МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.

В. Г. ЛЕЩЕНКО, Н. И. ИНСАРОВА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Минск БГМУ 2013

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171 я73
Л54

Рекомендовано Научно-методическим советом университета в качестве учебно-методического пособия 17.04.2013 г., протокол № 8

Р е ц е н з е н т ы: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. медицинской и биологической физики Белорусского государственного медицинского университета М. В. Гольцев; д-р физ.-мат. наук, проф. Белорусского национального технического университета И. З. Джилавдари

Лещенко, В. Г.

Л54 Основы теории вероятностей : учеб.-метод. пособие / В. Г. Лещенко, Н. И. Инсарова. – Минск : БГМУ, 2013. – 47 с.

ISBN 978-985-528-849-8.

Рассматриваются основные понятия и теоремы теории вероятностей, законы распределения случайных величин и основные числовые параметры распределений, исследуются наиболее распространенные законы распределения случайных величин. Материал дан в соответствии с программой дисциплины «Высшая математика» для специальности «Фармация».

Предназначено для студентов фармацевтического факультета очной и заочной форм обучения.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171 я73

ISBN 978-985-528-849-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебно-методическое пособие по основам теории вероятностей предназначено для студентов фармацевтического факультета в соответствии с программой изучения дисциплины «Высшая математика» и может быть полезно студентам других специальностей, а также аспирантам и клиническим ординаторам медицинских вузов. В данном издании авторы попытались как можно проще и понятнее объяснить читателю основные идеи и понятия теории вероятностей, ознакомить их с видами распределений случайных величин и параметрами этих распределений.

Издание состоит из 3 небольших разделов, логически связанных друг с другом. В первом излагаются такие понятия, как случайное событие и его вероятность, виды случайных событий и теоремы теории вероятностей, причем изложение ведется не в строго формальной математической форме, а на доступном общепонятийном уровне. Во втором разделе рассматриваются случайные величины, законы их распределения и основные числовые характеристики этих распределений. В третьем — исследуются наиболее распространенные законы распределения случайных величин. Все разделы включают многочисленные примеры, поясняющие излагаемый материал.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Закономерность и случайность, случайная изменчивость в точных науках, биологии и медицине

Теория вероятностей — это область математики, которая изучает закономерности в случайных явлениях. Случайное явление — это явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта может как произойти, так и не произойти.

Очевидно, что в природе нет ни одного явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности, но в разных ситуациях мы учитываем их по-разному. Так, в ряде практических задач ими можно пренебречь и рассматривать вместо реального явления его упрощенную схему — «модель», предполагая, что в данных условиях опыта явление протекает вполне определенным образом. При этом выделяются самые главные, решающие факторы явления. Именно такая схема изучения явлений чаще всего применяется в физике, технике, механике, именно так выявляется основная закономерность, свойственная данному явлению и дающая возможность предсказать результат опыта по заданным исходным условиям. А влияние случайных, второстепенных факторов на результат опыта учитывается здесь случайными ошибками измерений, методика расчета которых будет рассмотрена ниже.

Однако для решения многих задач описанная классическая схема так называемых «точных наук» оказывается плохо приспособленной. Это задачи, в которых многочисленные, тесно переплетающиеся между собой случайные факторы играют заметную (часто определяющую) роль. Здесь на первый план выступает случайная природа явления, которой уже нельзя пренебречь. Такое явление необходимо изучать именно с точки зрения закономерностей, присущих ему как случайному явлению. В физике примерами таких явлений являются броуновское движение, радиоактивный распад, ряд квантово-механических процессов и др.

Предмет изучения биологов и медиков — живой организм, зарождение, развитие и существование которого определяются очень многими и разнообразными, часто случайными внешними и внутренними условиями. Именно поэтому явления и события живого мира во многом тоже случайны по своей природе.

Элементы неопределенности, сложности, многопричинности, присущие случайным явлениям, требуют создания специальных математических методов для их изучения. Именно разработка таких методов, установление специфических закономерностей, наблюдаемых в случайных явлениях, являются главными задачами теории вероятностей. Характерно, что эти закономерности выполняются лишь при массовом проявлении случайных явлений. При этом индивидуальные особенности отдельных случаев как бы взаимно погашаются, а усредненный результат для массы случайных явлений оказывается уже не случайным, а вполне закономерным. В значительной мере данное обстоятельство явилось причиной широкого распространения вероятностных методов исследования в биологии и медицине.

Рассмотрим теперь основные понятия теории вероятностей.

1.1. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Каждая наука, развивающая общую теорию какого-либо круга явлений, содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. Например, в геометрии — это понятие точки, прямой линии; в механике — понятия силы, массы, скорости и т. д. Такие основные понятия существуют и в теории вероятностей. Одно из них — случайное событие.

