В аномальной зубной дуге возникает знакопеременное силовое векторное поле, порождающее локальные деформационные зоны под зубами, отклоненными от нормального положения.

В естественном состоянии эти зоны простираются за пределы альвеолярного отростка челюсти, что следует считать негативным фактором. Этот фактор устраняется процедурой декальцинации альвеолярной зоны, в результате чего повышается ее деформационная податливость и деформация локализуется только в ее пределах. Тем самым подтверждается клиническая целесообразность указанной процедуры.

## Заключение

Представленная монография является небольшим этапом на пути усовершенствования математической модели равновесия периодонта. Отметим, что построенная нами математическая модель позволила не только объяснить целый ряд фактов, известных из стоматологической практики (например, меньшую сопротивляемость зуба в боковом направлении по сравнению с фронтальным, наличие лишь одной плоскости симметрии для всех зубов с целью повышения жесткости при поступательных перемещениях зуба, снижение нормальных напряжений вследствие возникновения касательных напряжений, резкое увеличение напряжений в периодонте при атрофии костной ткани, нецелесообразность ортодонтического лечения при атрофии костной ткани более 50 %), но и решить многие вопросы, связанные с рациональным конструированием протезов за счет выбора числа опор, с лечением врожденных и приобретенных дефектов зубов в результате правильного определения оси поворота зуба, а также оптимизировать ортодонтическое лечение за счёт изменения пластичности костной ткани и оптимального дозирования нагрузки.

Однако форма периодонта не всегда может быть описана поверхностью эллиптического гиперboloида. Поэтому в случае многокорневых зубов можно приближенно использовать результаты однокорневых зубов следующим образом: при определении суммарной жесткости складываем жесткости отдельных корней, при определении нагрузки на отдельный корень используем результаты определения реакций опор многоопорного мостовидного протеза.

Дальнейшее усовершенствование модели равновесия системы зуб–периодонт–костная ткань может быть осуществлена, во-первых, за счет приближения к реальной геометрической форме периодонта, толщина которого неодинакова по высоте корня зуба, во-вторых, за счет учета анизотропии материала периодонта, в-третьих, за счет отказа от модели абсолютно твердого тела для корня зуба и костной ткани. Кроме того, результаты данной работы могут быть использованы для построения динамической модели равновесия системы зуб–периодонт–костная ткань. Ведь периодонт, зуб и костная ткань испытывают динамические нагрузки во время жевательного акта. Таким образом, перспективы усовершенствования математической модели системы зуб–периодонт–костная ткань безграничны.

## Литература

1. *Абдель Хамид, Ибрагим Мустафа* Лечение прогнатического (дистального) прикуса ортодонтическим аппаратурным путем с применением препарата лидазы : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Абдель Хамид Ибрагим Мустафа ; Моск. мед. стоматол. ин-т им. Н. А. Семашко. М., 1984. 21 с.
2. *Александрова, Ю. М.* Исправление зубочелюстных деформаций у взрослых / Ю. М. Александрова, А. Д. Мухина // Проблемы ортопедической стоматологии : Респ. межвед. сб. Киев : Здоров'я, 1970. Вып. 4. С. 150–155.
3. *Аль-Хаири, И. Н.* Влияние вакуумного воздействия на ткани пародонта по данным экспериментально-морфологического исследования / И. Н. Аль-Хаири // Стоматология. 1979. № 2. С. 5–7.
4. *Андерсон, Х. А.* Аномалии положения отдельных зубов и методы их лечения / Х. А. Андерсон // Вопросы ортодонтии : сб. науч. тр. Рига, 1961. С. 169–171.
5. *Аржанцев, П. З.* Хирургическое лечение аномалий прикуса / П. З. Аржанцев, В. А. Сукачев, Г. В. Губин // Воен.-мед. журн. 1970. № 12. С. 15–21.
6. *Арутюнов, С. Д.* Математическое моделирование и расчет напряженно-деформированного состояния металлокерамических зубных протезов / С. Д. Арутюнов // Стоматология. 1997. № 4. С. 47–51.
7. *Арутюнов, С. Д.* Проектирование рациональных форм металлокерамических конструкций с консольной фасеткой на основе анализа напряженно-деформированного состояния / С. Д. Арутюнов // Проблемы нейростоматологии. 1998. № 4. С. 13–17.
8. *Баграмов, Э. Г.* Ортопедическое лечение заболеваний пародонта при аномалиях прикуса у взрослых : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Э. Г. Баграмов ; ЦНИИ стоматологии. М., 1987. 24 с.
9. *Баринава, Л. П.* Характеристика действия пружинящих расширяющих дуг в съемных ортодонтических аппаратах / Л. П. Баринава // Стоматология. 1970. № 1. С. 39–42.
10. *Быков, В. Л.* Гистология и эмбриология органов полости рта человека / В. Л. Быков. СПб. : Специальная литература, 1996. 247 с.
11. *Василевская, З. Ф.* Эффективность лечения зубочелюстных аномалий с удалением постоянных зубов / З. Ф. Василевская, А. Д. Мухина // Стоматология. 1978. № 6. С. 63–64.
12. *Величко, Л. С.* Ортодонтическое лечение и протезирование при недоразвитии верхней челюсти в сформированном прикусе : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Л. С. Величко ; Моск. мед. стоматол. ин-т. М., 1965. 15 с.
13. *Величко, Л. С.* Профилактика и лечение артикуляционной перегрузки пародонта / Л. С. Величко. Минск : Беларусь, 1985. 141 с.
14. *Величко, Л. С.* Результаты лечения аномалий зубочелюстной системы с применением индуктотермоэлектрофореза трилона Б / Л. С. Величко, С. В. Ивашенко, И. И. Гунько // Материалы 3 съезда стоматологов Беларуси. Минск, 1997. С. 104–105.
15. *Величко, Л. С.* Решение задачи о равновесии периодонта при действии на зуб внешних сил / Л. С. Величко, А. Е. Крушевский, Г. П. Соснин // Теоретическая и прикладная механика. Минск, 1976. Вып. 3. С. 63–80.
16. *Вест, Ч.* Голографическая интерферометрия / Ч. Вест ; пер. с англ. М. : Мир, 1982. 504 с.
17. *Гаврилов, Е. И.* Биология пародонта и пульпы зуба / Е. И. Гаврилов. М. : Медицина, 1960. 215 с.

18. *Гаврилов, Е. И.* Ортопедическая стоматология / Е. И. Гаврилов, А. С. Щербаков. М. : Медицина, 1984. 576 с.
19. *Гашилов, Р. Г.* Биомеханические принципы дистального перемещения верхних боковых зубов аппаратами с внеротовой опорой / Р. Г. Гашилов // Стоматология. 1971. № 5. С. 41–42.
20. *Гвоздева, Л. М.* Оптимизация процесса перестройки костной ткани альвеолярного отростка при лечении аномалий зубного ряда у детей старшего школьного возраста и взрослых : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Л. М. Гвоздева ; Перм. мед. ин-т. Пермь, 1989. 22 с.
21. *Гистология* / под ред. Ю. Н. Афанасьева, Н. А. Юриной. М. : Медицина, 1989. Гл. 18. С. 468–507.
22. *Гонцова, Э. Г.* Возрастная изменчивость микротвердости костной ткани нижней челюсти человека / Э. Г. Гонцова // Результаты клинических и экспериментальных исследований : науч. тр. М., 1974. С. 70–72.
23. *Гуныко, И. И.* Клинико-экспериментальное обоснование применения физиотерапевтических методов в комплексном лечении зубочелюстных аномалий сформированного прикуса : автореф. дис. ... д-ра мед. наук : 14.00.21 / И. И. Гуныко ; Белор. гос. мед. ун-т. Минск, 2004. 42 с.
24. *Гуныко, И. И.* Комплексное лечение зубочелюстных аномалий сформированного прикуса / И. И. Гуныко, Л. С. Величко, Г. А. Берлов. Минск, 2003. 290 с.
25. *Гуныко, И. И.* Изменение гистоархитектоники костной ткани после ультрафонофореза с трилоном Б / И. И. Гуныко, Г. А. Берлов, В. С. Улащик // Здравоохранение. 2001. № 5. С. 18–21.
26. *Демнер, Л. М.* Опыт ортодонтического лечения взрослых / Л. М. Демнер, С. А. Дубивко, Г. Х. Ахметова // Вопросы стоматологии. Чебоксары, 1975. Вып. 1. С. 188–193.
27. *Денисов, С. Д.* Требования к научному эксперименту с использованием животных / С. Д. Денисов, Т. С. Морозкина // Здравоохранение. 2001. № 4. С. 40–42.
28. *Денисова, Ю. Л.* Влияние вакуум-лазеротерапии на некоторые параметры ротовой жидкости у больных с зубочелюстно-лицевыми аномалиями / Ю. Л. Денисова // Стоматологический журнал. 2002. № 4. С. 23–25.
29. *Денисова, Ю. Л.* Клинико-функциональная характеристика тканей периодонта при комплексном лечении больных с зубочелюстными аномалиями современными несъемными аппаратами : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Ю. Л. Денисова ; Белор. гос. мед. ун-т. Минск, 2006. 20 с.
30. *Дрик, Ф. Г.* Исследование напряженно-деформированного состояния костной ткани челюсти при перемещениях зубов под воздействием боковых нагрузок методом голографической интерферометрии / Ф. Г. Дрик, С. В. Ивашенко // Современная стоматология. 2008. № 3. С. 64–68.
31. *Ефанов, О. И.* Влияние трилон Б-электрофореза на костную ткань челюстей в эксперименте / О. И. Ефанов, П. В. Иванов // Новое в терапевтической детской и хирургической стоматологии : тез. докл. 8 Всесоюз. съезда стоматологов. М., 1987. Т. 2. С. 31–32.
32. *Жулев, Е. Н.* Несъемные протезы. Теория, клиника и лабораторная техника / Е. Н. Жулев. Нижний Новгород, 1995. 365 с.
33. *Иванов, А. П.* Динамика подвижности зубов в процессе перемещения дозированной нагрузкой / А. П. Иванов, Э. В. Щербакова, В. И. Щербаков // Волгогр. мед. ин-т. Волгоград, 1990. Утв. 29.05.90. 9 с.
34. *Иванов, В. С.* Заболевания пародонта / В. С. Иванов. М. : Медицина, 1960. 272 с.

35. *Ивашенко, С. В.* Результаты воздействия индуктотермии на костную ткань в зависимости от мощности электрического поля УВЧ / С. В. Ивашенко, Г. А. Берлов, И. И. Гунько // Материалы 4 съезда стоматологов Беларуси. Витебск, 2000. С. 59–61.
36. *Ивашенко, С. В.* Изменения в костной ткани при применении УВЧ-индуктотермоэлектрофореза трилона Б / С. В. Ивашенко // Здоровоохранение Белоруссии. 2000. № 4. С. 15–16.
37. *Ивашенко, С. В.* Экспериментальное обоснование применения фонофореза глюконата кальция с витамином Д в ретенционном периоде ортодонтического лечения / С. В. Ивашенко, В. С. Улащик, Г. А. Берлов // Современная стоматология. 2005. № 1. С. 64–66.
38. *Ивашенко, С. В.* Лечение аноамлийного положения фронтальных зубов с применением индуктотермоэлектрофореза трилона Б : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / С. В. Ивашенко ; Минск. гос. мед. ин-т. Минск, 2000. 19 с.
39. *Ивашенко, С. В.* Изменение костной ткани после воздействия низкочастотным ультразвуком / С. В. Ивашенко // Медицинский журнал. 2007. № 2. С. 46–48.
40. *Ивашенко, С. В.* Прочностная устойчивость комплекса «зуб–альвеолярный отросток» к осевым нагрузкам / С. В. Ивашенко, Ф. Г. Дрик // Современная стоматология (РБ). 2008. № 4. С. 62–65.
41. *Ивашенко, С. В.* Анализ влияния свойств костной ткани на перемещения зубного ряда под действием сосредоточенной нагрузки / С. В. Ивашенко, С. М. Босяков, К. С. Юркевич // Теоретическая и прикладная механика. 2009. Вып. 24. С. 95–99.
42. *Ивашенко, С. В.* Моделирование перемещений и поворотов корня зуба, возникающих под действием сосредоточенной нагрузки / С. В. Ивашенко, С. М. Босяков, К. С. Юркевич // Теоретическая и прикладная механика. 2009. Вып. 24. С. 101–104.
43. *Использование* лекарственного электрофореза для декальцинации костной ткани в стоматологии / С. В. Ивашенко [и др.] // Здоровоохранение Белоруссии. 1994. № 1. С. 28–30.
44. *Кабак, С. Л.* Общая гистология. Анатомия опорно-двигательного аппарата головы и шеи : учеб. пособие / С. Л. Кабак, А. А. Артишевский. 2-е изд. Минск : БГМУ, 2003. 144 с.
45. *Каламкарров, Х. А.* Клиника и лечение зубочелюстных аномалий у детей / Х. А. Каламкарров. Ташкент : Медицина, 1978. 268 с.
46. *Калвелис, Д. А.* Ортодонтия. Зубочелюстные аномалии в клинике и эксперименте / Д. А. Калвелис. Л. : Медицина. Ленингр. отд-ние, 1964. 238 с.
47. *Калвелис, Д. А.* Основные вопросы диагностики зубочелюстных аномалий / Д. А. Калвелис // Вопросы ортодонтии : сб. науч. тр. Рига, 1961. Вып. 10. С. 7–30.
48. *Кирияк, Е. Л.* Лечение небного положения зубов и медиально-смещенных клыков дозированным методом / Е. Л. Кирияк // Науч. тр. Центр. ин-та усовершенствования врачей. 1973. Т. 175. С. 136–139.
49. *Козел, А. В.* Пути оптимизации ортодонтического лечения при сформированном прикусе : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / А. В. Козел ; Моск. мед. стоматол. ин-т им. Н. А. Семашко. М., 1985. 23 с.
50. *Климашин, Ю. М.* Использование метода математического моделирования для оценки состояния пародонта / Ю. М. Климашин // Стоматология. 1977. № 2. С. 57–63.
51. *Копяев, Ю. Н.* Гистология зубочелюстного аппарата человека / Ю. Н. Копяев, В. В. Гемонов, С. С. Качкаева // Методические разработки по гистологии зубочелюстного аппарата для студентов. М. : ММСИ, 1987. 44 с.

52. *Криштаб, С. И.* Применение вибрационного воздействия на зубы для ускорения ортодонтического лечения / С. И. Криштаб, С. И. Дорошенко, Г. И. Лютик // *Стоматология*. 1986. № 3. С. 15–18.
53. *Кулаженко, В. И.* Вакуумный и электровакуумный метод диагностики и лечения стоматологических и некоторых воспалительно-дистрофических заболеваний : автореф. дис. ... д-ра мед. наук : 14.00.21 / В. И. Кулаженко ; Одесск. мед. ин-т. Одесса, 1967. 34 с.
54. *Крушевский, А. Е.* Решение задачи о равновесии периодонта ограниченной двумя эллиптическими двуполостными гиперблоидами / А. Е. Крушевский // *Теоретическая и прикладная механика*. Минск : Вышэйшая школа, 1983. Вып. 10. С. 11–21.
55. *Крушевский, А. Е.* Определение перемещений зуба с учетом изменений характеристик костной ткани альвеолярного отростка / А. Е. Крушевский, С. В. Ивашенко // *Медицинский журнал*. 2007. № 3. С. 62–65.
56. *Крушевский, А. Е.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в системе корень костная ткань с учетом изменения характеристик альвеолярной кости / А. Е. Крушевский, С. В. Ивашенко // *Медицинский журнал*. 2008. № 1. С. 40–43.
57. *Крушевский, А. Е.* Определение реакций мостовидного протеза с тремя опорами / А. Е. Крушевский, Ю. И. Коцюра // *Теоретическая и прикладная механика*. 1989. Вып. 16. С. 126–131.
58. *Крушевский, А. Е.* Исследования влияния атрофии костной ткани и параметров корня на жесткость зуба при повороте под действием пары сил, лежащей в плоскости симметрии / А. Е. Крушевский, С. А. Наумович // *Современная стоматология*. 1998. № 4. С. 13–15.
59. *Крушевский, А. Е.* Математическое моделирование равновесия периодонта зуба / А. Е. Крушевский, С. А. Наумович // *Докл. АН Беларуси*. 1997. Т. 41. № 1. С. 38–43.
60. *Крушевский, А. Е.* Моделирование оси поворота зуба в ортопедической стоматологии под действием произвольной силы / А. Е. Крушевский, С. А. Наумович // *Рукопись депонирована в ВИНТИ 08.07.1996. № 2198-В96. Реферат опубликован в Известиях АН Беларуси, 1996. № 4.*
61. *Крушевский, А. Е.* Исследование напряженного состояния области соединения периодонта с корнем зуба / А. Е. Крушевский, С. А. Наумович // *Биомедицинская радиоэлектроника*. М., 1997. № 4. С. 90–93.
62. *Крушевский, А. Е.* Решение о равновесии периодонта как оболочки ограниченной двумя составными эллиптическими гиперблоидами / А. Е. Крушевский, С. А. Наумович // *Биомедицинская радиоэлектроника*. М., 1996. № 12. С. 62–72.
63. *Крушевский, А. Е.* Основы биомеханики мостовидных протезов / А. Е. Крушевский, С. С. Наумович // *Теоретическая и прикладная механика*. 2006. Вып. 20. С. 134–139.
64. *Кудрявцева, Л. Е.* К анатомии зубочелюстных сегментов верхней и нижней челюстей / Л. Е. Кудрявцева, Л. А. Лякишева // *Архив анатомии, гистологии и эмбриологии*. 1973. № 5. С. 88–93.
65. *Кулаженко, В. И.* Вакуумный и электровакуумный метод диагностики и лечения стоматологических и некоторых воспалительно-дистрофических заболеваний : автореф. дис. ... д-ра мед. наук : 14.00.21 / В. И. Кулаженко ; Одесск. мед. ин-т. Одесса, 1967. 34 с.
66. *Кульгавов, В. Г.* Хирургические методы лечения ортодонтических больных / В. Г. Кульгавов // *Актуальные вопросы ортодонтического лечения : тез. докл.* Иркутск, 1990. С. 55–56.

67. Курляндский, В. Ю. Ортопедическая стоматология / В. Ю. Курляндский. М. : Медицина, 1977. 488 с.
68. Лечение аномалий челюстно-лицевой области / под ред. В. А. Козлова. Ташкент : Медицина, 1982. 282 с.
69. Лечение зубочелюстных деформаций / С. И. Криштаб [и др.]. Киев : Здоров'я, 1982. -90 с.
70. Миргазизов, М. З. Рентгеноцефолометрическая диагностика и планирование лечения аномалий прикуса с использованием уравнений регрессии / М. З. Миргазизов, А. П. Колотков. Кемерово, 1976. 91 с.
71. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. М., 1970. 940 с.
72. Наумович, С. А. Повышение эффективности комплексного (ортопедо-хирургического) лечения аномалий и деформаций зубочелюстной системы в сформированном прикусе (клин.-эксперим. исслед.) : автореф. дис. ... д-ра мед. наук : 14.00.21 / С. А. Наумович ; Бел. гос. мед. ун-т. Минск, 2001. 42 с.
73. Наумович, С. А. Влияние атрофии костной ткани на изменения нормальных напряжений при поступательных движениях зуба / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский // Современная стоматология (РБ). 1998. № 1. С. 18–20.
74. Наумович, С. А. Исследование влияния атрофии костной ткани на жесткость зуба при поступательном перемещении / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский // Теоретическая и прикладная механика. 1997. № 3. С. 16–18.
75. Наумович, С. А. Определение реакций опор и перемещений мостовидного протеза / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский // Современная стоматология (РБ). 1998. № 2. С. 29–30.
76. Наумович, С. А. Биомеханика системы зуб–периодонт / С. А. Наумович, А. Е. Крушевский. Минск, 2000. 132 с.
77. Наумович, С. А. Антропометрические данные коронок и корней зубов и их значение в стоматологии / С. А. Наумович, Р. А. Батура, С. Н. Пархамович // Стоматологический журнал. 2002. № 2. С. 21–22.
78. Олесова, В. Н. Изучение процессов напряженно-деформированного состояния в системе протез–имплант–кость при ортопедическом лечении беззубой нижней челюсти / В. Н. Олесова, А. В. Осипов // Проблемы нейростоматологии. Ч. 2. Несъемное протезирование. 1998. № 4. С. 8–11.
79. Определение модуля Юнга нижнечелюстной кости / Г. Г. Таптунова [и др.] / Теория и практика стоматологии : сб. науч. тр. М., 1976. 278 с.
80. Осипов, А. В. Изучение процессов напряженно-деформированного состояния в системе протез–имплант–кость при ортопедическом лечении беззубой нижней челюсти / А. В. Осипов, В. Н. Олесова // Проблемы нейростоматологии. Ч. 1. Съёмное протезирование. 1998. № 1. С. 13–18.
81. Панчоха, В. П. Исследование биомеханика системы зуб–протез–челюсть при моделировании протезирования концевых дефектов зубных рядов дугowymi протезами / В. П. Панчоха // Стоматология. 1973. № 2. С. 56–58.
82. Персин, Л. С. Ортодонтия. Лечение зубочелюстных аномалий / Л. С. Персин. М. : Инженер, 1998. 296 с.
83. Позднякова, А. И. К вопросу о рациональном применении ортодонтической аппаратуры / А. И. Позднякова, В. С. Куриленко // Проблемы ортопедической стоматологии : Респ. межвед. сб. Киев, 1968. Вып. 2. С. 110–115.
84. Ремизов, С. М. Исследование микротвердости челюстных костей человека / С. М. Ремизов // Стоматология. 1975. № 1. С. 14–16.

85. Семенюк, В. М. Возрастные корреляции содержания основных компонентов костной ткани нижней челюсти человека / В. М. Семенюк // Стоматология. 1985. № 2. С. 7–9.
86. Семенюк, В. М. Возрастная динамика неорганического матрикса нижней челюсти человека / В. М. Семенюк // Стоматология. 1986. № 1. С. 9–11.
87. Симановская, Е. Ю. Физиотерапия как метод оптимизации ортодонтического лечения аномалий зубного ряда у детей старшего школьного возраста и взрослых / Е. Ю. Симановская, Л. М. Гвоздева // Ортодонтия : методы профилактики, диагностики и лечения : тр. ЦНИИС. М., 1990. С. 121–124.
88. Слука, Б. А. Гистофизиология зубочелюстной системы человека / Б. А. Слука. Минск, 1998. 100 с.
89. Смирнов, В. И. Курс высшей математики / В. И. Смирнов. М., 1954. Т. 1, 2. 472 с., 628 с.
90. Сорокина, Л. В. Стимуляция репаративных процессов очаговым дозированным вакуумом при ортодонтическом лечении : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Л. В. Сорокина ; Одесс. мед. ин-т. Одесса, 1974. 16 с.
91. Соснин, Г. П. Бюгельные протезы / Г. П. Соснин. Минск : Наука и техника, 1981. 344 с.
92. Соснин, Г. П. Основы расчета и конструирования бюгельных протезов : автореф. дис. ... д-ра мед. наук : 14.00.21 / Г. П. Соснин ; Моск. мед. стоматол. ин-т. М., 1970. 38 с.
93. Соснин, Г. П. Распределение напряжений в периодонте при действии на зуб вертикального и горизонтального давлений / Г. П. Соснин // Материалы первой Республ. конф. стоматологов Армении. Ереван, 1966. С. 13–15.
94. Сухарев, Г. Т. Возможности «корпусного» перемещения зубов при ортодонтическом лечении аномалий прикуса / Г. Т. Сухарев // Стоматология. 1978. № 6. С. 52–55.
95. Токаревич, И. В. Способы дистализации верхних постоянных клыков при лечении зубочелюстных аномалий / И. В. Токаревич, Д. В. Хандогий // Современная стоматология (РБ). 2008. № 4. С. 28–31.
96. Таптунова, Г. Г. Клинические и экспериментальные исследования функционального воздействия консольного протеза на пародонт зуба / Г. Г. Таптунова // Стоматология. 1975. № 6. С. 40–43.
97. Улащик, В. С. Физиотерапевтический эксперимент, его задачи, особенности проведения и перспективы использования / В. С. Улащик // Вопр. курортологии, физиотерапии и леч. физкультуры. 1994. № 1. С. 38–42.
98. Ультрафонофорез раствором хлорида кальция в ортодонтии : метод. рекомендации / сост. : Л. М. Демнер, Т. И. Коваленко. Казань, 1988. 13 с.
99. Федоров, С. Д. Оценка методики определения пути введения и выведения протезов по Nowoc / С. Д. Федоров // Стоматология. 1974. № 6. С. 49–51.
100. Хорошилкина, Ф. Я. Ортодонтия : комплексное лечение зубочелюстно-лицевых аномалий: ортодонтическое, хирургическое, ортопедическое / Ф. Я. Хорошилкина. М., 2001. 174 с.
101. Чумаков, А. Н. Результаты горизонтального и вертикального перемещения зубов у детей на фоне ультразвукового воздействия на костную ткань нижней челюсти / А. Н. Чумаков, В. Г. Лавриков // Стоматология. 1988. № 4. С. 69–70.
102. Чумаченко, Е. Н. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния зубных протезов / Е. Н. Чумаченко, С. Д. Арутюнов, И. Ю. Лебедеико. М. : Молодая гвардия, 2003. 270 с.

103. Широка, З. П. Состояние пульпы зубов при ортодонтической нагрузке / З. П. Широка // Вопросы ортодонтии : сб. науч. тр. Рига, 1961. С. 169–171.
104. Щербакова, Э. В. Обоснование силового режима ортодонтического лечения прогнатического прикуса с учетом функционального состояния пародонта у детей в возрасте 12–15 лет : автореф. дис. ... канд. мед. наук : 14.00.21 / Э. В. Щербакова ; Калинин. гос. мед. ин-т. Калинин, 1989. 19 с.
105. Яковлев, К. К. Опыт расчета длины пружин для кламмеров с полуподвижным соединением / К. К. Яковлев, Н. Д. Даньков // Стоматология. 1972. № 4. С. 92–93.
106. Amadori, M. P. Cephalometry with a video display computer / M. P. Amadori, A. M. Gatti // Med. Prog. Technol. 1986; 11(1): 33–7.
107. Arnone, R. Epidemiological and correlation studies of CMD factors : are they all according to the scientific method requirements? / R. Arnone // Am. J. Orthod. Dentofacial. Orthop. 1993. Vol. 103. P. 23–24.
108. Augoni, D. S. Practice parameters for the treatment of snoring and obstructive sleep apnea with oral appliances / D. S. Augoni // Sleep. 1995. Vol. 18. № 6. P. 511–513.
109. Bhatia, S. N. An interactive computer program for recording and analysing longitudinal cephalometric growth material / S. N. Bhatia // Br. J. Orthod. 1987 Nov; 14(4): 299–304.
110. Davidovitch, Z. Electric currents, bone remodeling and orthodontic tooth movement, increase in rate of tooth movement and periodontal. Cyclic nucleotide levels by combined force and electric current / Z. Davidovitch // Am. J. Orthod. 1980. Vol. 77. № 1. P. 33–47.
111. Grubb, J. F. Clinical and scientific applications/advances in video imaging / J. F. Grubb, T. Smith, P. Sinclair // Angle Orthod. 1996. Vol. 66. № 6. P. 407–416.
112. Espona, I. G. Cluster analysis application to Class I malocclusion / I. G. Espona, J. T. Gomez, J. B. Carmona // Eur. J. Orthod. 1995. Vol. 17. № 3. P. 231–240.
113. Fortschr-Kieferorthop. Biomechanical aspects of tooth movement in orthodontics. 1986 Apr; 47(2): 114–21
114. Galletti, S. P. Orthodontic treatment as definitive therapy in cranio-cervico-mandibular dysfunction / S. P. Galletti, P. Nannelli // Minerva. Stomatol. 1989 Jul; 38(7): 773–81.
115. Gatti, A. M. Cephalometry with a video display computer / A. M. Gatti, M. P. Amadori // Med. Prog. Technol. 1986; 11(1): 33–7. IFAC/IFORS Symp. York, 1985. Oxford, 1985. Vol. 1. P. 37–4.
116. Computers : their role in orthodontic-orthopedic diagnosis / P. L. Jones [et al.] // Funct. Orthod. 1986 May-Jun; 3(3): 26, 28–30, 32–4.
117. Kaewsuriyathumrong, C. Stress of tooth and PDL structure created by bite force / C. Kaewsuriyathumrong, K. Soma // First Department of Orthodontics, Faculty of Dentistry, Tokyo Medical and Dental University, Tokyo Ika Shika Daigaku. Bull. Tokyo Med. Dent. Univ. 1993 Dec; 40(4): 217–32.
118. Kimura, H. Three dimensional shape measurement of teeth. (5) On the measurement by the newly developed double sensor laser displacement meter / H. Kimura, T. Sohmura, T. Watanabe // Shika Zairyō Kikai. 1990 Mar; 9(2): 295–300.
119. Levy-Mandel, A. D. Knowledge-based landmarking of cephalograms / A. D. Levy-Mandel, A. N. Venetsanopoulos, J. K. Tsotsos // Comput. Biomed. Res. 1986 Jun; 19(3): 282–309.
120. Lozanoff, S. A computer graphics program for measuring two- and three-dimensional form change in developing craniofacial cartilages using finite element methods / S. Lozanoff, V. M. Diewert // Comput. Biomed. Res. 1989 Feb; 22(1): 63–82.

121. *Maniere, D.* Computerized treatment of mandibular movements recorded with the sirognathograph. Possible uses in orthodontics / D. Maniere, S. Berek // *Rev. Orthop. Dento. Faciale.* 1986; 20(2): 185–96.
122. *Melsen, B.* Biomechanical principles in orthodontics. II / B. Melsen, V. Fotis, C. J. Burstone // *Mondo. Ortod.* 1986 May-Jun; 11(3): 19–32.
123. *Nakamura, R.* The effects on upper first molars by the face-bow construction. Consideration of utilizing the strain gauge method and the computer method of structural analysis / R. Nakamura // *Nippon. Kyosei. Shika. Gakkai. Zasshi.* 1989 Apr; 48(2): 246–66.
124. *Application of information technology in orthodontics. 4.* Creation of a databank for the registration of all children in the district of Suhl as a necessary aspect of orthodontic treatment / H. Reinhardt [et al.] // *Stomatol. DDR.* 1989 Oct; 39(10): 699–703.
125. *Application of information technology in orthodontics. 1.* Necessity, possibilities and prospects for use of task-orientated computers, for example the PC 1715 / H. Reinhardt [et al.] // *Stomatol. DDR.* 1989 Jul; 39(7): 441–3.
126. *Schenk, H. J.* 3-Dimensional model analysis of normal and dysgnathic bites using a coordinate measurement technic / H. J. Schenk // *Fortschr. Kieferorthop.* 1989 Apr; 50(2): 81–98.
127. *Schwarz, A. M.* Tissue Changes Incidental to Ortodontic Toothmovement / A. M. Schwarz // *Int. J. Orthod.* 1932. Vol. 18. P. 331.
128. *A computer-controlled expert system for orthodontic advice* / J. H. Sims-Williams [et al.] // *Br. Dent. J.* 1987 Sep. 5; 163(5): 161–6.
129. *Computers : their role in orthodontic-orthopedic diagnosis. Part 2.* Arch preparation / T. J. Spahl [et al.] // *Funct. Orthod.* 1986 Jul–Aug; 3(4): 16–9, 21–3.
130. *Dynamics of tissue changes found after mechanical loading of the rat incisor. I.* A three-dimensional longitudinal study of the morphologic aspects. Hebrew University-Hadassah Dental and Medical School, Department of Orthodontics, Jerusalem, Israel / S. Steigman [et al.] // *Am. J. Orthod. Dentofacial. Orthop.* 1991 Jun; 99(6): 533–42.
131. *Three-dimensional model of the human craniofacial skeleton: method and preliminary results using finite element analysis* / K. Tanne [et al.] // *J. Biomed. Eng.* 1988 May; 10(3): 246–52.
132. *Tanne, K.* Three-dimensional finite element analysis for stress in the periodontal tissue by orthodontic forces. Department of Orthodontics, Osaka University Faculty of Dentistry, Japan / K. Tanne, M. Sakuda, C. J. Burstone // *Am. J. Orthod. Dentofacial. Orthop.* 1987 Dec; 92(6): 499–505.
133. *The introduction of image processing using a personal computer system* / K. Terada [et al.] // *Nippon. Kyosei. Shika. Gakkai. Zasshi.* 1986 Sep; 45(3): 511–4.
134. *Optical measurement of dental cast profile and application to analysis of three-dimensional tooth movement in orthodontics* / K. Yamamoto [et al.] // *Front. Med. Biol. Eng.* 1989; 1(2): 119–30.
135. *Yamamura, M.* Mechanical evaluation of crown restoration by means of laser holographic interferometry, with a primary regard to establish a system for an experimental method / M. Yamamura // *Kanagawa. Shigaku.* 1989 Dec; 24(3): 450–62.

### Результаты расчета нормальных и касательных напряжений

Приведем результаты расчета нормальных и касательных напряжений для корня зуба (параметры, описывающие геометрическую форму корня зуба, величина нагрузки, координаты точки приложения силы и результаты расчета поступательных перемещений, углов поворота и координат центров сопротивления приведены ниже в таблице).

Полуоси эллипса, см			Н-Bone, %	Параметр гиперболоида, $d$	Высота корня зуба $H$ , см
$a_{10}$	$a_{20}$	$b_0$			
0,25	0,35	0,30	100	0,13	1,4
Модуль силы, $P$ , кг	Направление вектора силы, °		Координаты точки приложения нагрузки, см		
	$\alpha$	$\beta$	$x_f$	$y_f$	$z_f$
75	120	180	0,3	0	2,15
Поступательные перемещения, см					
$u_0$		$v_0$		$w_0$	
-0,0126973		0		-0,0118337	
Углы поворота, радианы					
$\Phi_x$		$\Phi_y$		$\Phi_z$	
0		-0,0986476		0	
Координаты центров сопротивления, см					
$z_a$	$x_b$	$z_b$	$x_c$		
1,1255659	-0,0318849	1,1257419	-0,0167081		

текущее положение плоскости сечения = 0,00 % от Н-Bone

текущее значение радиус-вектора  $r = 0,000E+00$

Normal = -9,575E+00, Tang1 = 3,043E+01, Tang2 = 7,161E-11

текущее положение плоскости сечения = 11,11 % от Н-Bone

текущее значение радиус-вектора  $r = 1,837E-01$

Teta = 0,00, Normal = -3,175E+02, Tang1 = 1,307E+01, Tang2 = 2,412E-10

Sigmanpx = 6,267E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -3,690E+02, Sigmansz = 0,000E+00

Taunspx = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,405E+01

Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,203E+01, Taunssz = 0,000E+00

TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -9,667E-11, TaunTetapz = 0,000E+00

TaunTetasx = 3,988E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -6,094E-11

Teta = 18,00, Normal = -3,024E+02, Tang1 = 1,125E+01, Tang2 = -3,396E+01  
 Sigmanpx = 5,960E+01, Sigmanpy = 5,939E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -5,178E-12, Sigmansy = -3,509E+02, Sigmansz = 5,992E-12  
 Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = -6,607E-12, Taunspz = -2,369E+01  
 Taunssx = 3,586E-11, Taunssy = 3,954E+01, Taunssz = -1,699E-12  
 TaunTetapx = 6,863E+00, TaunTetapy = -9,187E-11, TaunTetapz = 4,845E-01  
 TaunTetasx = 3,789E-10, TaunTetasy = -4,130E+01, TaunTetasz = -5,974E-11  
  
 Teta = 36,00, Normal = -2,587E+02, Tang1 = 6,258E+00, Tang2 = -6,449E+01  
 Sigmanpx = 5,070E+01, Sigmanpy = 1,130E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -9,848E-12, Sigmansy = -2,983E+02, Sigmansz = 1,403E-11  
 Taunspx = -3,758E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,273E+01  
 Taunssx = 6,545E-11, Taunssy = 3,275E+01, Taunssz = -3,101E-12  
 TaunTetapx = 1,303E+01, TaunTetapy = -7,800E-11, TaunTetapz = 7,825E-01  
 TaunTetasx = 3,213E-10, TaunTetasy = -7,830E+01, TaunTetasz = -5,624E-11  
  