Случайное событие — это всякое событие (факт), которое в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Случайные события часто обозначаются буквами A, B, C и т. д. Приведем несколько примеров случайных событий: A — появление герба при бросании монеты; B — рождение девочки в данной семье; C — рождение ребенка с заранее заданной массой тела; D — возникновение эпидемического заболевания в данном регионе в определенный период времени и т. д.

Основная количественная характеристика случайного события — его вероятность. Пусть A — какое-то случайное событие. ***Вероятность случайного события***, обозначаемая как $P(A)$, — это математическая величина, которая определяет возможность его появления.

Рассмотрим два основных метода определения этой величины.

Классическое определение вероятности случайного события

Обычно классическое определение вероятности $P(A)$ случайного события A основано на результатах анализа *умозрительных опытов* (испытаний), суть которых определяется условием поставленной задачи. При этом вероятность случайного события $P(A)$ равна:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

где m — число случаев, благоприятствующих появлению события A; n — общее число возможных (точнее — равновозможных) случаев.

Таким образом, классическая вероятность случайного события равна отношению числа случаев (m), благоприятных появлению этого события, к общему числу (n) возможных случаев.

Пример 1.1. Лабораторная крыса помещена в лабиринт и должна избрать один из четырех возможных путей, так как лишь один из них ведет к поощрению в виде пищи. Определите вероятность выбора пути, ведущего к пище.

Решение. По условию задачи, из четырех равновозможных случаев (n = 4) событию A — «крыса находит пищу» — благоприятствует только один из них, т. е. m = 1. Тогда вероятность правильного выбора пути к пище равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$.

Пример 1.2. В урне находится 20 черных и 80 белых шаров. Из нее наугад вынимается шар. Определите вероятность того, что этот шар будет черным.

Решение. В этой задаче событие A состоит в извлечении черного шара. Количество всех шаров — это общее количество равновозможных случаев, т. е. $n = 20 + 80 = 100$, из них событие A — извлечение черного шара — возможно лишь в 20 случаях, т. е. m = 20. Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{100} =$ $= 0{,}2 = 20\ \%$.

Статистическое определение вероятности случайного события

Использование классического определения (1.1) не всегда возможно.

В биологии и медицине чаще применяют другой, статистический подход к определению вероятности случайного события A.

В этом случае вероятность $P(A)$ определяют, обобщая результаты *реально проведенных серий испытаний* (опытов).

Пусть была проведена серия из N опытов, (число N может быть определено заранее), и интересующее нас событие A произошло в M из них ($M < N$). Число (M) опытов, в которых это событие произошло, называют ***частотой*** его появления, а отношение частоты (M) к общему числу проведенных опытов (N) называют ***относительной частотой*** $P^*(A)$ появления случайного события A в данной серии опытов:

$$P^*(A) = \frac{M}{N}.$$

Эксперименты показали, что если серии испытаний, в каждой из которых их число N достаточно велико, проводятся в одинаковых условиях, то относительная частота обнаруживает свойство *устойчивости*: от серии к серии она изменяется мало, приближаясь с увеличением числа N опытов в серии к некоторой постоянной величине, которую и принимают за ***статистическую вероятность*** случайного события A:

$$P(A) = \lim \frac{M}{N} \text{ при } N \to \infty. \qquad (1.2)$$

Итак, статистической вероятностью $P(A)$ случайного события A называют предел, к которому стремится относительная частота появления этого события при неограниченном возрастании числа испытаний (при $N \to \infty$).

Приближенно статистическая вероятность равна относительной частоте появления этого события при большом числе испытаний (при большом N): $P(A) \approx P^*(A) = \dfrac{M}{N}$ при больших N.

Например, в опытах по бросанию монеты относительная частота появления «герба» при 12 000 бросаний оказалась равной 0,5016, а в серии из 24 000 бросаний — 0,5005. Видно, что с ростом N относительная частота этого события стремится к значению 0,5. Заметим, что классическое определение вероятности в данном случае дает такое же значение $P(A) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Пример 1.3. При врачебном обследовании 500 человек у 5 нашли опухоль в легких (о. л.). Определите относительную частоту и вероятность этого заболевания.

Решение. По условию задачи $M = 5$, $N = 500$, относительная частота $P^*(\text{о. л.}) = \dfrac{M}{N} = \dfrac{5}{500} = 0{,}01$. В этой задаче N достаточно большое и можно с хорошей точностью считать, что вероятность опухоли легких равна относительной частоте этого события: $P(\text{о. л.}) \approx P^*(\text{о. л.}) = 0{,}01 = 1\ \%$.

Из определения вероятности (1.1) следуют ее свойства:

1) вероятность случайного события — величина безразмерная;

2) вероятность случайного события всегда положительна и меньше единицы (заключена между нулем и единицей), т. е. $0 < P(A) < 1$;

3) если событие *всегда* происходит в результате опыта ($m = n$), то оно называется *достоверным* и его вероятность равна 1;

4) если событие *никогда* не происходит в результате опыта ($m = 0$), то оно называется *невозможным*, а его вероятность равна 0;

Таким образом, вероятность любого события — величина неотрицательная и не превышающая единицы: $0 \le P(A) \le 1$.

1.2. ВИДЫ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Все случайные события можно разделить на три основных вида:

– несовместные события;
– независимые события;
– зависимые события.

Для каждого вида событий характерны свои особенности и теоремы теории вероятностей.

Несовместные события и теорема сложения вероятностей. Полная группа событий

Случайные события (A, B, C, D и т. д.) называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1.4. Брошена монета. Появление «герба» исключает появление «решки» и наоборот. События «появился герб» и «появилась решка» несовместные.

Пример 1.5. При бросании игральной кости может выпасть только одна из цифр от 1 до 6. Эти события несовместные, так как выпадение какой-либо одной из этих цифр исключает выпадение в этом же опыте других цифр.

Для несовместных случайных событий справедлива теорема сложения вероятностей:

Вероятность появления одного, все равно какого, из нескольких несовместных событий $A_1, A_2, A_3 \dots A_k$, равна сумме их вероятностей.

$$P(A_1 \text{ или } A_2, \text{ или } \dots, \text{ или } A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k). \quad (1.3)$$

Пример 1.6. В урне находится 50 шаров: 20 белых, 20 черных и 10 красных. Найдите вероятность появления белого (событие A) или красного шара (событие B), когда шар наугад достают из урны.

Решение. $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$;

$P(A) = \dfrac{20}{50} = 0{,}4$; $P(B) = \dfrac{10}{50} = 0{,}2$.

$P(A \text{ или } B) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6 = 60\ \%$.

Пример 1.7. В классе 40 детей. Из них в возрасте от 7 до 7,5 лет 8 мальчиков (A) и 10 девочек (B). Найдите вероятность присутствия в классе детей такого возраста.

Решение. $P(A) = \dfrac{8}{40} = 0{,}2$; $P(B) = \dfrac{10}{40} = 0{,}25$.

$P(A \text{ или } B) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45 = 45\ \%$.

Следующее важное понятие — полная группа событий:

Несколько несовместных событий образуют полную группу, если в результате проводимых испытаний может появляться только одно из событий этой группы и никакое другое.

Пример 1.8. Стрелок производит выстрел по мишени. Обязательно произойдет только одно из следующих событий: попадание в «десятку» или «девятку», «восьмерку», …, «единицу» или промах. Эти 11 событий несовместны и образуют полную группу в данной серии испытании.

Пример 1.9. На экзамене в вузе студент может получить одну из следующих десяти оценок: 1, 2, 3, 4, …, 10. Эти десять событий несовместны и тоже образуют полную группу.

Если несовместные события A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий всегда равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (1.4)$$

Это важное утверждение часто используется при решении многих прикладных задач.

Часто возникают ситуации, когда в некоторых испытаниях может происходить лишь одно из двух несовместных событий. Такие события называют ***противоположными*** и обозначают A и $\overline{A}$. Эти два события составляют полную группу, поэтому сумма их вероятностей всегда равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (1.5)$$

Пример 1.10. При стрельбе по цели могут произойти лишь два события: A — попадание и $\overline{A}$ — промах. Эти события несовместны и противоположны. Они образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице.

Независимые случайные события, теорема умножения вероятностей

Случайные события называются ***независимыми***, если появление одного из них никак не влияет на вероятность появления других событий.

Пример 1.11. Если есть две или более урны с цветными шарами, то извлечение какого-либо шара из одной урны никак не повлияет на вероятность извлечения шаров из других урн.

Для независимых событий справедлива теорема умножения вероятностей:

Вероятность совместного (одновременного) появления нескольких независимых случайных событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A_1 \text{ и } A_2, \text{ и } A_3, \ldots, \text{ и } A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k). \qquad (1.6)$$

Совместное появление означает, что происходят события и A_1, и A_2, и A_3, …, и A_k.

Пример 1.12. Есть две урны. В одной находится 2 черных и 8 белых шаров, в другой 6 черных и 4 белых шара. Событие A_1 состоит в появлении белого шара из первой урны, A_2 — из второй. Найдите вероятность достать одновременно из этих урн по белому шару, то есть найдите $P(A_1 \text{ и } A_2)$.

Решение. Вероятность достать белый шар из первой урны $P(A_1) = \frac{8}{10} =$ $= 0{,}8$, а из второй — $P(A_2) = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Вероятность достать по белому шару из обеих урн одновременно равна $P(A_1$ и $A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,8 \cdot 0,4 =$ $= 0,32 = 32$ %.

Повторные независимые испытания, формула Бернулли

Предположим, что проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может либо появиться (успех) с постоянной вероятностью p, либо не появиться (неуспех) с вероятностью $q = 1 - p$.