 Teta = 54,00, Normal = -1,906E+02, Tang1 = -7,598E-01, Tang2 = -8,865E+01  
 Sigmanpx = 3,683E+01, Sigmanpy = 1,555E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,355E-11, Sigmansy = -2,163E+02, Sigmansz = 2,496E-11  
 Taunspx = -2,582E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,150E+01  
 Taunssx = 8,520E-11, Taunssy = 2,332E+01, Taunssz = -4,036E-12  
 TaunTetapx = 1,789E+01, TaunTetapy = -5,653E-11, TaunTetapz = 7,807E-01  
 TaunTetasx = 2,325E-10, TaunTetasy = -1,073E+02, TaunTetasz = -5,081E-11  
  
 Teta = 72,00, Normal = -1,047E+02, Tang1 = -8,729E+00, Tang2 = -1,042E+02  
 Sigmanpx = 1,936E+01, Sigmanpy = 1,828E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,593E-11, Sigmansy = -1,130E+02, Sigmansz = 3,772E-11  
 Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = -1,755E-11, Taunspz = -2,045E+01  
 Taunssx = 9,529E-11, Taunssy = 1,301E+01, Taunssz = -4,514E-12  
 TaunTetapx = 2,099E+01, TaunTetapy = -2,967E-11, TaunTetapz = 4,816E-01  
 TaunTetasx = 1,219E-10, TaunTetasy = -1,257E+02, TaunTetasz = -4,397E-11

Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -1,725E+01, Tang2 = -1,099E+02  
 Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 1,922E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,675E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 4,941E-11  
 Taunspix = 0,000E+00, Taunspy = -1,809E-11, Taunspz = -2,004E+01  
 Taunssx = 9,818E-11, Taunssy = 2,791E+00, Taunssz = -4,651E-12  
 TaunTetapx = 2,206E+01, TaunTetapy = 0,000E+00, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 0,000E+00, TaunTetasy = -1,320E+02, TaunTetasz = -3,637E-11

Teta = 108,00, Normal = 5,748E+01, Tang1 = -2,904E+01, Tang2 = -1,040E+02  
 Sigmanpx = -1,383E+01, Sigmanpy = 1,828E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,593E-11, Sigmansy = 8,244E+01, Sigmansz = 3,916E-11  
 Taunspix = 1,749E+00, Taunspy = -1,698E-11, Taunspz = -1,978E+01  
 Taunssx = 9,216E-11, Taunssy = -1,101E+01, Taunssz = -4,366E-12  
 TaunTetapx = 2,096E+01, TaunTetapy = 2,187E-11, TaunTetapz = 4,059E-01  
 TaunTetasx = -9,068E-11, TaunTetasy = -1,254E+02, TaunTetasz = -3,077E-11

Teta = 126,00, Normal = 1,180E+02, Tang1 = -3,849E+01, Tang2 = -8,786E+01  
 Sigmanpx = -2,631E+01, Sigmanpy = 1,555E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,355E-11, Sigmansy = 1,554E+02, Sigmansz = 2,730E-11  
 Taunspix = 3,210E+00, Taunspy = -1,394E-11, Taunspz = -1,909E+01  
 Taunssx = 7,566E-11, Taunssy = -2,261E+01, Taunssz = -3,584E-12  
 TaunTetapx = 1,779E+01, TaunTetapy = 4,150E-11, TaunTetapz = 6,552E-01  
 TaunTetasx = -1,719E-10, TaunTetasy = -1,063E+02, TaunTetasz = -2,581E-11

Teta = 144,00, Normal = 1,660E+02, Tang1 = -4,463E+01, Tang2 = -6,337E+01  
 Sigmanpx = -3,621E+01, Sigmanpy = 1,130E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -9,848E-12, Sigmansy = 2,133E+02, Sigmansz = 1,637E-11  
 Taunspix = 4,214E+00, Taunspy = -9,658E-12, Taunspz = -1,821E+01  
 Taunssx = 5,243E-11, Taunssy = -3,063E+01, Taunssz = -2,483E-12  
 TaunTetapx = 1,289E+01, TaunTetapy = 5,696E-11, TaunTetapz = 6,534E-01  
 TaunTetasx = -2,355E-10, TaunTetasy = -7,692E+01, TaunTetasz = -2,193E-11

Teta = 162,00, Normal = 1,968E+02, Tang1 = -4,769E+01, Tang2 = -3,313E+01  
 Sigmanpx = -4,257E+01, Sigmanpy = 5,939E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -5,178E-12, Sigmansy = 2,505E+02, Sigmansz = 7,438E-12  
 Taunspx = 4,753E+00, Taunspy = -4,871E-12, Taunspz = -1,747E+01  
 Taunssx = 2,644E-11, Taunssy = -3,498E+01, Taunssz = -1,253E-12  
 TaunTetapx = 6,762E+00, TaunTetapy = 6,682E-11, TaunTetapz = 4,030E-01  
 TaunTetasx = -2,758E-10, TaunTetasy = -4,030E+01, TaunTetasz = -1,948E-11  
  
 Teta = 180,00, Normal = 2,074E+02, Tang1 = -4,855E+01, Tang2 = -2,381E-10  
 Sigmanpx = -4,476E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 2,633E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
 Taunspx = 4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -1,718E+01  
 Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = -3,629E+01, Taunssz = 0,000E+00  
 TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = 7,020E-11, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = -2,896E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -1,864E-11  
  
 Teta = 198,00, Normal = 1,968E+02, Tang1 = -4,769E+01, Tang2 = 3,313E+01  
 Sigmanpx = -4,257E+01, Sigmanpy = -5,939E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 5,178E-12, Sigmansy = 2,505E+02, Sigmansz = -7,438E-12  
 Taunspx = 4,753E+00, Taunspy = 4,871E-12, Taunspz = -1,747E+01  
 Taunssx = -2,644E-11, Taunssy = -3,498E+01, Taunssz = 1,253E-12  
 TaunTetapx = -6,762E+00, TaunTetapy = 6,682E-11, TaunTetapz = -4,030E-01  
 TaunTetasx = -2,758E-10, TaunTetasy = 4,030E+01, TaunTetasz = -1,948E-11  
  
 Teta = 216,00, Normal = 1,660E+02, Tang1 = -4,463E+01, Tang2 = 6,337E+01  
 Sigmanpx = -3,621E+01, Sigmanpy = -1,130E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 9,848E-12, Sigmansy = 2,133E+02, Sigmansz = -1,637E-11  
 Taunspx = 4,214E+00, Taunspy = 9,658E-12, Taunspz = -1,821E+01  
 Taunssx = -5,243E-11, Taunssy = -3,063E+01, Taunssz = 2,483E-12  
 TaunTetapx = -1,289E+01, TaunTetapy = 5,696E-11, TaunTetapz = -6,534E-01  
 TaunTetasx = -2,355E-10, TaunTetasy = 7,692E+01, TaunTetasz = -2,193E-11

Teta = 234,00, Normal = 1,180E+02, Tang1 = -3,849E+01, Tang2 = 8,786E+01  
 Sigmanpx = -2,631E+01, Sigmanpy = -1,555E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,355E-11, Sigmansy = 1,554E+02, Sigmansz = -2,730E-11  
 Taunspx = 3,210E+00, Taunspy = 1,394E-11, Taunspz = -1,909E+01  
 Taunssx = -7,566E-11, Taunssy = -2,261E+01, Taunssz = 3,584E-12  
 TaunTetapx = -1,779E+01, TaunTetapy = 4,150E-11, TaunTetapz = -6,552E-01  
 TaunTetasx = -1,719E-10, TaunTetasy = 1,063E+02, TaunTetasz = -2,581E-11  
  
 Teta = 252,00, Normal = 5,748E+01, Tang1 = -2,904E+01, Tang2 = 1,040E+02  
 Sigmanpx = -1,383E+01, Sigmanpy = -1,828E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,593E-11, Sigmansy = 8,244E+01, Sigmansz = -3,916E-11  
 Taunspx = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -1,978E+01  
 Taunssx = -9,216E-11, Taunssy = -1,101E+01, Taunssz = 4,366E-12  
 TaunTetapx = -2,096E+01, TaunTetapy = 2,187E-11, TaunTetapz = -4,059E-01  
 TaunTetasx = -9,068E-11, TaunTetasy = 1,254E+02, TaunTetasz = -3,077E-11  
  
 Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -1,725E+01, Tang2 = 1,099E+02  
 Sigmanpx = 2,280E-10, Sigmanpy = -1,922E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,675E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -4,941E-11  
 Taunspx = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,004E+01  
 Taunssx = -9,818E-11, Taunssy = 2,791E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,206E+01, TaunTetapy = -3,490E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 1,433E-21, TaunTetasy = 1,320E+02, TaunTetasz = -3,637E-11  
  
 Teta = 288,00, Normal = -1,047E+02, Tang1 = -8,729E+00, Tang2 = 1,042E+02  
 Sigmanpx = 1,936E+01, Sigmanpy = -1,828E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,593E-11, Sigmansy = -1,130E+02, Sigmansz = -3,772E-11  
 Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = 1,755E-11, Taunspz = -2,045E+01  
 Taunssx = -9,529E-11, Taunssy = 1,301E+01, Taunssz = 4,514E-12  
 TaunTetapx = -2,099E+01, TaunTetapy = -2,967E-11, TaunTetapz = -4,816E-01  
 TaunTetasx = 1,219E-10, TaunTetasy = 1,257E+02, TaunTetasz = -4,397E-11

Teta = 306,00, Normal = -1,906E+02, Tang1 = -7,598E-01, Tang2 = 8,865E+01  
Sigmanpx = 3,683E+01, Sigmanpy = -1,555E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,355E-11, Sigmansy = -2,163E+02, Sigmansz = -2,496E-11  
Taunspx = -2,582E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,150E+01  
Taunssx = -8,520E-11, Taunssy = 2,332E+01, Taunssz = 4,036E-12  
TaunTetapx = -1,789E+01, TaunTetapy = -5,653E-11, TaunTetapz = -7,807E-01  
TaunTetasx = 2,325E-10, TaunTetasy = 1,073E+02, TaunTetasz = -5,081E-11

Teta = 324,00, Normal = -2,587E+02, Tang1 = 6,258E+00, Tang2 = 6,449E+01  
Sigmanpx = 5,070E+01, Sigmanpy = -1,130E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 9,848E-12, Sigmansy = -2,983E+02, Sigmansz = -1,403E-11  
Taunspx = -3,758E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,273E+01  
Taunssx = -6,545E-11, Taunssy = 3,275E+01, Taunssz = 3,101E-12  
TaunTetapx = -1,303E+01, TaunTetapy = -7,800E-11, TaunTetapz = -7,825E-01  
TaunTetasx = 3,213E-10, TaunTetasy = 7,830E+01, TaunTetasz = -5,624E-11

Teta = 342,00, Normal = -3,024E+02, Tang1 = 1,125E+01, Tang2 = 3,396E+01  
Sigmanpx = 5,960E+01, Sigmanpy = -5,939E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 5,178E-12, Sigmansy = -3,509E+02, Sigmansz = -5,992E-12  
Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = 6,607E-12, Taunspz = -2,369E+01  
Taunssx = -3,586E-11, Taunssy = 3,954E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -6,863E+00, TaunTetapy = -9,187E-11, TaunTetapz = -4,845E-01  
TaunTetasx = 3,789E-10, TaunTetasy = 4,130E+01, TaunTetasz = -5,974E-11

текущее положение плоскости сечения = 22,22 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора r = 2,940E-01

Teta = 0,00, Normal = -2,659E+02, Tang1 = 1,204E+01, Tang2 = 1,542E-10  
Sigmanpx = 6,975E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -3,246E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunspx = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,677E+01

Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,372E+01, Taunssz = 0,000E+00  
 TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,072E-10, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 3,531E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -9,162E-11  
 Teta = 18,00, Normal = -2,534E+02, Tang1 = 1,017E+01, Tang2 = -2,852E+01  
 Sigmanpx = 6,634E+01, Sigmanpy = 6,610E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -4,537E-12, Sigmansy = -3,086E+02, Sigmansz = 4,731E-13  
 Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = -6,607E-12, Taunspz = -2,637E+01  
 Taunssx = 3,708E-11, Taunssy = 4,114E+01, Taunssz = -1,699E-12  
 TaunTetapx = 7,593E+00, TaunTetapy = -1,019E-10, TaunTetapz = 4,863E-01  
 TaunTetasx = 3,353E-10, TaunTetasy = -3,660E+01, TaunTetasz = -9,030E-11  
 Teta = 36,00, Normal = -2,170E+02, Tang1 = 5,047E+00, Tang2 = -5,413E+01  
 Sigmanpx = 5,643E+01, Sigmanpy = 1,257E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -8,630E-12, Sigmansy = -2,623E+02, Sigmansz = 5,594E-12  
 Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,530E+01  
 Taunssx = 6,767E-11, Taunssy = 3,411E+01, Taunssz = -3,101E-12  
 TaunTetapx = 1,442E+01, TaunTetapy = -8,656E-11, TaunTetapz = 7,856E-01  
 TaunTetasx = 2,842E-10, TaunTetasy = -6,934E+01, TaunTetasz = -8,645E-11  
 Teta = 54,00, Normal = -1,603E+02, Tang1 = -2,165E+00, Tang2 = -7,437E+01  
 Sigmanpx = 4,100E+01, Sigmanpy = 1,730E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,188E-11, Sigmansy = -1,901E+02, Sigmansz = 1,776E-11  
 Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,393E+01  
 Taunssx = 8,809E-11, Taunssy = 2,435E+01, Taunssz = -4,036E-12  
 TaunTetapx = 1,981E+01, TaunTetapy = -6,277E-11, TaunTetapz = 7,840E-01  
 TaunTetasx = 2,055E-10, TaunTetasy = -9,496E+01, TaunTetasz = -8,046E-11  
 Teta = 72,00, Normal = -8,879E+01, Tang1 = -1,038E+01, Tang2 = -8,742E+01  
 Sigmanpx = 2,155E+01, Sigmanpy = 2,034E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,396E-11, Sigmansy = -9,922E+01, Sigmansz = 3,579E-11

Taunsp<sub>x</sub> = -1,292E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,756E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,276E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 9,851E-11, Taunss<sub>y</sub> = 1,368E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,514E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,325E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = -3,295E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,838E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 1,076E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,112E+02, TaunTetas<sub>z</sub> = -7,289E-11  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -1,920E+01, Tang2 = -9,221E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>y</sub> = 2,139E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -1,468E-11, Sigmans<sub>y</sub> = 1,549E+00, Sigmans<sub>z</sub> = 5,500E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,809E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,231E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 1,015E-10, Taunss<sub>y</sub> = 3,107E+00, Taunss<sub>z</sub> = -4,651E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,443E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,166E+02, TaunTetas<sub>z</sub> = -6,445E-11  
 Teta = 108,00, Normal = 4,555E+01, Tang1 = -3,143E+01, Tang2 = -8,717E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -1,540E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 2,034E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -1,396E-11, Sigmans<sub>y</sub> = 7,207E+01, Sigmans<sub>z</sub> = 3,836E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,202E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 9,528E-11, Taunss<sub>y</sub> = -1,116E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,366E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,322E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,415E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,079E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -8,024E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,108E+02, TaunTetas<sub>z</sub> = -5,829E-11  
 Teta = 126,00, Normal = 9,529E+01, Tang1 = -4,120E+01, Tang2 = -7,351E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -2,928E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,730E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -1,188E-11, Sigmans<sub>y</sub> = 1,357E+02, Sigmans<sub>z</sub> = 2,193E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,125E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 7,822E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,317E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 1,972E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,585E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,588E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -1,520E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -9,388E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -5,283E-11  
 Teta = 144,00, Normal = 1,348E+02, Tang1 = -4,752E+01, Tang2 = -5,292E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,031E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,257E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = -8,630E-12, Sigmansy = 1,862E+02, Sigmansz = 9,760E-12  
 Taunspx = 4,215E+00, Taunspy = -9,659E-12, Taunspz = -2,027E+01  
 Taunssx = 5,420E-11, Taunssy = -3,147E+01, Taunssz = -2,484E-12  
 TaunTetapx = 1,429E+01, TaunTetapy = 6,296E-11, TaunTetapz = 6,573E-01  
 TaunTetasx = -2,080E-10, TaunTetasy = -6,787E+01, TaunTetasz = -4,857E-11  
 Teta = 162,00, Normal = 1,601E+02, Tang1 = -5,066E+01, Tang2 = -2,762E+01  
 Sigmanpx = -4,738E+01, Sigmanpy = 6,610E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -4,537E-12, Sigmansy = 2,186E+02, Sigmansz = 3,048E-12  
 Taunspx = 4,753E+00, Taunspy = -4,872E-12, Taunspz = -1,944E+01  
 Taunssx = 2,734E-11, Taunssy = -3,597E+01, Taunssz = -1,253E-12  
 TaunTetapx = 7,501E+00, TaunTetapy = 7,388E-11, TaunTetapz = 4,055E-01  
 TaunTetasx = -2,435E-10, TaunTetasy = -3,553E+01, TaunTetasz = -4,588E-11  
 Teta = 180,00, Normal = 1,688E+02, Tang1 = -5,153E+01, Tang2 = -2,229E-10  
 Sigmanpx = -4,982E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 2,298E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
 Taunspx = 4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -1,912E+01  
 Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = -3,733E+01, Taunssz = 0,000E+00  
 TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = 7,763E-11, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = -2,556E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -4,496E-11  
 Teta = 198,00, Normal = 1,601E+02, Tang1 = -5,066E+01, Tang2 = 2,762E+01  
 Sigmanpx = -4,738E+01, Sigmanpy = -6,610E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 4,537E-12, Sigmansy = 2,186E+02, Sigmansz = -3,048E-12  
 Taunspx = 4,753E+00, Taunspy = 4,872E-12, Taunspz = -1,944E+01  
 Taunssx = -2,734E-11, Taunssy = -3,597E+01, Taunssz = 1,253E-12  
 TaunTetapx = -7,501E+00, TaunTetapy = 7,388E-11, TaunTetapz = -4,055E-01  
 TaunTetasx = -2,435E-10, TaunTetasy = 3,553E+01, TaunTetasz = -4,588E-11