Подобная схема испытаний была изучена академиком Российской академии наук Я. Бернулли еще в 1713 г. и названа его именем. В этом случае вероятность осуществления события A ровно m раз в серии из n испытаний $P_n(m)$ определяется ***формулой Бернулли***:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.7}$$

Множитель $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ дает число *возможных сочетаний* из n элементов по m, т. е. число разных способов, которыми из n элементов могут быть образованы группы по m элементов. В числителе и знаменателе этого выражения стоят факториалы чисел n, m и $(n - m)$. Напомним, что факториал числа n равен произведению всех последовательных целых чисел от 1 до n:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1) \cdot n$, соответственно, $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ и $(n - m)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - m)$. При этом считается, что $0! = 1$.

Установлено, что наиболее вероятное количество $\overline{m}$ успехов в n испытаниях по схеме Бернулли удовлетворяет неравенствам:

$$(n + 1)p - 1 \le \overline{m} \le (n + 1)p. \tag{1.8}$$

Пример 1.13. Предположим, что вероятность поражения мишени биатлонистом при одном выстреле составляет $p = 0,8$. Биатлонист делает серию из пяти выстрелов ($n = 5$). Определите наиболее вероятное число $\overline{m}$ попаданий в мишень, а также вероятности того, он поразит мишени: а) все пять раз; б) ни разу; в) хотя бы один раз; г) не менее трех раз.

Решение. Определим сначала наиболее вероятное число попаданий в мишень из соотношения (1.8), вычислив для этого произведение $(n + 1)p =$ $= (5 + 1) \cdot 0,8 = 4,8$. Получаем неравенства: $(4,8 - 1) \le \overline{m} \le 4,8$; следовательно, $\overline{m} = 4$.

Для нахождения требуемых вероятностей используем формулу Бернулли, учитывая, что $p = 0,8$ и $q = 1 - 0,8 = 0,2$.

а) вероятность пять раз ($m = 5$) поразить мишени при пяти выстрелах ($n = 5$) равна:

$$P_5(5) = \frac{5!}{5!(0)!} \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,8^5 \cdot 1 = 0,32768;$$

б) вероятность ни разу не поразить мишень ($m = 0$) из пяти выстрелов:

$$P_5(0) = \frac{5!}{0!5!} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^5 = 0{,}2^5 = 0{,}00032;$$

в) вероятность поразить хотя бы одну мишень $P_5(m \geq 1)$ равна сумме вероятностей поразить или 1, или 2, или 3, или 4, или все 5 мишеней. Чтобы уйти от громоздких вычислений, воспользуемся тем, что события попасть в мишень из пяти выстрелов 1, 2, 3, 4, 5 раз и ни разу ($m = 0$) образуют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна 1. Отсюда искомая вероятность $P_5(m \geq 1) = 1 - P_5(0) = 0{,}99968$.

г) вероятность поразить не менее трех мишеней $P_5(m \geq 3)$, равна сумме вероятностей поразить 3 или 4, или 5 мишеней. Используя теорему сложения и формулу Бернулли, получим:

$$P_5(m \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 + \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^1 + 0{,}8^5 =$$
$$= 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768 = 0{,}94208.$$

Ответ. Наиболее вероятное число успехов $\overline{m} = 4$; вероятность поражения всех 5 мишеней $P_5(5) = 0{,}32768$; вероятность промахнуться все 5 раз $P_5(0) = 0{,}00032$; вероятность поразить хотя бы одну мишень $P_5(\geq 1) = 0{,}99968$; вероятность поразить не менее 3 мишеней $P_5(\geq 3) = 0{,}94208$.

При очень больших значениях n вычисление вероятностей $P_n(m)$ по формуле Бернулли (1.7) становится практически невозможным, поскольку связано с очень громоздкими вычислениями. В таких случаях используют предельные теоремы Пуассона или Муавра–Лапласа для приближенных вычислений этих вероятностей.

Теорема Пуассона

Теорема Пуассона справедлива при *большом числе испытаний* ($n \to \infty$) и *низкой вероятности* успеха в отдельном испытании ($p \to 0$). Ее формулировка:

Если произведение $\lambda = np < 10$, то вероятность успешной реализации события А ровно m раз в большой серии испытаний приближенно дается формулой Пуассона.

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}. \tag{1.9}$$

Эта формула дает наилучшее приближение, если $\lambda = np < 1$.

Таким образом, вероятность $P(m)$ реализации маловероятного ($p << 1$) события ровно m раз при многократных ($n \geq 100$) независимых испытаниях можно приближенно находить по формуле Пуассона (1.9).

Локальная предельная теорема Муавра–Лапласа

Если же вероятности p успеха и неуспеха $q = 1 - p$ в отдельном испытании значительны ($0 < p < 1$), а число испытаний по схеме Бернулли весьма велико ($n \to \infty$), то, согласно этой локальной предельной теореме, вероятность наступления ровно m успешных исходов в n испытаниях приближенно рассчитывается по формуле:

$$\underset{n\to\infty}{P_n}(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{1.10}$$

где

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \tag{1.11}$$

Функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{1.12}$$

известна как функция Гаусса, она четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$ — и ее значения для положительных x приводятся в соответствующих таблицах (см. прил. 2). Поэтому при больших значениях вероятности p успеха в отдельном испытании и большом количестве n этих испытаний вероятность m успешных исходов можно вычислять по приближенной формуле:

$$\underset{n\to\infty}{P_n}(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{1.10a}$$

где значение x определяют по формуле (1.11), а $\varphi(x)$ находят по таблицам (см. прил. 2).

Формулы (1.10) и (1.10а) дают отличное приближение к формуле Бернулли (1.7), если число испытаний достаточно велико ($n \geq 100$) и произведение $npq \geq 20$, хотя на практике это приближение используют и при $npq \geq 10$. Значение вероятности, вычисленное по формуле (1.10), тем точнее, чем ближе друг к другу значения p и q, т. е. при $p \approx q \approx 0{,}5$, но при значениях p близких к 0 или 1 погрешность может быть весьма значительной. В этих случаях следует воспользоваться формулой Бернулли или Пуассона.

Рассмотрим несколько примеров, использующих схему испытаний Бернулли при больших n и сравним значения вероятностей, вычисленные по формулам Бернулли (1.7), Пуассона (1.9) и Муавра–Лапласа (1.10а).

Пример 1.14. Телефонная станция обслуживает 200 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение одного часа он позвонит по телефону, равна 0,02. Найти вероятность того, что в течение часа позвонят ровно 5 абонентов.

Решение. Прямой расчет по формуле Бернулли при $n = 200$, $p = 0{,}02$, $q = 1 - p = 0{,}98$, который мы здесь не приводим из-за громоздких вычислений, дает точное значение вероятности: $P_{200}(5) = 0{,}158$.

Приближенный расчет вероятности в данном случае следует вести по формуле Пуассона, поскольку $n = 200$ — велико, а вероятность $p = 0{,}02$ —

мала, то $np = \lambda = 200 \cdot 0{,}02 = 4 < 10$; $P(5) = \frac{4^5}{5!} \cdot e^{-4} = 0{,}156,$ что отлично согласуется с точным расчетом по формуле Бернулли.

Для сравнения проведем расчет и по локальной теореме Муавра–Лапласа. Сначала найдем произведение $npq = 200 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 \approx 4$. Вычислим параметр $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5-4}{\sqrt{4}} = 0{,}5$. По таблицам функции Гаусса находим $\varphi(0{,}5) = 0{,}352$. Теперь рассчитаем искомую вероятность:

$$P_{200}(5) = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \varphi(0{,}5) = \frac{0{,}352}{2} = 0{,}176.$$

Видно, что в данном случае лучшее приближение к точному значению $P_{200}(5) = 0{,}158$ дает формула Пуассона ($np = 4 < 10$): $P(5) = 0{,}156$ и значительно хуже — формула Муавра–Лапласа: $P_{200}(5) \approx 0{,}176$.

Пример 1.15. Несколько изменим условие предыдущей задачи. Телефонная станция обслуживает 200 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение одного часа он позвонит по телефону, достаточно велика и равна 0,3. Найти вероятность того, что в течение часа позвонят ровно 50 абонентов.

Решение. Расчет по формуле Бернулли при $n = 200$, $m = 50$, $p = 0{,}3$, $q = 1 - p = 0{,}7$ дает значение вероятности $P_{200}(50) = 0{,}01895$.

Поскольку $n = 200$ — велико, $npq = 200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 42 > 20$, то следует воспользоваться локальной предельной теоремой Муавра–Лапласа. Рассчитаем параметр $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 60}{\sqrt{42}} = -1{,}543$ и по таблицам найдем значение функции Гаусса: $\varphi(-1{,}543) = \varphi(1{,}543) = 0{,}121$. Теперь вычислим искомую вероятность по (1.12):

$$P_{200}(50) = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \varphi(1{,}543) = \frac{0{,}121}{6{,}48} = 0{,}01\,867.$$

Расчет по формуле Пуассона в данном случае дает большую ошибку, так как велико $p = 0{,}3$ и $\lambda = np = 200 \cdot 0{,}3 = 60 >> 10$:

$$P(50) = \frac{(60)^{50}}{50!} \cdot e^{-60} = 0{,}02327.$$

Таким образом, в при многократных ($n \geq 100$) независимых испытаниях по схеме Бернулли вероятности $P_n(m)$ можно *приближенно* рассчитывать по формуле Пуассона (1.9), если p мало и $\lambda = np < 10$, либо по формуле Муавра–Лапласа (1.10), если произведение $npq > 10$ (еще лучше при $npq > 20$). Наилучшие результаты формула Муавра–Лапласа дает при $p \approx q \approx 0{,}5$.