Teta = 216,00, Normal = 1,348E+02, Tang1 = -4,752E+01, Tang2 = 5,292E+01  
 Sigmanpx = -4,031E+01, Sigmanpy = -1,257E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 8,630E-12, Sigmansy = 1,862E+02, Sigmansz = -9,760E-12  
 Taunspx = 4,215E+00, Taunspy = 9,659E-12, Taunspz = -2,027E+01  
 Taunssx = -5,420E-11, Taunssy = -3,147E+01, Taunssz = 2,484E-12  
 TaunTetapx = -1,429E+01, TaunTetapy = 6,296E-11, TaunTetapz = -6,573E-01  
 TaunTetasx = -2,080E-10, TaunTetasy = 6,787E+01, TaunTetasz = -4,857E-11  
  
 Teta = 234,00, Normal = 9,529E+01, Tang1 = -4,120E+01, Tang2 = 7,351E+01  
 Sigmanpx = -2,928E+01, Sigmanpy = -1,730E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,188E-11, Sigmansy = 1,357E+02, Sigmansz = -2,193E-11  
 Taunspx = 3,211E+00, Taunspy = 1,394E-11, Taunspz = -2,125E+01  
 Taunssx = -7,822E-11, Taunssy = -2,317E+01, Taunssz = 3,584E-12  
 TaunTetapx = -1,972E+01, TaunTetapy = 4,585E-11, TaunTetapz = -6,588E-01  
 TaunTetasx = -1,520E-10, TaunTetasy = 9,388E+01, TaunTetasz = -5,283E-11  
  
 Teta = 252,00, Normal = 4,555E+01, Tang1 = -3,143E+01, Tang2 = 8,717E+01  
 Sigmanpx = -1,540E+01, Sigmanpy = -2,034E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,396E-11, Sigmansy = 7,207E+01, Sigmansz = -3,836E-11  
 Taunspx = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,202E+01  
 Taunssx = -9,528E-11, Taunssy = -1,116E+01, Taunssz = 4,366E-12  
 TaunTetapx = -2,322E+01, TaunTetapy = 2,415E-11, TaunTetapz = -4,079E-01  
 TaunTetasx = -8,024E-11, TaunTetasy = 1,108E+02, TaunTetasz = -5,829E-11  
  
 Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -1,920E+01, Tang2 = 9,221E+01  
 Sigmanpx = 2,537E-10, Sigmanpy = -2,139E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,468E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,500E-11  
 Taunspx = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,231E+01  
 Taunssx = -1,015E-10, Taunssy = 3,107E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,443E+01, TaunTetapy = -3,877E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 1,265E-21, TaunTetasy = 1,166E+02, TaunTetasz = -6,445E-11

Teta = 288,00, Normal = -8,879E+01, Tang1 = -1,038E+01, Tang2 = 8,742E+01  
 Sigmanpx = 2,155E+01, Sigmanpy = -2,034E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,396E-11, Sigmansy = -9,922E+01, Sigmansz = -3,579E-11  
 Taunspix = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,276E+01  
 Taunssx = -9,851E-11, Taunssy = 1,368E+01, Taunssz = 4,514E-12  
 TaunTetapx = -2,325E+01, TaunTetapy = -3,295E-11, TaunTetapz = -4,838E-01  
 TaunTetasx = 1,076E-10, TaunTetasy = 1,112E+02, TaunTetasz = -7,289E-11  
  
 Teta = 306,00, Normal = -1,603E+02, Tang1 = -2,165E+00, Tang2 = 7,437E+01  
 Sigmanpx = 4,100E+01, Sigmanpy = -1,730E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,188E-11, Sigmansy = -1,901E+02, Sigmansz = -1,776E-11  
 Taunspix = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,393E+01  
 Taunssx = -8,809E-11, Taunssy = 2,435E+01, Taunssz = 4,036E-12  
 TaunTetapx = -1,981E+01, TaunTetapy = -6,277E-11, TaunTetapz = -7,840E-01  
 TaunTetasx = 2,055E-10, TaunTetasy = 9,496E+01, TaunTetasz = -8,046E-11  
  
 Teta = 324,00, Normal = -2,170E+02, Tang1 = 5,047E+00, Tang2 = 5,413E+01  
 Sigmanpx = 5,643E+01, Sigmanpy = -1,257E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 8,630E-12, Sigmansy = -2,623E+02, Sigmansz = -5,594E-12  
 Taunspix = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,530E+01  
 Taunssx = -6,767E-11, Taunssy = 3,411E+01, Taunssz = 3,101E-12  
 TaunTetapx = -1,442E+01, TaunTetapy = -8,656E-11, TaunTetapz = -7,856E-01  
 TaunTetasx = 2,842E-10, TaunTetasy = 6,934E+01, TaunTetasz = -8,645E-11  
  
 Teta = 342,00, Normal = -2,534E+02, Tang1 = 1,017E+01, Tang2 = 2,852E+01  
 Sigmanpx = 6,634E+01, Sigmanpy = -6,610E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 4,537E-12, Sigmansy = -3,086E+02, Sigmansz = -4,731E-13  
 Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = 6,607E-12, Taunspz = -2,637E+01  
 Taunssx = -3,708E-11, Taunssy = 4,114E+01, Taunssz = 1,699E-12  
 TaunTetapx = -7,593E+00, TaunTetapy = -1,019E-10, TaunTetapz = -4,863E-01  
 TaunTetasx = 3,353E-10, TaunTetasy = 3,660E+01, TaunTetasz = -9,030E-11

текущее положение плоскости сечения = 33,33 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора  $r = 3,975E-01$

Teta = 0,00, Normal = -1,858E+02, Tang1 = 1,189E+01, Tang2 = 4,381E-11

Sigmanpx = 7,230E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -2,469E+02, Sigmansz = 0,000E+00

Taunspx = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,775E+01

Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,455E+01, Taunssz = 0,000E+00

TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,110E-10, TaunTetapz = 0,000E+00

TaunTetasx = 2,731E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -1,182E-10

Teta = 18,00, Normal = -1,771E+02, Tang1 = 9,990E+00, Tang2 = -2,012E+01

Sigmanpx = 6,876E+01, Sigmanpy = 6,852E-11, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = -3,433E-12, Sigmansy = -2,348E+02, Sigmansz = -5,540E-12

Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = -6,607E-12, Taunspz = -2,733E+01

Taunssx = 3,772E-11, Taunssy = 4,193E+01, Taunssz = -1,699E-12

TaunTetapx = 7,857E+00, TaunTetapy = -1,055E-10, TaunTetapz = 4,868E-01

TaunTetasx = 2,592E-10, TaunTetasy = -2,847E+01, TaunTetasz = -1,169E-10

Teta = 36,00, Normal = -1,521E+02, Tang1 = 4,783E+00, Tang2 = -3,814E+01

Sigmanpx = 5,849E+01, Sigmanpy = 1,303E-10, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = -6,529E-12, Sigmansy = -1,995E+02, Sigmansz = -3,959E-12

Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,623E+01

Taunssx = 6,886E-11, Taunssy = 3,477E+01, Taunssz = -3,101E-12

TaunTetapx = 1,492E+01, TaunTetapy = -8,966E-11, TaunTetapz = 7,864E-01

TaunTetasx = 2,193E-10, TaunTetasy = -5,384E+01, TaunTetasz = -1,129E-10

Teta = 54,00, Normal = -1,131E+02, Tang1 = -2,552E+00, Tang2 = -5,230E+01

Sigmanpx = 4,250E+01, Sigmanpy = 1,794E-10, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = -8,987E-12, Sigmansy = -1,445E+02, Sigmansz = 8,654E-12

Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,481E+01

Taunssx = 8,962E-11, Taunssy = 2,484E+01, Taunssz = -4,036E-12  
 TaunTetapx = 2,050E+01, TaunTetapy = -6,502E-11, TaunTetapz = 7,850E-01  
 TaunTetasx = 1,583E-10, TaunTetasy = -7,359E+01, TaunTetasz = -1,067E-10  
 Teta = 72,00, Normal = -6,402E+01, Tang1 = -1,091E+01, Tang2 = -6,145E+01  
 Sigmanpx = 2,234E+01, Sigmanpy = 2,109E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,056E-11, Sigmansy = -7,524E+01, Sigmansz = 3,106E-11  
 Taunspix = -1,292E+00, Taunspy = -1,756E-11, Taunspz = -2,360E+01  
 Taunssx = 1,002E-10, Taunssy = 1,398E+01, Taunssz = -4,514E-12  
 TaunTetapx = 2,407E+01, TaunTetapy = -3,413E-11, TaunTetapz = 4,845E-01  
 TaunTetasx = 8,278E-11, TaunTetasy = -8,600E+01, TaunTetasz = -9,894E-11  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -1,990E+01, Tang2 = -6,488E+01  
 Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 2,217E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,111E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 5,701E-11  
 Taunspix = 0,000E+00, Taunspy = -1,809E-11, Taunspz = -2,312E+01  
 Taunssx = 1,033E-10, Taunssy = 3,221E+00, Taunssz = -4,651E-12  
 TaunTetapx = 2,529E+01, TaunTetapy = 0,000E+00, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 0,000E+00, TaunTetasy = -9,017E+01, TaunTetasz = -9,021E-11  
 Teta = 108,00, Normal = 2,735E+01, Tang1 = -3,238E+01, Tang2 = -6,117E+01  
 Sigmanpx = -1,596E+01, Sigmanpy = 2,109E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,056E-11, Sigmansy = 5,443E+01, Sigmansz = 3,467E-11  
 Taunspix = 1,749E+00, Taunspy = -1,698E-11, Taunspz = -2,282E+01  
 Taunssx = 9,694E-11, Taunssy = -1,130E+01, Taunssz = -4,366E-12  
 TaunTetapx = 2,404E+01, TaunTetapy = 2,497E-11, TaunTetapz = 4,085E-01  
 TaunTetasx = -6,240E-11, TaunTetasy = -8,561E+01, TaunTetasz = -8,385E-11  
 Teta = 126,00, Normal = 6,065E+01, Tang1 = -4,233E+01, Tang2 = -5,135E+01  
 Sigmanpx = -3,036E+01, Sigmanpy = 1,794E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -8,987E-12, Sigmansy = 1,021E+02, Sigmansz = 1,449E-11

Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,203E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 7,959E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,351E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,041E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,742E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,598E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -1,180E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -7,242E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -7,823E-11  
 Teta=144,00, Normal= 8,709E+01, Tang1=-4,876E+01, Tang2=-3,678E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub>= -4,178E+01, Sigmanp<sub>y</sub>= 1,303E-10, Sigmanp<sub>z</sub>= -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub>= -6,529E-12, Sigmans<sub>y</sub>= 1,400E+02, Sigmans<sub>z</sub>= 1,881E-12  
 Taunsp<sub>x</sub>= 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub>= -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub>= -2,101E+01  
 Taunss<sub>x</sub>= 5,515E-11, Taunss<sub>y</sub>= -3,197E+01, Taunss<sub>z</sub>= -2,484E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub>= 1,480E+01, TaunTetap<sub>y</sub>= 6,513E-11, TaunTetap<sub>z</sub>= 6,584E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub>=-1,612E-10, TaunTetas<sub>y</sub>=-5,224E+01, TaunTetas<sub>z</sub>=-7,386E-11  
 Teta = 162,00, Normal = 1,041E+02, Tang1 = -5,194E+01, Tang2 = -1,913E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,912E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 6,852E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -3,433E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 1,643E+02, Sigmans<sub>z</sub> = -1,931E-12  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,015E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 2,781E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,654E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 7,768E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,644E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,063E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -1,883E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,730E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -7,111E-11  
 Teta = 180,00, Normal = 1,099E+02, Tang1 = -5,283E+01, Tang2 = -1,874E-10  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,164E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 0,000E+00, Sigmans<sub>y</sub> = 1,727E+02, Sigmans<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -1,982E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,793E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,032E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -1,975E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -7,017E-11  
 Teta = 198,00, Normal = 1,041E+02, Tang1 = -5,194E+01, Tang2 = 1,913E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,912E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -6,852E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = 3,433E-12, Sigmansy = 1,643E+02, Sigmansz = 1,931E-12  
Taunspx = 4,753E+00, Taunspy = 4,872E-12, Taunspz = -2,015E+01  
Taunssx = -2,781E-11, Taunssy = -3,654E+01, Taunssz = 1,253E-12  
TaunTetapx = -7,768E+00, TaunTetapy = 7,644E-11, TaunTetapz = -4,063E-01  
TaunTetasx = -1,883E-10, TaunTetasy = 2,730E+01, TaunTetasz = -7,111E-11  
Teta = 216,00, Normal = 8,709E+01, Tang1 = -4,876E+01, Tang2 = 3,678E+01  
Sigmanpx = -4,178E+01, Sigmanpy = -1,303E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 6,529E-12, Sigmansy = 1,400E+02, Sigmansz = -1,881E-12  
Taunspx = 4,215E+00, Taunspy = 9,660E-12, Taunspz = -2,101E+01  
Taunssx = -5,515E-11, Taunssy = -3,197E+01, Taunssz = 2,484E-12  
TaunTetapx = -1,480E+01, TaunTetapy = 6,513E-11, TaunTetapz = -6,584E-01  
TaunTetasx = -1,612E-10, TaunTetasy = 5,224E+01, TaunTetasz = -7,386E-11  
Teta = 234,00, Normal = 6,065E+01, Tang1 = -4,233E+01, Tang2 = 5,135E+01  
Sigmanpx = -3,036E+01, Sigmanpy = -1,794E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 8,987E-12, Sigmansy = 1,021E+02, Sigmansz = -1,449E-11  
Taunspx = 3,211E+00, Taunspy = 1,394E-11, Taunspz = -2,203E+01  
Taunssx = -7,959E-11, Taunssy = -2,351E+01, Taunssz = 3,584E-12  
TaunTetapx = -2,041E+01, TaunTetapy = 4,742E-11, TaunTetapz = -6,598E-01  
TaunTetasx = -1,180E-10, TaunTetasy = 7,242E+01, TaunTetasz = -7,823E-11  
Teta = 252,00, Normal = 2,735E+01, Tang1 = -3,238E+01, Tang2 = 6,117E+01  
Sigmanpx = -1,596E+01, Sigmanpy = -2,109E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,056E-11, Sigmansy = 5,443E+01, Sigmansz = -3,467E-11  
Taunspx = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,282E+01  
Taunssx = -9,694E-11, Taunssy = -1,130E+01, Taunssz = 4,366E-12  
TaunTetapx = -2,404E+01, TaunTetapy = 2,497E-11, TaunTetapz = -4,085E-01  
TaunTetasx = -6,240E-11, TaunTetasy = 8,561E+01, TaunTetasz = -8,385E-11

Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -1,990E+01, Tang2 = 6,488E+01  
Sigmanpx = 2,630E-10, Sigmanpy = -2,217E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,111E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,701E-11  
Taunspx = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,312E+01  
Taunssx = -1,033E-10, Taunssy = 3,221E+00, Taunssz = 4,651E-12  
TaunTetapx = -2,529E+01, TaunTetapy = -4,016E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = 9,725E-22, TaunTetasy = 9,017E+01, TaunTetasz = -9,021E-11

Teta = 288,00, Normal = -6,402E+01, Tang1 = -1,091E+01, Tang2 = 6,145E+01  
Sigmanpx = 2,234E+01, Sigmanpy = -2,109E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,056E-11, Sigmansy = -7,524E+01, Sigmansz = -3,106E-11  
Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,360E+01  
Taunssx = -1,002E-10, Taunssy = 1,398E+01, Taunssz = 4,514E-12  
TaunTetapx = -2,407E+01, TaunTetapy = -3,413E-11, TaunTetapz = -4,845E-01  
TaunTetasx = 8,278E-11, TaunTetasy = 8,600E+01, TaunTetasz = -9,894E-11

Teta = 306,00, Normal = -1,131E+02, Tang1 = -2,552E+00, Tang2 = 5,230E+01  
Sigmanpx = 4,250E+01, Sigmanpy = -1,794E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 8,987E-12, Sigmansy = -1,445E+02, Sigmansz = -8,654E-12  
Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,481E+01  
Taunssx = -8,962E-11, Taunssy = 2,484E+01, Taunssz = 4,036E-12  
TaunTetapx = -2,050E+01, TaunTetapy = -6,502E-11, TaunTetapz = -7,850E-01  
TaunTetasx = 1,583E-10, TaunTetasy = 7,359E+01, TaunTetasz = -1,067E-10

Teta = 324,00, Normal = -1,521E+02, Tang1 = 4,783E+00, Tang2 = 3,814E+01  
Sigmanpx = 5,849E+01, Sigmanpy = -1,303E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 6,529E-12, Sigmansy = -1,995E+02, Sigmansz = 3,959E-12  
Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,623E+01  
Taunssx = -6,886E-11, Taunssy = 3,477E+01, Taunssz = 3,101E-12  
TaunTetapx = -1,492E+01, TaunTetapy = -8,966E-11, TaunTetapz = -7,864E-01  
TaunTetasx = 2,193E-10, TaunTetasy = 5,384E+01, TaunTetasz = -1,129E-10

Teta = 342,00, Normal = -1,771E+02, Tang1 = 9,990E+00, Tang2 = 2,012E+01  
Sigmanpx = 6,876E+01, Sigmanpy = -6,852E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 3,433E-12, Sigmansy = -2,348E+02, Sigmansz = 5,540E-12  
Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = 6,607E-12, Taunspz = -2,733E+01  
Taunssx = -3,772E-11, Taunssy = 4,193E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -7,857E+00, TaunTetapy = -1,055E-10, TaunTetapz = -4,868E-01  
TaunTetasx = 2,592E-10, TaunTetasy = 2,847E+01, TaunTetasz = -1,169E-10

текущее положение плоскости сечения = 44,44 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора r = 4,985E-01

Teta = 0,00, Normal = -9,767E+01, Tang1 = 1,192E+01, Tang2 = -7,268E-11  
Sigmanpx = 7,352E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -1,601E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunspix = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,821E+01  
Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,505E+01, Taunssz = 0,000E+00  
TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,129E-10, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = 1,835E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -1,433E-10

Teta = 18,00, Normal = -9,336E+01, Tang1 = 1,000E+01, Tang2 = -1,090E+01  
Sigmanpx = 6,992E+01, Sigmanpy = 6,967E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -2,198E-12, Sigmansy = -1,522E+02, Sigmansz = -1,162E-11  
Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = -6,608E-12, Taunspz = -2,779E+01  
Taunssx = 3,813E-11, Taunssy = 4,240E+01, Taunssz = -1,699E-12  
TaunTetapx = 7,982E+00, TaunTetapy = -1,073E-10, TaunTetapz = 4,870E-01  
TaunTetasx = 1,740E-10, TaunTetasy = -1,937E+01, TaunTetasz = -1,420E-10

Teta = 36,00, Normal = -8,085E+01, Tang1 = 4,735E+00, Tang2 = -2,056E+01  
Sigmanpx = 5,948E+01, Sigmanpy = 1,325E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -4,182E-12, Sigmansy = -1,292E+02, Sigmansz = -1,370E-11  
Taunspix = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,667E+01

Taunssx = 6,959E-11, Taunssy = 3,516E+01, Taunssz = -3,101E-12  
 TaunTetapx = 1,516E+01, TaunTetapy = -9,113E-11, TaunTetapz = 7,868E-01  
 TaunTetasx = 1,467E-10, TaunTetasy = -3,651E+01, TaunTetasz = -1,380E-10  
 Teta = 54,00, Normal = -6,136E+01, Tang1 = -2,683E+00, Tang2 = -2,807E+01  
 Sigmanpx = 4,321E+01, Sigmanpy = 1,824E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -5,755E-12, Sigmansy = -9,344E+01, Sigmansz = -8,798E-13  
 Taunspz = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,522E+01  
 Taunssx = 9,058E-11, Taunssy = 2,512E+01, Taunssz = -4,036E-12  
 TaunTetapx = 2,083E+01, TaunTetapy = -6,609E-11, TaunTetapz = 7,855E-01  
 TaunTetasx = 1,054E-10, TaunTetasy = -4,969E+01, TaunTetasz = -1,317E-10  
 Teta = 72,00, Normal = -3,680E+01, Tang1 = -1,114E+01, Tang2 = -3,292E+01  
 Sigmanpx = 2,272E+01, Sigmanpy = 2,144E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -6,766E-12, Sigmansy = -4,839E+01, Sigmansz = 2,560E-11  
 Taunspz = -1,292E+00, Taunspy = -1,756E-11, Taunspz = -2,399E+01  
 Taunssx = 1,013E-10, Taunssy = 1,415E+01, Taunssz = -4,514E-12  
 TaunTetapx = 2,446E+01, TaunTetapy = -3,470E-11, TaunTetapz = 4,848E-01  
 TaunTetasx = 5,495E-11, TaunTetasy = -5,786E+01, TaunTetasz = -1,238E-10  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,024E+01, Tang2 = -3,487E+01  
 Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 2,255E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -7,114E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 5,797E-11  
 Taunspz = 0,000E+00, Taunspy = -1,809E-11, Taunspz = -2,351E+01  
 Taunssx = 1,044E-10, Taunssy = 3,275E+00, Taunssz = -4,651E-12  
 TaunTetapx = 2,570E+01, TaunTetapy = 0,000E+00, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 0,000E+00, TaunTetasy = -6,057E+01, TaunTetasz = -1,150E-10  
 Teta = 108,00, Normal = 7,402E+00, Tang1 = -3,286E+01, Tang2 = -3,260E+01  
 Sigmanpx = -1,623E+01, Sigmanpy = 2,144E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -6,766E-12, Sigmansy = 3,475E+01, Sigmansz = 3,021E-11

Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,321E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 9,798E-11, Taunss<sub>y</sub> = -1,140E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,366E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,443E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,537E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,087E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -4,249E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -5,744E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,085E-10  
 Teta = 126,00, Normal = 2,272E+01, Tang1 = -4,293E+01, Tang2 = -2,701E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -3,087E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,824E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -5,755E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 6,471E+01, Sigmans<sub>z</sub> = 6,566E-12  
 Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,240E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 8,044E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,375E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,075E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,817E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,603E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -8,003E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -4,841E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,028E-10  
 Teta = 144,00, Normal = 3,487E+01, Tang1 = -4,944E+01, Tang2 = -1,906E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,248E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,325E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -4,182E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 8,848E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -6,259E-12  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,136E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 5,574E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,229E+01, Taunss<sub>z</sub> = -2,484E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 1,504E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,617E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,589E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -1,088E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -3,476E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -9,844E-11  
 Teta = 162,00, Normal = 4,267E+01, Tang1 = -5,266E+01, Tang2 = -9,795E+00  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,994E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 6,967E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -2,198E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 1,037E+02, Sigmans<sub>z</sub> = -7,013E-12  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,049E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 2,811E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,692E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 7,895E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,766E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,066E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -1,267E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,810E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -9,567E-11  
 Teta = 180,00, Normal = 4,536E+01, Tang1 = -5,355E+01, Tang2 = -1,458E-10  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,251E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 1,090E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -2,015E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,832E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,160E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetas<sub>x</sub> = -1,327E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -9,473E-11  
Teta = 198,00, Normal = 4,267E+01, Tang1 = -5,266E+01, Tang2 = 9,795E+00  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,994E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -6,967E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = 2,198E-12, Sigmansy = 1,037E+02, Sigmansz = 7,013E-12  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,049E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -2,811E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,692E+01, Taunss<sub>z</sub> = 1,253E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -7,895E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,766E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,066E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = -1,267E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,810E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -9,567E-11  
Teta = 216,00, Normal = 3,487E+01, Tang1 = -4,944E+01, Tang2 = 1,906E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,248E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,325E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = 4,182E-12, Sigmansy = 8,848E+01, Sigmansz = 6,259E-12  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,136E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -5,574E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,229E+01, Taunss<sub>z</sub> = 2,484E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -1,504E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,617E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,589E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = -1,088E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 3,476E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -9,844E-11  
Teta = 234,00, Normal = 2,272E+01, Tang1 = -4,293E+01, Tang2 = 2,701E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -3,087E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,824E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = 5,755E-12, Sigmansy = 6,471E+01, Sigmansz = -6,566E-12  
Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,240E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -8,044E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,375E+01, Taunss<sub>z</sub> = 3,584E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -2,075E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,817E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,603E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = -8,003E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = 4,841E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,028E-10

Teta = 252,00, Normal = 7,402E+00, Tang1 = -3,286E+01, Tang2 = 3,260E+01  
Sigmanpx = -1,623E+01, Sigmanpy = -2,144E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 6,766E-12, Sigmansy = 3,475E+01, Sigmansz = -3,021E-11  
Taunspix = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,321E+01  
Taunssx = -9,798E-11, Taunssy = -1,140E+01, Taunssz = 4,366E-12  
TaunTetapx = -2,443E+01, TaunTetapy = 2,537E-11, TaunTetapz = -4,087E-01  
TaunTetasx = -4,249E-11, TaunTetasy = 5,744E+01, TaunTetasz = -1,085E-10

Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,024E+01, Tang2 = 3,487E+01  
Sigmanpx = 2,675E-10, Sigmanpy = -2,255E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 7,114E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,797E-11  
Taunspix = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,351E+01  
Taunssx = -1,044E-10, Taunssy = 3,275E+00, Taunssz = 4,651E-12  
TaunTetapx = -2,570E+01, TaunTetapy = -4,083E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = 6,447E-22, TaunTetasy = 6,057E+01, TaunTetasz = -1,150E-10

Teta = 288,00, Normal = -3,680E+01, Tang1 = -1,114E+01, Tang2 = 3,292E+01  
Sigmanpx = 2,272E+01, Sigmanpy = -2,144E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 6,766E-12, Sigmansy = -4,839E+01, Sigmansz = -2,560E-11  
Taunspix = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,399E+01  
Taunssx = -1,013E-10, Taunssy = 1,415E+01, Taunssz = 4,514E-12  
TaunTetapx = -2,446E+01, TaunTetapy = -3,470E-11, TaunTetapz = -4,848E-01  
TaunTetasx = 5,495E-11, TaunTetasy = 5,786E+01, TaunTetasz = -1,238E-10

Teta = 306,00, Normal = -6,136E+01, Tang1 = -2,683E+00, Tang2 = 2,807E+01  
Sigmanpx = 4,321E+01, Sigmanpy = -1,824E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 5,755E-12, Sigmansy = -9,344E+01, Sigmansz = 8,798E-13  
Taunspix = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,522E+01  
Taunssx = -9,058E-11, Taunssy = 2,512E+01, Taunssz = 4,036E-12  
TaunTetapx = -2,083E+01, TaunTetapy = -6,609E-11, TaunTetapz = -7,855E-01  
TaunTetasx = 1,054E-10, TaunTetasy = 4,969E+01, TaunTetasz = -1,317E-10

Teta = 324,00, Normal = -8,085E+01, Tang1 = 4,735E+00, Tang2 = 2,056E+01  
Sigmanpx = 5,948E+01, Sigmanpy = -1,325E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 4,182E-12, Sigmansy = -1,292E+02, Sigmansz = 1,370E-11  
Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,667E+01  
Taunssx = -6,959E-11, Taunssy = 3,516E+01, Taunssz = 3,101E-12  
TaunTetapx = -1,516E+01, TaunTetapy = -9,113E-11, TaunTetapz = -7,868E-01  
TaunTetasx = 1,467E-10, TaunTetasy = 3,651E+01, TaunTetasz = -1,380E-10

Teta = 342,00, Normal = -9,336E+01, Tang1 = 1,000E+01, Tang2 = 1,090E+01  
Sigmanpx = 6,992E+01, Sigmanpy = -6,967E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 2,198E-12, Sigmansy = -1,522E+02, Sigmansz = 1,162E-11  
Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = 6,608E-12, Taunspz = -2,779E+01  
Taunssx = -3,813E-11, Taunssy = 4,240E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -7,982E+00, TaunTetapy = -1,073E-10, TaunTetapz = -4,870E-01  
TaunTetasx = 1,740E-10, TaunTetasy = 1,937E+01, TaunTetasz = -1,420E-10

текущее положение плоскости сечения = 55,55 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора r = 5,982E-01

Teta = 0,00, Normal = -6,592E+00, Tang1 = 1,200E+01, Tang2 = -1,913E-10  
Sigmanpx = 7,419E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -6,966E+01, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunspx = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,847E+01  
Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,538E+01, Taunssz = 0,000E+00  
TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,139E-10, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = 9,026E-11, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -1,677E-10

Teta = 18,00, Normal = -6,738E+00, Tang1 = 1,006E+01, Tang2 = -1,356E+00  
Sigmanpx = 7,056E+01, Sigmanpy = 7,031E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -9,148E-13, Sigmansy = -6,617E+01, Sigmansz = -1,768E-11  
Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = -6,608E-12, Taunspz = -2,805E+01

Taunssx = 3,840E-11, Taunssy = 4,271E+01, Taunssz = -1,699E-12  
 TaunTetapx = 8,052E+00, TaunTetapy = -1,082E-10, TaunTetapz = 4,871E-01  
 TaunTetasx = 8,522E-11, TaunTetasy = -9,895E+00, TaunTetasz = -1,663E-10  
 Teta = 36,00, Normal = -7,161E+00, Tang1 = 4,751E+00, Tang2 = -2,389E+00  
 Sigmanpx = 6,002E+01, Sigmanpy = 1,337E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,740E-12, Sigmansy = -5,606E+01, Sigmansz = -2,348E-11  
 Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,692E+01  
 Taunssx = 7,009E-11, Taunssy = 3,543E+01, Taunssz = -3,101E-12  
 TaunTetapx = 1,530E+01, TaunTetapy = -9,194E-11, TaunTetapz = 7,870E-01  
 TaunTetasx = 7,111E-11, TaunTetasy = -1,847E+01, TaunTetasz = -1,623E-10  
 Teta = 54,00, Normal = -7,821E+00, Tang1 = -2,727E+00, Tang2 = -3,018E+00  
 Sigmanpx = 4,361E+01, Sigmanpy = 1,841E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -2,395E-12, Sigmansy = -4,031E+01, Sigmansz = -1,054E-11  
 Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,545E+01  
 Taunssx = 9,123E-11, Taunssy = 2,531E+01, Taunssz = -4,036E-12  
 TaunTetapx = 2,102E+01, TaunTetapy = -6,669E-11, TaunTetapz = 7,857E-01  
 TaunTetasx = 5,043E-11, TaunTetasy = -2,482E+01, TaunTetasz = -1,561E-10  
 Teta = 72,00, Normal = -8,653E+00, Tang1 = -1,125E+01, Tang2 = -3,427E+00  
 Sigmanpx = 2,293E+01, Sigmanpy = 2,164E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -2,815E-12, Sigmansy = -2,046E+01, Sigmansz = 1,988E-11  
 Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = -1,756E-11, Taunspz = -2,421E+01  
 Taunssx = 1,020E-10, Taunssy = 1,426E+01, Taunssz = -4,514E-12  
 TaunTetapx = 2,467E+01, TaunTetapy = -3,501E-11, TaunTetapz = 4,849E-01  
 TaunTetasx = 2,599E-11, TaunTetasy = -2,858E+01, TaunTetasz = -1,481E-10  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,042E+01, Tang2 = -3,842E+00  
 Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 2,275E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -2,960E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 5,850E-11

Taunsp<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,809E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,373E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 1,051E-10, Taunss<sub>y</sub> = 3,305E+00, Taunss<sub>z</sub> = -4,651E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,593E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,977E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,392E-10  
 Teta = 108,00, Normal = -1,320E+01, Tang1 = -3,315E+01, Tang2 = -3,078E+00  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -1,638E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 2,164E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -2,815E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 1,430E+01, Sigmans<sub>z</sub> = 2,545E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,342E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 9,868E-11, Taunss<sub>y</sub> = -1,148E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,366E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,464E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,558E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,089E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -2,177E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,813E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,327E-10  
 Teta = 126,00, Normal = -1,646E+01, Tang1 = -4,330E+01, Tang2 = -1,850E+00  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -3,115E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,841E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -2,395E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 2,581E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -1,518E-12  
 Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,260E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 8,102E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,391E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,093E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,859E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,605E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -4,056E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,344E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,270E-10  
 Teta = 144,00, Normal = -1,905E+01, Tang1 = -4,986E+01, Tang2 = -7,434E-01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,287E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,337E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = -1,740E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 3,494E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -1,446E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,156E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 5,614E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,252E+01, Taunss<sub>z</sub> = -2,484E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 1,518E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,674E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,592E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -5,439E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,658E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,226E-10  
 Teta = 162,00, Normal = -2,072E+01, Tang1 = -5,310E+01, Tang2 = -1,498E-01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,040E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 7,031E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = -9,148E-13, Sigmansy = 4,081E+01, Sigmansz = -1,211E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,068E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 2,831E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,718E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 7,966E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,833E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,068E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -6,257E-11, TaunTetasy = -8,522E+00, TaunTetasz = -1,198E-10  
 Teta = 180,00, Normal = -2,129E+01, Tang1 = -5,401E+01, Tang2 = -1,018E-10  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,299E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 4,283E+01, Sigmansz = 0,000E+00  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -2,034E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,859E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,231E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -6,525E-11, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -1,189E-10  
 Teta = 198,00, Normal = -2,072E+01, Tang1 = -5,310E+01, Tang2 = 1,498E-01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,040E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -7,031E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmansx = 9,148E-13, Sigmansy = 4,081E+01, Sigmansz = 1,211E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,068E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = -2,831E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,718E+01, Taunss<sub>z</sub> = 1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = -7,966E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,833E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,068E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -6,257E-11, TaunTetasy = 8,522E+00, TaunTetasz = -1,198E-10  
 Teta = 216,00, Normal = -1,905E+01, Tang1 = -4,986E+01, Tang2 = 7,434E-01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,287E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,337E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmansx = 1,740E-12, Sigmansy = 3,494E+01, Sigmansz = 1,446E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,156E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = -5,614E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,252E+01, Taunss<sub>z</sub> = 2,484E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = -1,518E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,674E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,592E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -5,439E-11, TaunTetasy = 1,658E+01, TaunTetasz = -1,226E-10

Teta = 234,00, Normal = -1,646E+01, Tang1 = -4,330E+01, Tang2 = 1,850E+00  
 Sigmanpx = -3,115E+01, Sigmanpy = -1,841E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 2,395E-12, Sigmansy = 2,581E+01, Sigmansz = 1,518E-12  
 Taunspx = 3,211E+00, Taunspy = 1,394E-11, Taunspz = -2,260E+01  
 Taunssx = -8,102E-11, Taunssy = -2,391E+01, Taunssz = 3,584E-12  
 TaunTetapx = -2,093E+01, TaunTetapy = 4,859E-11, TaunTetapz = -6,605E-01  
 TaunTetasx = -4,056E-11, TaunTetasy = 2,344E+01, TaunTetasz = -1,270E-10  
  
 Teta = 252,00, Normal = -1,320E+01, Tang1 = -3,315E+01, Tang2 = 3,078E+00  
 Sigmanpx = -1,638E+01, Sigmanpy = -2,164E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 2,815E-12, Sigmansy = 1,430E+01, Sigmansz = -2,545E-11  
 Taunspx = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,342E+01  
 Taunssx = -9,868E-11, Taunssy = -1,148E+01, Taunssz = 4,366E-12  
 TaunTetapx = -2,464E+01, TaunTetapy = 2,558E-11, TaunTetapz = -4,089E-01  
 TaunTetasx = -2,177E-11, TaunTetasy = 2,813E+01, TaunTetasz = -1,327E-10  
  
 Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,042E+01, Tang2 = 3,842E+00  
 Sigmanpx = 2,699E-10, Sigmanpy = -2,275E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 2,960E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,850E-11  
 Taunspx = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,373E+01  
 Taunssx = -1,051E-10, Taunssy = 3,305E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,593E+01, TaunTetapy = -4,120E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 3,036E-22, TaunTetasy = 2,977E+01, TaunTetasz = -1,392E-10  
  
 Teta = 288,00, Normal = -8,653E+00, Tang1 = -1,125E+01, Tang2 = 3,427E+00  
 Sigmanpx = 2,293E+01, Sigmanpy = -2,164E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 2,815E-12, Sigmansy = -2,046E+01, Sigmansz = -1,988E-11  
 Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,421E+01  
 Taunssx = -1,020E-10, Taunssy = 1,426E+01, Taunssz = 4,514E-12  
 TaunTetapx = -2,467E+01, TaunTetapy = -3,501E-11, TaunTetapz = -4,849E-01  
 TaunTetasx = 2,599E-11, TaunTetasy = 2,858E+01, TaunTetasz = -1,481E-10