Зависимые события. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

Случайные события A и B называются ***зависимыми***, если появление одного из них (A) *изменяет* вероятность появления другого события (B). Поэтому для зависимых событий используются два значения вероятности: безусловная и условная вероятности*.

Если A и B — зависимые события, то вероятность наступления события B первым (т. е. до наступления события A) называется ***безусловной вероятностью*** этого события и обозначается $P(B)$, а вероятность наступления события B при условии, что событие A уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события B и обозначается как $P(B/A)$ или $P_A(B)$. Аналогичный смысл имеют безусловная $P(A)$ и условная $P(A/B)$ вероятности для события А.

Теорема умножения вероятностей для двух зависимых событий:

Вероятность одновременного наступления двух зависимых событий А и В равна произведению безусловной вероятности первого события на условную вероятность второго.

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A), \tag{1.13}$$

если первым наступает событие A, или

$$P(A \text{ и } B) = P(B) \cdot P(A/B), \tag{1.13а}$$

если первым наступает событие B.

Пример 1.16. В урне есть 3 черных шара и 7 белых. Найдите вероятность того, что из этой урны один за другим (при этом первый шар не возвращают в урну) достанут 2 белых шара.

Решение. Вероятность достать первый белый шар (событие A) равна $\frac{7}{10}$. После того, как его вынут, в урне остается 9 шаров, из них 6 белых.

Тогда вероятность появления второго белого шара (событие B) равна $P(B/A) = \frac{6}{9}$, и вероятность достать последовательно 2 белых шара равна

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0{,}47 = 47~\%.$$

Приведенная теорема умножения вероятностей для зависимых событий тоже допускает обобщение на любое количество событий. Например, для трех событий, связанных друг с другом:

$$P(A \text{ и } B, \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB).$$

Пример 1.17. В двух детских садах, которые посещают по 100 детей каждый, произошла вспышка инфекционного заболевания. Доли забо-

* Безусловную вероятность называют также *априорной* (т. е. до проведения опыта) вероятностью, а условную вероятность — *апостериорной* (т. е после проведения опыта, появления события и т. п.).

левших составляют соответственно $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{4}$, причем в первом учреждении 70 %, а во втором — 60 % заболевших — дети младше 3 лет. Случайным образом выбирают одного ребенка. Определите: 1) вероятность того, что выбранный ребенок относится к первому детскому саду (событие A) и болен (событие B); 2) вероятность того, что ребенок выбран из второго детского сада (событие C), имеет заболевание (событие D) и старше 3 лет (событие E).

Решение. 1. Вероятность того, что выбранный ребенок относится к первому детскому саду и болен равна $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{100}{200} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1 = 10\ \%$.

2. Вероятность того, что выбран ребенок из второго детского сада, он болен и старше 3 лет:

$$P(C \text{ и } D, \text{ и } E) = P(C) \cdot P(D/C) \cdot P(E/CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} = 0{,}05 = 5\ \%.$$

Формула полной вероятности

Пусть n несовместных случайных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу. Безусловные вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$ известны, и так как они образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Если некоторое случайное событие A связано с событиями $H_1, H_2, \ldots, H_n$ и известны условные вероятности появления события A с каждым из событий H_i, т. е. известны $P(A/H_1), P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$, при этом сумма этих условных вероятностей $P(A/H_i)$ может быть и не равна единице ($\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) \neq 1$), то вероятность наступления события A после какого-либо (все равно какого) из событий H_i определяется *формулой полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) \quad (1.14)$$

или коротко:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i) \quad (1.14а)$$

Пример 1.18. К посадке подготовлены 10 саженцев растений вида A, 15 саженцев вида B и 5 — вида C. Приживаемость при посадке составляет 60 % у вида A, 80 % у вида B и 90 % у вида C. Какова вероятность $P(Z)$ того, что выбранный наугад саженец приживется (событие Z)?

Решение. Всего имеется $N = 10 + 15 + 5 = 30$ саженцев. Вероятность выбрать саженец вида A составляет $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Вероятность выбрать саженец вида B равна $P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, а вида C — $P(C) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$.