Teta = 306,00, Normal = -7,821E+00, Tang1 = -2,727E+00, Tang2 = 3,018E+00  
Sigmanpx = 4,361E+01, Sigmanpy = -1,841E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 2,395E-12, Sigmansy = -4,031E+01, Sigmansz = 1,054E-11  
Taunspz = -2,545E+01  
Taunssx = -9,123E-11, Taunssy = 2,531E+01, Taunssz = 4,036E-12  
TaunTetapx = -2,102E+01, TaunTetapy = -6,669E-11, TaunTetapz = -7,857E-01  
TaunTetasx = 5,043E-11, TaunTetasy = 2,482E+01, TaunTetasz = -1,561E-10

Teta = 324,00, Normal = -7,161E+00, Tang1 = 4,751E+00, Tang2 = 2,389E+00  
Sigmanpx = 6,002E+01, Sigmanpy = -1,337E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,740E-12, Sigmansy = -5,606E+01, Sigmansz = 2,348E-11  
Taunspz = -2,692E+01  
Taunssx = -7,009E-11, Taunssy = 3,543E+01, Taunssz = 3,101E-12  
TaunTetapx = -1,530E+01, TaunTetapy = -9,194E-11, TaunTetapz = -7,870E-01  
TaunTetasx = 7,111E-11, TaunTetasy = 1,847E+01, TaunTetasz = -1,623E-10

Teta = 342,00, Normal = -6,738E+00, Tang1 = 1,006E+01, Tang2 = 1,356E+00  
Sigmanpx = 7,056E+01, Sigmanpy = -7,031E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 9,148E-13, Sigmansy = -6,617E+01, Sigmansz = 1,768E-11  
Taunspz = -2,805E+01  
Taunssx = -3,840E-11, Taunssy = 4,271E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -8,052E+00, TaunTetapy = -1,082E-10, TaunTetapz = -4,871E-01  
TaunTetasx = 8,522E-11, TaunTetasy = 9,895E+00, TaunTetasz = -1,663E-10

текущее положение плоскости сечения = 66,66 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора r = 6,972E-01

Teta = 0,00, Normal = 8,582E+01, Tang1 = 1,208E+01, Tang2 = -3,108E-10  
Sigmanpx = 7,460E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 2,234E+01, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunspz = -2,863E+01

Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,562E+01, Taunssz = 0,000E+00  
TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,145E-10, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = -4,656E-12, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -1,916E-10  
Teta = 18,00, Normal = 8,115E+01, Tang1 = 1,013E+01, Tang2 = 8,324E+00  
Sigmanpx = 7,095E+01, Sigmanpy = 7,070E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 3,911E-13, Sigmansy = 2,133E+01, Sigmansz = -2,374E-11  
Taunspz = -4,605E+00, Taunspy = -6,608E-12, Taunspz = -2,821E+01  
Taunssx = 3,860E-11, Taunssy = 4,294E+01, Taunssz = -1,699E-12  
TaunTetapx = 8,095E+00, TaunTetapy = -1,088E-10, TaunTetapz = 4,872E-01  
TaunTetasx = -5,097E-12, TaunTetasy = -2,579E-01, TaunTetasz = -1,903E-10  
Teta = 36,00, Normal = 6,760E+01, Tang1 = 4,786E+00, Tang2 = 1,605E+01  
Sigmanpx = 6,036E+01, Sigmanpy = 1,345E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 7,440E-13, Sigmansy = 1,837E+01, Sigmansz = -3,324E-11  
Taunspz = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,707E+01  
Taunssx = 7,045E-11, Taunssy = 3,561E+01, Taunssz = -3,101E-12  
TaunTetapx = 1,538E+01, TaunTetapy = -9,245E-11, TaunTetapz = 7,872E-01  
TaunTetasx = -5,823E-12, TaunTetasy = -1,144E-01, TaunTetasz = -1,863E-10  
Teta = 54,00, Normal = 4,650E+01, Tang1 = -2,736E+00, Tang2 = 2,240E+01  
Sigmanpx = 4,385E+01, Sigmanpy = 1,851E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,024E-12, Sigmansy = 1,377E+01, Sigmansz = -2,023E-11  
Taunspz = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,560E+01  
Taunssx = 9,171E-11, Taunssy = 2,544E+01, Taunssz = -4,036E-12  
TaunTetapx = 2,113E+01, TaunTetapy = -6,705E-11, TaunTetapz = 7,858E-01  
TaunTetasx = -5,562E-12, TaunTetasy = 4,891E-01, TaunTetasz = -1,800E-10  
Teta = 72,00, Normal = 1,990E+01, Tang1 = -1,131E+01, Tang2 = 2,650E+01  
Sigmanpx = 2,305E+01, Sigmanpy = 2,176E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,204E-12, Sigmansy = 7,975E+00, Sigmansz = 1,403E-11

Taunsp<sub>x</sub> = -1,292E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,756E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,435E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 1,026E-10, Taunss<sub>y</sub> = 1,433E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,514E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,480E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = -3,520E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,850E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -3,489E-12, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,210E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,721E-10  
  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,054E+01, Tang2 = 2,764E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>y</sub> = 2,288E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 1,266E-12, Sigmans<sub>y</sub> = 1,549E+00, Sigmans<sub>z</sub> = 5,883E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,809E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,386E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 1,057E-10, Taunss<sub>y</sub> = 3,323E+00, Taunss<sub>z</sub> = -4,651E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,607E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,573E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,631E-10  
  
 Teta = 108,00, Normal = -3,408E+01, Tang1 = -3,334E+01, Tang2 = 2,688E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -1,647E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 2,176E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 1,204E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -6,493E+00, Sigmans<sub>z</sub> = 2,057E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,355E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 9,919E-11, Taunss<sub>y</sub> = -1,154E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,366E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,478E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,572E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,090E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -6,886E-13, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,697E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,566E-10  
  
 Teta = 126,00, Normal = -5,619E+01, Tang1 = -4,355E+01, Tang2 = 2,368E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -3,132E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,851E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 1,024E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -1,375E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -9,657E-12  
 Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,273E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 8,143E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,403E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,104E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,884E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,607E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = -3,972E-13, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,974E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,509E-10  
  
 Teta = 144,00, Normal = -7,374E+01, Tang1 = -5,015E+01, Tang2 = 1,784E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,311E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,345E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = 7,440E-13, Sigmansy = -1,950E+01, Sigmansz = -2,267E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,168E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 5,643E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,268E+01, Taunss<sub>z</sub> = -2,484E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 1,526E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,709E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,594E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 1,000E-12, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,923E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,465E-10  
 Teta = 162,00, Normal = -8,501E+01, Tang<sub>1</sub> = -5,341E+01, Tang<sub>2</sub> = 9,636E+00  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,068E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 7,070E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmansx = 3,911E-13, Sigmansy = -2,320E+01, Sigmansz = -1,720E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,080E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 2,846E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,737E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 8,009E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,875E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,069E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 2,642E-12, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,220E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,438E-10  
 Teta = 180,00, Normal = -8,889E+01, Tang<sub>1</sub> = -5,432E+01, Tang<sub>2</sub> = -5,674E-11  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,329E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -2,448E+01, Sigmansz = 0,000E+00  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -2,045E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,878E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,275E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 3,365E-12, TaunTetas<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,429E-10  
 Teta = 198,00, Normal = -8,501E+01, Tang<sub>1</sub> = -5,341E+01, Tang<sub>2</sub> = -9,636E+00  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,068E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -7,070E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmansx = -3,911E-13, Sigmansy = -2,320E+01, Sigmansz = 1,720E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,080E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = -2,846E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,737E+01, Taunss<sub>z</sub> = 1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = -8,009E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,875E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,069E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 2,642E-12, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,220E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,438E-10

Teta = 216,00, Normal = -7,374E+01, Tang1 = -5,015E+01, Tang2 = -1,784E+01  
 Sigmanpx = -4,311E+01, Sigmanpy = -1,345E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -7,440E-13, Sigmansy = -1,950E+01, Sigmansz = 2,267E-11  
 Taunspix = 4,215E+00, Taunspy = 9,660E-12, Taunspz = -2,168E+01  
 Taunssx = -5,643E-11, Taunssy = -3,268E+01, Taunssz = 2,484E-12  
 TaunTetapx = -1,526E+01, TaunTetapy = 6,709E-11, TaunTetapz = -6,594E-01  
 TaunTetasx = 1,000E-12, TaunTetasy = -1,923E+00, TaunTetasz = -1,465E-10  
  
 Teta = 234,00, Normal = -5,619E+01, Tang1 = -4,355E+01, Tang2 = -2,368E+01  
 Sigmanpx = -3,132E+01, Sigmanpy = -1,851E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,024E-12, Sigmansy = -1,375E+01, Sigmansz = 9,657E-12  
 Taunspix = 3,211E+00, Taunspy = 1,394E-11, Taunspz = -2,273E+01  
 Taunssx = -8,143E-11, Taunssy = -2,403E+01, Taunssz = 3,584E-12  
 TaunTetapx = -2,104E+01, TaunTetapy = 4,884E-11, TaunTetapz = -6,607E-01  
 TaunTetasx = -3,972E-13, TaunTetasy = -1,974E+00, TaunTetasz = -1,509E-10  
  
 Teta = 252,00, Normal = -3,408E+01, Tang1 = -3,334E+01, Tang2 = -2,688E+01  
 Sigmanpx = -1,647E+01, Sigmanpy = -2,176E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,204E-12, Sigmansy = -6,493E+00, Sigmansz = -2,057E-11  
 Taunspix = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,355E+01  
 Taunssx = -9,919E-11, Taunssy = -1,154E+01, Taunssz = 4,366E-12  
 TaunTetapx = -2,478E+01, TaunTetapy = 2,572E-11, TaunTetapz = -4,090E-01  
 TaunTetasx = -6,886E-13, TaunTetasy = -1,697E+00, TaunTetasz = -1,566E-10  
  
 Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,054E+01, Tang2 = -2,764E+01  
 Sigmanpx = 2,714E-10, Sigmanpy = -2,288E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,266E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,883E-11  
 Taunspix = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,386E+01  
 Taunssx = -1,057E-10, Taunssy = 3,323E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,607E+01, TaunTetapy = -4,142E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = -4,361E-23, TaunTetasy = -1,573E+00, TaunTetasz = -1,631E-10

Teta = 288,00, Normal = 1,990E+01, Tang1 = -1,131E+01, Tang2 = -2,650E+01  
Sigmanpx = 2,305E+01, Sigmanpy = -2,176E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -1,204E-12, Sigmansy = 7,975E+00, Sigmansz = -1,403E-11  
Taunspix = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,435E+01  
Taunssx = -1,026E-10, Taunssy = 1,433E+01, Taunssz = 4,514E-12  
TaunTetapx = -2,480E+01, TaunTetapy = -3,520E-11, TaunTetapz = -4,850E-01  
TaunTetasx = -3,489E-12, TaunTetasy = -1,210E+00, TaunTetasz = -1,721E-10

Teta = 306,00, Normal = 4,650E+01, Tang1 = -2,736E+00, Tang2 = -2,240E+01  
Sigmanpx = 4,385E+01, Sigmanpy = -1,851E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -1,024E-12, Sigmansy = 1,377E+01, Sigmansz = 2,023E-11  
Taunspix = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,560E+01  
Taunssx = -9,171E-11, Taunssy = 2,544E+01, Taunssz = 4,036E-12  
TaunTetapx = -2,113E+01, TaunTetapy = -6,705E-11, TaunTetapz = -7,858E-01  
TaunTetasx = -5,562E-12, TaunTetasy = -4,891E-01, TaunTetasz = -1,800E-10

Teta = 324,00, Normal = 6,760E+01, Tang1 = 4,786E+00, Tang2 = -1,605E+01  
Sigmanpx = 6,036E+01, Sigmanpy = -1,345E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -7,440E-13, Sigmansy = 1,837E+01, Sigmansz = 3,324E-11  
Taunspix = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,707E+01  
Taunssx = -7,045E-11, Taunssy = 3,561E+01, Taunssz = 3,101E-12  
TaunTetapx = -1,538E+01, TaunTetapy = -9,245E-11, TaunTetapz = -7,872E-01  
TaunTetasx = -5,823E-12, TaunTetasy = 1,144E-01, TaunTetasz = -1,863E-10

Teta = 342,00, Normal = 8,115E+01, Tang1 = 1,013E+01, Tang2 = -8,324E+00  
Sigmanpx = 7,095E+01, Sigmanpy = -7,070E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -3,911E-13, Sigmansy = 2,133E+01, Sigmansz = 2,374E-11  
Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = 6,608E-12, Taunspz = -2,821E+01  
Taunssx = -3,860E-11, Taunssy = 4,294E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -8,095E+00, TaunTetapy = -1,088E-10, TaunTetapz = -4,872E-01  
TaunTetasx = -5,097E-12, TaunTetasy = 2,579E-01, TaunTetasz = -1,903E-10

текущее положение плоскости сечения = 77,77 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора  $r = 7,958E-01$

Teta = 0,00, Normal = 1,789E+02, Tang1 = 1,215E+01, Tang2 = -4,306E-10

Sigmanpx = 7,488E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 1,152E+02, Sigmansz = 0,000E+00

Taunspix = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,873E+01

Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,580E+01, Taunssz = 0,000E+00

TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,149E-10, TaunTetapz = 0,000E+00

TaunTetasx = -1,004E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -2,153E-10

Teta = 18,00, Normal = 1,697E+02, Tang1 = 1,019E+01, Tang2 = 1,808E+01

Sigmanpx = 7,121E+01, Sigmanpy = 7,096E-11, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = 1,708E-12, Sigmansy = 1,096E+02, Sigmansz = -2,977E-11

Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = -6,608E-12, Taunspz = -2,831E+01

Taunssx = 3,875E-11, Taunssy = 4,310E+01, Taunssz = -1,699E-12

TaunTetapx = 8,123E+00, TaunTetapy = -1,092E-10, TaunTetapz = 4,872E-01

TaunTetasx = -9,622E-11, TaunTetasy = 9,465E+00, TaunTetasz = -2,140E-10

Teta = 36,00, Normal = 1,429E+02, Tang1 = 4,826E+00, Tang2 = 3,462E+01

Sigmanpx = 6,058E+01, Sigmanpy = 1,350E-10, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = 3,249E-12, Sigmansy = 9,346E+01, Sigmansz = -4,299E-11

Taunspix = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,716E+01

Taunssx = 7,073E-11, Taunssy = 3,575E+01, Taunssz = -3,101E-12

TaunTetapx = 1,543E+01, TaunTetapy = -9,277E-11, TaunTetapz = 7,873E-01

TaunTetasx = -8,344E-11, TaunTetasy = 1,840E+01, TaunTetasz = -2,100E-10

Teta = 54,00, Normal = 1,012E+02, Tang1 = -2,731E+00, Tang2 = 4,801E+01

Sigmanpx = 4,401E+01, Sigmanpy = 1,858E-10, Sigmanpz = -1,112E+01

Sigmansx = 4,472E-12, Sigmansy = 6,832E+01, Sigmansz = -2,992E-11

Taunspix = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,569E+01

Taunssx = 9,206E-11, Taunssy = 2,554E+01, Taunssz = -4,036E-12  
 TaunTetapx = 2,120E+01, TaunTetapy = -6,729E-11, TaunTetapz = 7,859E-01  
 TaunTetasx = -6,205E-11, TaunTetasy = 2,602E+01, TaunTetasz = -2,038E-10  
 Teta = 72,00, Normal = 4,867E+01, Tang1 = -1,134E+01, Tang2 = 5,664E+01  
 Sigmanpx = 2,314E+01, Sigmanpy = 2,184E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 5,258E-12, Sigmansy = 3,666E+01, Sigmansz = 8,137E-12  
 Taunspz = -1,292E+00, Taunspy = -1,756E-11, Taunspz = -2,444E+01  
 Taunssx = 1,030E-10, Taunssy = 1,439E+01, Taunssz = -4,514E-12  
 TaunTetapx = 2,489E+01, TaunTetapy = -3,533E-11, TaunTetapz = 4,851E-01  
 TaunTetasx = -3,323E-11, TaunTetasy = 3,127E+01, TaunTetasz = -1,958E-10  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,061E+01, Tang2 = 5,935E+01  
 Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 2,296E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 5,528E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 5,904E-11  
 Taunspz = 0,000E+00, Taunspy = -1,809E-11, Taunspz = -2,395E+01  
 Taunssx = 1,061E-10, Taunssy = 3,335E+00, Taunssz = -4,651E-12  
 TaunTetapx = 2,616E+01, TaunTetapy = 0,000E+00, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 0,000E+00, TaunTetasy = 3,319E+01, TaunTetasz = -1,868E-10  
 Teta = 108,00, Normal = -5,512E+01, Tang1 = -3,347E+01, Tang2 = 5,706E+01  
 Sigmanpx = -1,653E+01, Sigmanpy = 2,184E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 5,258E-12, Sigmansy = -2,747E+01, Sigmansz = 1,562E-11  
 Taunspz = 1,749E+00, Taunspy = -1,698E-11, Taunspz = -2,364E+01  
 Taunssx = 9,958E-11, Taunssy = -1,158E+01, Taunssz = -4,366E-12  
 TaunTetapx = 2,486E+01, TaunTetapy = 2,581E-11, TaunTetapz = 4,090E-01  
 TaunTetasx = 2,058E-11, TaunTetasy = 3,179E+01, TaunTetasz = -1,803E-10  
 Teta = 126,00, Normal = -9,620E+01, Tang1 = -4,373E+01, Tang2 = 4,939E+01  
 Sigmanpx = -3,144E+01, Sigmanpy = 1,858E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 4,472E-12, Sigmansy = -5,364E+01, Sigmansz = -1,782E-11

Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,281E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 8,175E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,413E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 2,112E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,901E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,608E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 4,011E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = 2,761E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,746E-10  
Teta = 144,00, Normal = -1,288E+02, Tang1 = -5,036E+01, Tang2 = 3,656E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,327E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,350E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmans<sub>x</sub> = 3,249E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -7,442E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -3,088E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,176E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 5,665E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,281E+01, Taunss<sub>z</sub> = -2,484E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 1,531E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,732E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,595E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 5,687E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = 2,059E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,703E-10  
Teta = 162,00, Normal = -1,497E+02, Tang1 = -5,363E+01, Tang2 = 1,949E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,087E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 7,096E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmans<sub>x</sub> = 1,708E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -8,775E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -2,229E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,087E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 2,857E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,751E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 8,037E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,902E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,069E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 6,842E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = 1,105E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,676E-10  
Teta = 180,00, Normal = -1,570E+02, Tang1 = -5,455E+01, Tang2 = -1,102E-11  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,348E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmans<sub>x</sub> = 0,000E+00, Sigmans<sub>y</sub> = -9,235E+01, Sigmans<sub>z</sub> = 0,000E+00  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -2,052E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,894E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,304E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetas<sub>x</sub> = 7,257E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,666E-10  
Teta = 198,00, Normal = -1,497E+02, Tang1 = -5,363E+01, Tang2 = -1,949E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,087E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -7,096E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = -1,708E-12, Sigmansy = -8,775E+01, Sigmansz = 2,229E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,087E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -2,857E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,751E+01, Taunss<sub>z</sub> = 1,253E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -8,037E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,902E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,069E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 6,842E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -1,105E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,676E-10  
Teta = 216,00, Normal = -1,288E+02, Tang1 = -5,036E+01, Tang2 = -3,656E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,327E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,350E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -3,249E-12, Sigmansy = -7,442E+01, Sigmansz = 3,088E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,176E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -5,665E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,281E+01, Taunss<sub>z</sub> = 2,484E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -1,531E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,732E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,595E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 5,687E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,059E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,703E-10  
Teta = 234,00, Normal = -9,620E+01, Tang1 = -4,373E+01, Tang2 = -4,939E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -3,144E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,858E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -4,472E-12, Sigmansy = -5,364E+01, Sigmansz = 1,782E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,281E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -8,175E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,413E+01, Taunss<sub>z</sub> = 3,584E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -2,112E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,901E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,608E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 4,011E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,761E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,746E-10  
Teta = 252,00, Normal = -5,512E+01, Tang1 = -3,347E+01, Tang2 = -5,706E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -1,653E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -2,184E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -5,258E-12, Sigmansy = -2,747E+01, Sigmansz = -1,562E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,364E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -9,958E-11, Taunss<sub>y</sub> = -1,158E+01, Taunss<sub>z</sub> = 4,366E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -2,486E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,581E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,090E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 2,058E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -3,179E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,803E-10

Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,061E+01, Tang2 = -5,935E+01  
 Sigmanpx = 2,724E-10, Sigmanpy = -2,296E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -5,528E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,904E-11  
 Taunspix = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,395E+01  
 Taunssx = -1,061E-10, Taunssy = 3,335E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,616E+01, TaunTetapy = -4,157E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = -3,939E-22, TaunTetasy = -3,319E+01, TaunTetasz = -1,868E-10  
  
 Teta = 288,00, Normal = 4,867E+01, Tang1 = -1,134E+01, Tang2 = -5,664E+01  
 Sigmanpx = 2,314E+01, Sigmanpy = -2,184E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -5,258E-12, Sigmansy = 3,666E+01, Sigmansz = -8,137E-12  
 Taunspix = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,444E+01  
 Taunssx = -1,030E-10, Taunssy = 1,439E+01, Taunssz = 4,514E-12  
 TaunTetapx = -2,489E+01, TaunTetapy = -3,533E-11, TaunTetapz = -4,851E-01  
 TaunTetasx = -3,323E-11, TaunTetasy = -3,127E+01, TaunTetasz = -1,958E-10  
  
 Teta = 306,00, Normal = 1,012E+02, Tang1 = -2,731E+00, Tang2 = -4,801E+01  
 Sigmanpx = 4,401E+01, Sigmanpy = -1,858E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -4,472E-12, Sigmansy = 6,832E+01, Sigmansz = 2,992E-11  
 Taunspix = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,569E+01  
 Taunssx = -9,206E-11, Taunssy = 2,554E+01, Taunssz = 4,036E-12  
 TaunTetapx = -2,120E+01, TaunTetapy = -6,729E-11, TaunTetapz = -7,859E-01  
 TaunTetasx = -6,205E-11, TaunTetasy = -2,602E+01, TaunTetasz = -2,038E-10  
  
 Teta = 324,00, Normal = 1,429E+02, Tang1 = 4,826E+00, Tang2 = -3,462E+01  
 Sigmanpx = 6,058E+01, Sigmanpy = -1,350E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -3,249E-12, Sigmansy = 9,346E+01, Sigmansz = 4,299E-11  
 Taunspix = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,716E+01  
 Taunssx = -7,073E-11, Taunssy = 3,575E+01, Taunssz = 3,101E-12  
 TaunTetapx = -1,543E+01, TaunTetapy = -9,277E-11, TaunTetapz = -7,873E-01  
 TaunTetasx = -8,344E-11, TaunTetasy = -1,840E+01, TaunTetasz = -2,100E-10

Teta = 342,00, Normal = 1,697E+02, Tang1 = 1,019E+01, Tang2 = -1,808E+01  
Sigmanpx = 7,121E+01, Sigmanpy = -7,096E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -1,708E-12, Sigmansy = 1,096E+02, Sigmansz = 2,977E-11  
Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = 6,608E-12, Taunspz = -2,831E+01  
Taunssx = -3,875E-11, Taunssy = 4,310E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -8,123E+00, TaunTetapy = -1,092E-10, TaunTetapz = -4,872E-01  
TaunTetasx = -9,622E-11, TaunTetasy = -9,465E+00, TaunTetasz = -2,140E-10

текущее положение плоскости сечения = 88,89 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора r = 8,941E-01

Teta = 0,00, Normal = 2,723E+02, Tang1 = 1,221E+01, Tang2 = -5,507E-10  
Sigmanpx = 7,506E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 2,084E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunspx = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,881E+01  
Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,594E+01, Taunssz = 0,000E+00  
TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,152E-10, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = -1,966E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -2,389E-10

Teta = 18,00, Normal = 2,585E+02, Tang1 = 1,025E+01, Tang2 = 2,786E+01  
Sigmanpx = 7,139E+01, Sigmanpy = 7,113E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 3,032E-12, Sigmansy = 1,983E+02, Sigmansz = -3,579E-11  
Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = -6,608E-12, Taunspz = -2,838E+01  
Taunssx = 3,887E-11, Taunssy = 4,323E+01, Taunssz = -1,699E-12  
TaunTetapx = 8,143E+00, TaunTetapy = -1,095E-10, TaunTetapz = 4,872E-01  
TaunTetasx = -1,878E-10, TaunTetasy = 1,923E+01, TaunTetasz = -2,375E-10

Teta = 36,00, Normal = 2,185E+02, Tang1 = 4,864E+00, Tang2 = 5,327E+01  
Sigmanpx = 6,073E+01, Sigmanpy = 1,353E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 5,767E-12, Sigmansy = 1,689E+02, Sigmansz = -5,271E-11  
Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,723E+01

Taunssx = 7,094E-11, Taunssy = 3,586E+01, Taunssz = -3,101E-12  
 TaunTetapx = 1,547E+01, TaunTetapy = -9,300E-11, TaunTetapz = 7,873E-01  
 TaunTetasx = -1,614E-10, TaunTetasy = 3,701E+01, TaunTetasz = -2,335E-10  
 Teta = 54,00, Normal = 1,561E+02, Tang1 = -2,719E+00, Tang2 = 7,372E+01  
 Sigmanpx = 4,412E+01, Sigmanpy = 1,862E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 7,937E-12, Sigmansy = 1,231E+02, Sigmansz = -3,962E-11  
 Taunspix = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,575E+01  
 Taunssx = 9,235E-11, Taunssy = 2,562E+01, Taunssz = -4,037E-12  
 TaunTetapx = 2,125E+01, TaunTetapy = -6,746E-11, TaunTetapz = 7,860E-01  
 TaunTetasx = -1,188E-10, TaunTetasy = 5,168E+01, TaunTetasz = -2,273E-10  
 Teta = 72,00, Normal = 7,754E+01, Tang1 = -1,136E+01, Tang2 = 8,690E+01  
 Sigmanpx = 2,320E+01, Sigmanpy = 2,189E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 9,331E-12, Sigmansy = 6,547E+01, Sigmansz = 2,212E-12  
 Taunspix = -1,292E+00, Taunspy = -1,756E-11, Taunspz = -2,450E+01  
 Taunssx = 1,033E-10, Taunssy = 1,443E+01, Taunssz = -4,514E-12  
 TaunTetapx = 2,495E+01, TaunTetapy = -3,542E-11, TaunTetapz = 4,851E-01  
 TaunTetasx = -6,311E-11, TaunTetasy = 6,147E+01, TaunTetasz = -2,194E-10  
 Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,066E+01, Tang2 = 9,118E+01  
 Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 2,302E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 9,811E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 5,919E-11  
 Taunspix = 0,000E+00, Taunspy = -1,809E-11, Taunspz = -2,401E+01  
 Taunssx = 1,064E-10, Taunssy = 3,344E+00, Taunssz = -4,651E-12  
 TaunTetapx = 2,622E+01, TaunTetapy = 0,000E+00, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = 0,000E+00, TaunTetasy = 6,496E+01, TaunTetasz = -2,104E-10  
 Teta = 108,00, Normal = -7,623E+01, Tang1 = -3,357E+01, Tang2 = 8,735E+01  
 Sigmanpx = -1,657E+01, Sigmanpy = 2,189E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = 9,331E-12, Sigmansy = -4,854E+01, Sigmansz = 1,064E-11

Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,370E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 9,988E-11, Taunss<sub>y</sub> = -1,162E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,366E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,492E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,587E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,091E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 4,194E-11, TaunTetasy = 6,202E+01, TaunTetasz = -2,039E-10  
 Teta = 126,00, Normal = -1,364E+02, Tang1 = -4,386E+01, Tang2 = 7,520E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -3,152E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,862E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 7,937E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -9,372E+01, Sigmans<sub>z</sub> = -2,598E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,287E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 8,200E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,420E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 2,117E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,913E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,608E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 8,082E-11, TaunTetasy = 5,337E+01, TaunTetasz = -1,982E-10  
 Teta = 144,00, Normal = -1,841E+02, Tang1 = -5,051E+01, Tang2 = 5,535E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -4,338E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,353E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 5,767E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -1,296E+02, Sigmans<sub>z</sub> = -3,908E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,181E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 5,682E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,292E+01, Taunss<sub>z</sub> = -2,484E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 1,535E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,748E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,595E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 1,130E-10, TaunTetasy = 3,934E+01, TaunTetasz = -1,939E-10  
 Teta = 162,00, Normal = -2,147E+02, Tang1 = -5,380E+01, Tang2 = 2,939E+01  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,099E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 7,113E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
 Sigmans<sub>x</sub> = 3,032E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -1,526E+02, Sigmans<sub>z</sub> = -2,736E-11  
 Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,092E+01  
 Taunss<sub>x</sub> = 2,866E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,763E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
 TaunTetap<sub>x</sub> = 8,057E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,921E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,070E-01  
 TaunTetas<sub>x</sub> = 1,345E-10, TaunTetasy = 2,092E+01, TaunTetasz = -1,912E-10  
 Teta = 180,00, Normal = -2,253E+02, Tang1 = -5,472E+01, Tang2 = 3,504E-11  
 Sigmanp<sub>x</sub> = -5,362E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -1,605E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -2,058E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,906E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,323E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetas<sub>x</sub> = 1,421E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,903E-10  
Teta = 198,00, Normal = -2,147E+02, Tang1 = -5,380E+01, Tang2 = -2,939E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,099E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -7,113E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -3,032E-12, Sigmansy = -1,526E+02, Sigmansz = 2,736E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,092E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -2,866E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,763E+01, Taunss<sub>z</sub> = 1,253E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -8,057E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,921E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,070E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 1,345E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -2,092E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,912E-10  
Teta = 216,00, Normal = -1,841E+02, Tang1 = -5,051E+01, Tang2 = -5,535E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,338E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,353E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -5,767E-12, Sigmansy = -1,296E+02, Sigmansz = 3,908E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,181E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -5,682E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,292E+01, Taunss<sub>z</sub> = 2,484E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -1,535E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,748E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,595E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 1,130E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -3,934E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,939E-10  
Teta = 234,00, Normal = -1,364E+02, Tang1 = -4,386E+01, Tang2 = -7,520E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -3,152E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,862E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -7,937E-12, Sigmansy = -9,372E+01, Sigmansz = 2,598E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,287E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -8,200E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,420E+01, Taunss<sub>z</sub> = 3,584E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -2,117E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,913E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,608E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 8,082E-11, TaunTetas<sub>y</sub> = -5,337E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -1,982E-10

Teta = 252,00, Normal = -7,623E+01, Tang1 = -3,357E+01, Tang2 = -8,735E+01  
 Sigmanpx = -1,657E+01, Sigmanpy = -2,189E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -9,331E-12, Sigmansy = -4,854E+01, Sigmansz = -1,064E-11  
 Taunspx = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,370E+01  
 Taunssx = -9,988E-11, Taunssy = -1,162E+01, Taunssz = 4,366E-12  
 TaunTetapx = -2,492E+01, TaunTetapy = 2,587E-11, TaunTetapz = -4,091E-01  
 TaunTetasx = 4,194E-11, TaunTetasy = -6,202E+01, TaunTetasz = -2,039E-10  
  
 Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,066E+01, Tang2 = -9,118E+01  
 Sigmanpx = 2,731E-10, Sigmanpy = -2,302E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -9,811E-12, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,919E-11  
 Taunspx = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,401E+01  
 Taunssx = -1,064E-10, Taunssy = 3,344E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,622E+01, TaunTetapy = -4,167E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = -7,458E-22, TaunTetasy = -6,496E+01, TaunTetasz = -2,104E-10  
  
 Teta = 288,00, Normal = 7,754E+01, Tang1 = -1,136E+01, Tang2 = -8,690E+01  
 Sigmanpx = 2,320E+01, Sigmanpy = -2,189E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -9,331E-12, Sigmansy = 6,547E+01, Sigmansz = -2,212E-12  
 Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,450E+01  
 Taunssx = -1,033E-10, Taunssy = 1,443E+01, Taunssz = 4,514E-12  
 TaunTetapx = -2,495E+01, TaunTetapy = -3,542E-11, TaunTetapz = -4,851E-01  
 TaunTetasx = -6,311E-11, TaunTetasy = -6,147E+01, TaunTetasz = -2,194E-10  
  
 Teta = 306,00, Normal = 1,561E+02, Tang1 = -2,719E+00, Tang2 = -7,372E+01  
 Sigmanpx = 4,412E+01, Sigmanpy = -1,862E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -7,937E-12, Sigmansy = 1,231E+02, Sigmansz = 3,962E-11  
 Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,575E+01  
 Taunssx = -9,235E-11, Taunssy = 2,562E+01, Taunssz = 4,037E-12  
 TaunTetapx = -2,125E+01, TaunTetapy = -6,746E-11, TaunTetapz = -7,860E-01  
 TaunTetasx = -1,188E-10, TaunTetasy = -5,168E+01, TaunTetasz = -2,273E-10

Teta = 324,00, Normal = 2,185E+02, Tang1 = 4,864E+00, Tang2 = -5,327E+01  
Sigmanpx = 6,073E+01, Sigmanpy = -1,353E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -5,767E-12, Sigmansy = 1,689E+02, Sigmansz = 5,271E-11  
Taunspix = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,723E+01  
Taunssx = -7,094E-11, Taunssy = 3,586E+01, Taunssz = 3,101E-12  
TaunTetapx = -1,547E+01, TaunTetapy = -9,300E-11, TaunTetapz = -7,873E-01  
TaunTetasx = -1,614E-10, TaunTetasy = -3,701E+01, TaunTetasz = -2,335E-10

Teta = 342,00, Normal = 2,585E+02, Tang1 = 1,025E+01, Tang2 = -2,786E+01  
Sigmanpx = 7,139E+01, Sigmanpy = -7,113E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = -3,032E-12, Sigmansy = 1,983E+02, Sigmansz = 3,579E-11  
Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = 6,608E-12, Taunspz = -2,838E+01  
Taunssx = -3,887E-11, Taunssy = 4,323E+01, Taunssz = 1,699E-12  
TaunTetapx = -8,143E+00, TaunTetapy = -1,095E-10, TaunTetapz = -4,872E-01  
TaunTetasx = -1,878E-10, TaunTetasy = -1,923E+01, TaunTetasz = -2,375E-10

текущее положение плоскости сечения = 100,00 % от H-Bone

текущее значение радиус-вектора r = 9,922E-01

Teta = 0,00, Normal = 3,660E+02, Tang1 = 1,227E+01, Tang2 = -6,708E-10  
Sigmanpx = 7,520E+01, Sigmanpy = 0,000E+00, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = 3,019E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunspix = -4,915E+00, Taunspy = 0,000E+00, Taunspz = -2,886E+01  
Taunssx = 0,000E+00, Taunssy = 4,605E+01, Taunssz = 0,000E+00  
TaunTetapx = 0,000E+00, TaunTetapy = -1,154E-10, TaunTetapz = 0,000E+00  
TaunTetasx = -2,931E-10, TaunTetasy = 0,000E+00, TaunTetasz = -2,623E-10

Teta = 18,00, Normal = 3,476E+02, Tang1 = 1,030E+01, Tang2 = 3,768E+01  
Sigmanpx = 7,152E+01, Sigmanpy = 7,126E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 4,359E-12, Sigmansy = 2,872E+02, Sigmansz = -4,180E-11  
Taunspix = -4,605E+00, Taunspy = -6,608E-12, Taunspz = -2,843E+01