Для определения вероятности того, что какой-либо из саженцев приживется, используем формулу полной вероятности (1.14):

$$P(Z) = P(A) \cdot P(Z/A) + P(B) \cdot P(Z/B) + P(C) \cdot P(Z/C) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{6} \cdot 0{,}9 = 0{,}75 = 75\ \%.$$

Формула Байеса

Если вероятность одновременного наступления зависимых событий A и B не зависит от того, в каком порядке они происходят, то

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

В этом случае условную вероятность $P(B/A)$ одного из событий можно найти, зная условную вероятность $P(A/B)$ второго события и безусловные вероятности $P(A)$ и $P(B)$ обоих событий:

$$P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)}. \tag{1.15}$$

Обобщением этой формулы на случай многих событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу и совместно с которыми может происходить событие A, является *формула Байеса*. Она позволяет рассчитать условную вероятность наступления события H_k после реализации события A, при этом в знаменателе формулы (1.15) следует записать полную вероятность (1.14) наступления события A:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)} \tag{1.16}$$

или кратко

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}. \tag{1.16а}$$

Сумма всех условных вероятностей (1.16а) при этом равна единице:

$$\sum_{k=1}^{n} P(H_k/A) = 1.$$

Формула Байеса нашла широкое применение не только в математике, но и в медицинских приложениях. Например, она используется в медицине для вычисления вероятностей тех или иных заболеваний при наличии у больного определенных признаков, характерных при заболевании. Так, если $H_1, \ldots, H_n$ — предполагаемые диагнозы заболеваний для данного пациента, A — некоторый признак (симптом), имеющий к ним отношение (определенный показатель анализа крови, мочи, деталь рентгенограммы, одышка и т. п.), и известны условные вероятности $P(A/H_k)$ проявления этого признака при каждом из диагнозов H_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$), то формула Байеса (1.16) позволяет вычислить условные вероятности заболеваний (диагнозов) $P(H_i/A)$ после того, как у пациента обнаружен характерный признак A.

Пример 1.19. При первичном осмотре больного предполагаются 3 диагноза: H_1, H_2, H_3. Их вероятности, по мнению врача, распределяются так: $P(H_1) = 0{,}5$; $P(H_2) = 0{,}17$; $P(H_3) = 0{,}33$. Таким образом, первоначально наиболее вероятным кажется первый диагноз.

Для уточнения диагноза назначается, например, анализ крови, в котором наблюдается увеличение СОЭ (событие A). Из клинических исследований заранее известно, что вероятности увеличения СОЭ при предполагаемых заболеваниях равны: $P(A/H_1) = 0{,}1$; $P(A/H_2) = 0{,}2$; $P(A/H_3) = 0{,}9$.

Теперь по формуле Байеса можно определить значения вероятностей предполагаемых заболеваний при увеличенном значении СОЭ:

$$P(H_1/A) = 0{,}13;\ P(H_2/A) = 0{,}09;\ P(H_3/A) = 0{,}78.$$

Эти цифры показывают, что с учетом дополнительных (лабораторных) данных наиболее реальным является не первый, а третий диагноз, вероятность которого теперь оказалась наибольшей.

Приведенный пример — простейшая иллюстрация того, как с помощью формулы Байеса можно формализовать логику врача при постановке диагноза и на этой основе создать методы компьютерной диагностики заболеваний.

Подобные расчеты, обычно выполняемые с помощью компьютера, лежат в основе методов формирования групп пациентов повышенного риска, связанного с наличием того или иного отягощающего фактора.

Формула Байеса очень полезна для оценки и многих других медико-биологических ситуаций, что станет очевидным при решении задач, приведенных в конце данного пособия.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В математике ***величина*** — это общее название различных количественных характеристик предметов и явлений. Длина, площадь, температура, давление и т. д. — примеры различных величин.

Величина, которая принимает различные числовые значения под влиянием случайных обстоятельств, называется ***случайной величиной***.

Примеры случайных величин: число больных на приеме у врача; точные размеры внутренних органов людей и т. д.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайная величина называется ***дискретной***, если она принимает только определенные, отделенные друг от друга значения, которые можно установить и перечислить.

Примеры дискретных случайных величин:

1) число студентов в аудитории — может быть только целым положительным числом (0, 1, 2, 3, 4, …, 20, …);

2) цифра, которая появляется на верхней грани при бросании игральной кости — может принимать лишь целые значения от 1 до 6;

3) относительная частота попадания в цель при 10 выстрелах — ее значения: 0, 0,1, 0,2, 0,3, …, 1;

4) число событий, происходящих за одинаковые промежутки времени: частота пульса, число вызовов скорой помощи за час, количество операций в месяц с летальным исходом и т. д.

Случайная величина называется ***непрерывной***, если она может принимать любые значения внутри некоторого интервала, который иногда имеет резко выраженные границы, а иногда и нет*. К непрерывным случайным величинам относятся, например, вес и рост взрослых людей, вес и объем мозга, количественное содержание ферментов у здоровых людей, размеры форменных элементов крови, pH крови, температура, давление атмосферного воздуха и т. п.

Понятие случайной величины играет определяющую роль в современной теории вероятностей, разработавшей специальные приемы перехода от случайных событий к случайным величинам.

Если случайная величина зависит от времени, то можно говорить о случайном процессе.