Taunssx = 3,896E-11, Taunssy = 4,334E+01, Taunssz = -1,699E-12  
TaunTetapx = 8,157E+00, TaunTetapy = -1,097E-10, TaunTetapz = 4,873E-01  
TaunTetasx = -2,796E-10, TaunTetasy = 2,903E+01, TaunTetasz = -2,609E-10  
Teta = 36,00, Normal = 2,943E+02, Tang1 = 4,901E+00, Tang2 = 7,195E+01  
Sigmanpx = 6,084E+01, Sigmanpy = 1,356E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 8,291E-12, Sigmansy = 2,446E+02, Sigmansz = -6,242E-11  
Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = -1,206E-11, Taunspz = -2,728E+01  
Taunssx = 7,112E-11, Taunssy = 3,594E+01, Taunssz = -3,101E-12  
TaunTetapx = 1,549E+01, TaunTetapy = -9,317E-11, TaunTetapz = 7,874E-01  
TaunTetasx = -2,396E-10, TaunTetasy = 5,567E+01, TaunTetasz = -2,570E-10  
Teta = 54,00, Normal = 2,112E+02, Tang1 = -2,705E+00, Tang2 = 9,948E+01  
Sigmanpx = 4,420E+01, Sigmanpy = 1,866E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,141E-11, Sigmansy = 1,781E+02, Sigmansz = -4,931E-11  
Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = -1,570E-11, Taunspz = -2,580E+01  
Taunssx = 9,257E-11, Taunssy = 2,568E+01, Taunssz = -4,037E-12  
TaunTetapx = 2,129E+01, TaunTetapy = -6,758E-11, TaunTetapz = 7,860E-01  
TaunTetasx = -1,757E-10, TaunTetasy = 7,740E+01, TaunTetasz = -2,508E-10  
Teta = 72,00, Normal = 1,065E+02, Tang1 = -1,137E+01, Tang2 = 1,172E+02  
Sigmanpx = 2,324E+01, Sigmanpy = 2,193E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,341E-11, Sigmansy = 9,437E+01, Sigmansz = -3,727E-12  
Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = -1,756E-11, Taunspz = -2,454E+01  
Taunssx = 1,035E-10, Taunssy = 1,446E+01, Taunssz = -4,514E-12  
TaunTetapx = 2,499E+01, TaunTetapy = -3,548E-11, TaunTetapz = 4,852E-01  
TaunTetasx = -9,307E-11, TaunTetasy = 9,175E+01, TaunTetasz = -2,429E-10  
Teta = 90,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,070E+01, Tang2 = 1,231E+02  
Sigmanpx = 0,000E+00, Sigmanpy = 2,306E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
Sigmansx = 1,410E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = 5,930E-11

Taunsp<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,809E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,405E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 1,067E-10, Taunss<sub>y</sub> = 3,350E+00, Taunss<sub>z</sub> = -4,651E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 2,627E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetas<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetasy = 9,682E+01, TaunTetasz = -2,339E-10  
Teta = 108,00, Normal = -9,739E+01, Tang1 = -3,364E+01, Tang2 = 1,177E+02  
Sigmanp<sub>x</sub> = -1,660E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 2,193E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmans<sub>x</sub> = 1,341E-11, Sigmans<sub>y</sub> = -6,966E+01, Sigmans<sub>z</sub> = 5,643E-12  
Taunsp<sub>x</sub> = 1,749E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,698E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,374E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 1,001E-10, Taunss<sub>y</sub> = -1,165E+01, Taunss<sub>z</sub> = -4,366E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 2,497E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 2,591E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,091E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 6,336E-11, TaunTetasy = 9,234E+01, TaunTetasz = -2,273E-10  
Teta = 126,00, Normal = -1,766E+02, Tang1 = -4,396E+01, Tang2 = 1,011E+02  
Sigmanp<sub>x</sub> = -3,157E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,866E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmans<sub>x</sub> = 1,141E-11, Sigmans<sub>y</sub> = -1,339E+02, Sigmans<sub>z</sub> = -3,415E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 3,211E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -1,394E-11, Taunsp<sub>z</sub> = -2,291E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 8,220E-11, Taunss<sub>y</sub> = -2,426E+01, Taunss<sub>z</sub> = -3,584E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 2,120E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 4,921E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,609E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 1,216E-10, TaunTetasy = 7,920E+01, TaunTetasz = -2,217E-10  
Teta = 144,00, Normal = -2,395E+02, Tang1 = -5,063E+01, Tang2 = 7,418E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,346E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 1,356E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmans<sub>x</sub> = 8,291E-12, Sigmans<sub>y</sub> = -1,849E+02, Sigmans<sub>z</sub> = -4,726E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,185E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 5,696E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,300E+01, Taunss<sub>z</sub> = -2,484E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 1,538E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,760E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 6,596E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 1,693E-10, TaunTetasy = 5,814E+01, TaunTetasz = -2,174E-10  
Teta = 162,00, Normal = -2,798E+02, Tang1 = -5,393E+01, Tang2 = 3,930E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,108E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 7,126E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01

Sigmansx = 4,359E-12, Sigmansy = -2,176E+02, Sigmansz = -3,243E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = -4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,096E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 2,873E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,772E+01, Taunss<sub>z</sub> = -1,253E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = 8,071E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,934E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 4,070E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 2,008E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 3,082E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -2,148E-10  
Teta = 180,00, Normal = -2,937E+02, Tang1 = -5,485E+01, Tang2 = 8,132E-11  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,371E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = 0,000E+00, Sigmansy = -2,289E+02, Sigmansz = 0,000E+00  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,915E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 0,000E+00, Taunsp<sub>z</sub> = -2,061E+01  
Taunss<sub>x</sub> = 0,000E+00, Taunss<sub>y</sub> = -3,915E+01, Taunss<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetap<sub>x</sub> = 0,000E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 8,338E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = 0,000E+00  
TaunTetas<sub>x</sub> = 2,118E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = 0,000E+00, TaunTetas<sub>z</sub> = -2,139E-10  
Teta = 198,00, Normal = -2,798E+02, Tang1 = -5,393E+01, Tang2 = -3,930E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -5,108E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -7,126E-11, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -4,359E-12, Sigmansy = -2,176E+02, Sigmansz = 3,243E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,753E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 4,872E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,096E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -2,873E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,772E+01, Taunss<sub>z</sub> = 1,253E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -8,071E+00, TaunTetap<sub>y</sub> = 7,934E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -4,070E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 2,008E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -3,082E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -2,148E-10  
Teta = 216,00, Normal = -2,395E+02, Tang1 = -5,063E+01, Tang2 = -7,418E+01  
Sigmanp<sub>x</sub> = -4,346E+01, Sigmanp<sub>y</sub> = -1,356E-10, Sigmanp<sub>z</sub> = -1,112E+01  
Sigmansx = -8,291E-12, Sigmansy = -1,849E+02, Sigmansz = 4,726E-11  
Taunsp<sub>x</sub> = 4,215E+00, Taunsp<sub>y</sub> = 9,660E-12, Taunsp<sub>z</sub> = -2,185E+01  
Taunss<sub>x</sub> = -5,696E-11, Taunss<sub>y</sub> = -3,300E+01, Taunss<sub>z</sub> = 2,484E-12  
TaunTetap<sub>x</sub> = -1,538E+01, TaunTetap<sub>y</sub> = 6,760E-11, TaunTetap<sub>z</sub> = -6,596E-01  
TaunTetas<sub>x</sub> = 1,693E-10, TaunTetas<sub>y</sub> = -5,814E+01, TaunTetas<sub>z</sub> = -2,174E-10

Teta = 234,00, Normal = -1,766E+02, Tang1 = -4,396E+01, Tang2 = -1,011E+02  
 Sigmanpx = -3,157E+01, Sigmanpy = -1,866E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,141E-11, Sigmansy = -1,339E+02, Sigmansz = 3,415E-11  
 Taunspx = 3,211E+00, Taunspy = 1,394E-11, Taunspz = -2,291E+01  
 Taunssx = -8,220E-11, Taunssy = -2,426E+01, Taunssz = 3,584E-12  
 TaunTetapx = -2,120E+01, TaunTetapy = 4,921E-11, TaunTetapz = -6,609E-01  
 TaunTetasx = 1,216E-10, TaunTetasy = -7,920E+01, TaunTetasz = -2,217E-10  
  
 Teta = 252,00, Normal = -9,739E+01, Tang1 = -3,364E+01, Tang2 = -1,177E+02  
 Sigmanpx = -1,660E+01, Sigmanpy = -2,193E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,341E-11, Sigmansy = -6,966E+01, Sigmansz = -5,643E-12  
 Taunspx = 1,749E+00, Taunspy = 1,698E-11, Taunspz = -2,374E+01  
 Taunssx = -1,001E-10, Taunssy = -1,165E+01, Taunssz = 4,366E-12  
 TaunTetapx = -2,497E+01, TaunTetapy = 2,591E-11, TaunTetapz = -4,091E-01  
 TaunTetasx = 6,336E-11, TaunTetasy = -9,234E+01, TaunTetasz = -2,273E-10  
  
 Teta = 270,00, Normal = -9,575E+00, Tang1 = -2,070E+01, Tang2 = -1,231E+02  
 Sigmanpx = 2,736E-10, Sigmanpy = -2,306E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,410E-11, Sigmansy = 1,549E+00, Sigmansz = -5,930E-11  
 Taunspx = -1,490E-11, Taunspy = 1,809E-11, Taunspz = -2,405E+01  
 Taunssx = -1,067E-10, Taunssy = 3,350E+00, Taunssz = 4,651E-12  
 TaunTetapx = -2,627E+01, TaunTetapy = -4,175E-22, TaunTetapz = 0,000E+00  
 TaunTetasx = -1,099E-21, TaunTetasy = -9,682E+01, TaunTetasz = -2,339E-10  
  
 Teta = 288,00, Normal = 1,065E+02, Tang1 = -1,137E+01, Tang2 = -1,172E+02  
 Sigmanpx = 2,324E+01, Sigmanpy = -2,193E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,341E-11, Sigmansy = 9,437E+01, Sigmansz = 3,727E-12  
 Taunspx = -1,292E+00, Taunspy = 1,756E-11, Taunspz = -2,454E+01  
 Taunssx = -1,035E-10, Taunssy = 1,446E+01, Taunssz = 4,514E-12  
 TaunTetapx = -2,499E+01, TaunTetapy = -3,548E-11, TaunTetapz = -4,852E-01  
 TaunTetasx = -9,307E-11, TaunTetasy = -9,175E+01, TaunTetasz = -2,429E-10

Teta = 306,00, Normal = 2,112E+02, Tang1 = -2,705E+00, Tang2 = -9,948E+01  
 Sigmanpx = 4,420E+01, Sigmanpy = -1,866E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -1,141E-11, Sigmansy = 1,781E+02, Sigmansz = 4,931E-11  
 Taunspx = -2,583E+00, Taunspy = 1,570E-11, Taunspz = -2,580E+01  
 Taunssx = -9,257E-11, Taunssy = 2,568E+01, Taunssz = 4,037E-12  
 TaunTetapx = -2,129E+01, TaunTetapy = -6,758E-11, TaunTetapz = -7,860E-01  
 TaunTetasx = -1,757E-10, TaunTetasy = -7,740E+01, TaunTetasz = -2,508E-10  
  
 Teta = 324,00, Normal = 2,943E+02, Tang1 = 4,901E+00, Tang2 = -7,195E+01  
 Sigmanpx = 6,084E+01, Sigmanpy = -1,356E-10, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -8,291E-12, Sigmansy = 2,446E+02, Sigmansz = 6,242E-11  
 Taunspx = -3,759E+00, Taunspy = 1,206E-11, Taunspz = -2,728E+01  
 Taunssx = -7,112E-11, Taunssy = 3,594E+01, Taunssz = 3,101E-12  
 TaunTetapx = -1,549E+01, TaunTetapy = -9,317E-11, TaunTetapz = -7,874E-01  
 TaunTetasx = -2,396E-10, TaunTetasy = -5,567E+01, TaunTetasz = -2,570E-10  
  
 Teta = 342,00, Normal = 3,476E+02, Tang1 = 1,030E+01, Tang2 = -3,768E+01  
 Sigmanpx = 7,152E+01, Sigmanpy = -7,126E-11, Sigmanpz = -1,112E+01  
 Sigmansx = -4,359E-12, Sigmansy = 2,872E+02, Sigmansz = 4,180E-11  
 Taunspx = -4,605E+00, Taunspy = 6,608E-12, Taunspz = -2,843E+01  
 Taunssx = -3,896E-11, Taunssy = 4,334E+01, Taunssz = 1,699E-12  
 TaunTetapx = -8,157E+00, TaunTetapy = -1,097E-10, TaunTetapz = -4,873E-01  
 TaunTetasx = -2,796E-10, TaunTetasy = -2,903E+01, TaunTetasz = -2,609E-10

Здесь значения суммарных нормальных напряжений  $\sigma_n$  обозначены Normal, значения суммарных касательных напряжений вдоль образующих  $\tau_{ns}$  обозначены Tang 1, значения суммарных касательных напряжений вдоль направляющей  $\tau_{n\theta}$  обозначены Tang 2 в области контакта периодонта и корня зуба. Нормальные и касательные напряжения для трех перемещений и трех поворотов зуба обозначены следующим образом:

– Sigmanpx, Taunspx, TaunTetapx — нормальные и касательные напряжения при поступательном перемещении вдоль оси симметрии корня

зуба  $Ox$  соответственно;  $Sigmanpy$ ,  $Taunspy$ ,  $TaunTetary$  — нормальные и касательные напряжения при поступательном перемещении вдоль оси  $Oy$  соответственно;

–  $Sigmanpz$ ,  $Taunspz$ ,  $TaunTetapz$  — нормальные и касательные напряжения при поступательном перемещении вдоль оси  $Oz$  соответственно;

–  $Sigmansx$ ,  $Taunssx$ ,  $TaunTetasx$  — нормальные и касательные напряжения при повороте зуба вокруг оси симметрии  $Ox$  соответственно;

–  $Sigmansy$ ,  $Taunssy$ ,  $TaunTetasy$  — нормальные и касательные напряжения при повороте зуба вокруг оси  $Oy$  соответственно;

–  $Sigmansz$ ,  $Taunssz$ ,  $TaunTetasz$  — нормальные и касательные напряжения при повороте зуба вокруг оси  $Oz$  соответственно;

## Содержание

Предисловие.....	3
ЧАСТЬ 1. Биомеханика системы «зуб–периодонт» .....	5
Глава 1. Строение и функции периодонта.....	5
1.1. Поддерживающий аппарат зуба .....	5
1.2. Периодонт (анатомия, гистология, физиология) .....	6
1.3. Функции периодонта .....	7
1.4. Строение периодонта.....	7
1.5. Гистология .....	9
1.6. Физиология периодонта .....	12
1.7. Биохимические процессы в периодонте .....	16
1.8. Перестройка тканей периодонта и ее значение для клиники ортопедической стоматологии.....	16
1.9. Перестройка альвеолярного отростка и ее значение.....	17
1.10. Биомеханика периодонта .....	19
1.11. Математическое моделирование .....	22
Глава 2. Решение задачи о равновесии периодонта как оболочки, ограниченной двумя составными эллиптическими гиперболоидами.....	24
Глава 3. Вывод формул для напряжений в области контакта периодонта с корнем зуба .....	43
Глава 4. Исследование жесткости зуба и напряженно-деформированного состояния периодонта в области контакта с корнем зуба при поступательном перемещении вдоль горизонтальной оси симметрии .....	50
Глава 5. Исследование жесткости и напряженно-деформированного состояния периодонта в области контакта с корнем зуба при поступательном перемещении вдоль вертикальной оси $Oz$ .....	76
Глава 6. Исследование влияния атрофии костной ткани и параметров корня на жесткость зуба при повороте под действием пары сил, лежащей в плоскости симметрии .....	87
Глава 7. Моделирование оси поворота зуба в ортопедической стоматологии под действием произвольной силы .....	92

Глава 8. Определение реакций опор и перемещений мостовидного протеза.....	96
Глава 9. Программная реализация формул для расчета напряженно-деформированного состояния периодонта .....	101
<b>ЧАСТЬ 2. Биомеханика системы зуб–костная ткань.....</b>	<b>136</b>
Глава 1. Строение верхней и нижней челюстей и физико-химические свойства костной ткани.....	136
1.1. Анатомия челюстей.....	136
1.2. Сегментное строение челюстей .....	139
1.3. Физико-химические показатели костной ткани челюстей.....	143
Глава 2. Методы подготовки костной ткани к ортодонтическому лечению.....	146
Глава 3. Характер и величина действующих сил ортодонтических аппаратов.....	151
Глава 4. Моделирование перемещений и поворотов корня зуба в костной ткани.....	153
4.1. Расчет перемещений корней зубов.....	153
4.2. Расчет перемещений корней зубов в нормальной и ослабленной костной ткани для различных клинических случаев .....	168
4.3. Влияние атрофии костной ткани на перемещения корней зубов .....	174
Глава 5. Расчет напряжений, возникающих в костной ткани под действием сосредоточенной нагрузки.....	180
Глава 6. Биомеханическое моделирование действия сосредоточенной нагрузки на многокорневые зубы.....	192
Глава 7. Визуализация напряженно-деформированного состояния нижней челюсти под воздействием сосредоточенной нагрузки с помощью метода голографической интерферометрии .....	198
7.1. Объект исследования, метод и методика эксперимента .....	198
7.2. Результаты эксперимента.....	203
7.2.1. Боковые нагрузки на клык с недекальцинированной лункой .....	203
7.2.2. Боковые нагрузки на клык с декальцинированной лункой .....	206

7.2.3. Осевые нагрузки на моляр с недекальцинированной лункой .....	207
7.2.4. Осевые нагрузки на моляр с декальцинированной лункой .....	212
7.2.5. Исследование деформационного поля челюсти до и после декальцинации при нагрузке на весь зубной ряд .....	213
Заключение .....	218
<b>Литература.....</b>	<b>219</b>
Приложение .....	227

Научное издание

**Наумович** Семен Антонович  
**Ивашенко** Сергей Владимирович  
**Босяков** Сергей Михайлович  
**Крушевский** Александр Евгеньевич

## **БИОМЕХАНИКА СИСТЕМЫ «ЗУБ–ПЕРИОДОНТ–КОСТНАЯ ТКАНЬ»**

Монография

Ответственный за выпуск С. А. Наумович  
В авторской редакции  
Компьютерная верстка Н. М. Федорцовой

Подписано в печать 29.01.09. Формат 60×84/16. Бумага писчая «КюмЛюкс».

Печать офсетная. Гарнитура «Times».

Усл. печ. л. 16,27. Уч.-изд. л. 12,1. Тираж 100 экз. Заказ 536.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Белорусский государственный медицинский университет».  
ЛИ № 02330/0494330 от 16.03.2009.  
ЛП № 02330/0150484 от 25.02.2009.  
Ул. Ленинградская, 6, 220006, Минск.