2.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Чтобы дать полную характеристику дискретной случайной величины, необходимо указать все ее возможные значения и их вероятности. Соответствие между возможными значениями дискретной случайной величины и их вероятностями называется ***законом распределения*** этой ***величины***.

* В этом случае считают, что значения некоторой случайной величины X могут лежать в интервале $(-\infty; \infty)$, т. е. на всей числовой оси.

Обозначим возможные значения случайной величины X через x_i, а соответствующие им вероятности через p_i*. Тогда закон распределения дискретной случайной величины можно задать тремя способами:

1. *В таблице,* которая называется *рядом распределения,* перечисляются все возможные значения дискретной случайной величины X и соответствующие этим значениям вероятности $P(X)$ (табл. 2.1)

Таблица 2.1

Ряд распределения случайной величины

X	1	2	…	i	…	n
$P(X)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

При этом для любого распределения сумма всех вероятностей p_i должна равняться единице (условие нормировки):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1. \qquad (2.1)$$

2. *Графически* — в виде ломаной линии, которую принято называть *многоугольником распределения* (рис. 2.1).

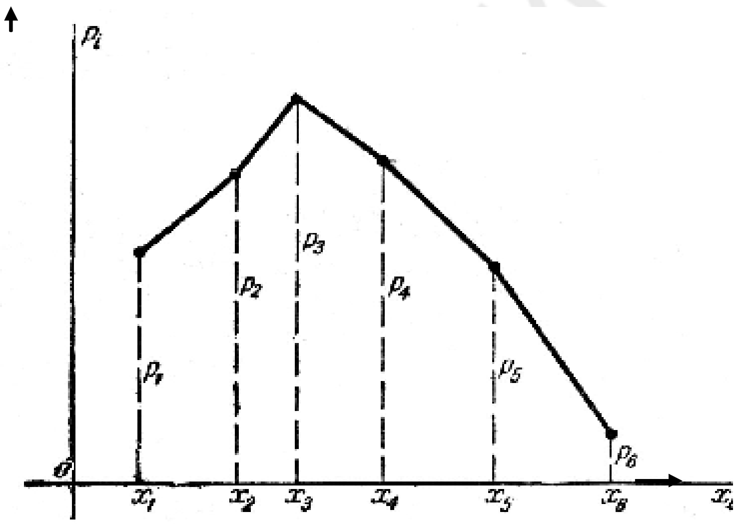


Рис. 2.1. Пример многоугольника распределения

Здесь по горизонтальной оси откладывают все возможные значения случайной величины x_i, а по вертикальной оси — соответствующие им вероятности p_i.

3. *Аналитически* — в виде формулы. Например, если вероятность попадания в цель при одном выстреле равна p, то вероятность поражения цели 1 раз при n выстрелах дается формулой $P_n(1) = n \cdot p \cdot (1 - p)^{n-1}$.

---

* Обычно случайные величины обозначают большими буквами латинского алфавита, а их возможные значения и вероятности этих значений — малыми.

Закон распределения часто представляют ***интегральной функцией распределения F(x)***, которая определяет вероятность того, что *случайная величина X* примет любое значение, *меньшее* заранее заданного x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Эта функция, часто называемая просто функцией распределения, в случае дискретной случайной величины равна *сумме вероятностей* всех значений x_i, меньших заданного x:

$$F(x) = P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_k), \text{ где } x_1, x_2, \ldots, x_k < x. \quad (2.2)$$

Функция распределения $F(x)$ определена для любых значений x от $(-\infty)$ до $(+\infty)$, а не только для возможных значений x_i случайной величины. При этом она равна нулю, если x меньше самого малого возможного значения x_1 и равна единице, если x превышает самое большое возможное значение x_N. График этой функции для дискретной случайной величины состоит из отдельных отрезков, параллельных оси OX.

Пример 2.1. Закон распределения дискретной случайной величины X задан табл. 2.2.

Таблица 2.2

Закон распределения случайной величины *X*

x_k	1	2	3	4	5	6	> 6
$p(x_k)$	0,15	0,21	0,25	0,22	0,13	0,04	
$F(x_k)$	0	0,15	0,36	0,61	0,83	0,96	1,00

В ее первой строке выписаны все возможные значения x_k, во второй строке — вероятности $p(x_k)$ этих значений, подчиняющиеся условию нормировки: $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, в третей — значения функции распределения $F(x_k)$, вычисленные по формуле (2.2):

$F(1) = P(X < 1) = 0;$

$F(2) = P(X < 2) = P(1) = 0{,}15;$

$F(3) = P(X < 3) = P(1) + P(2) = 0{,}15 + 0{,}21 = 0{,}36;$

$F(4) = P(X < 4) = P(1) + P(2) + P(3) = 0{,}15 + 0{,}21 + 0{,}22 = 0{,}61;$

$F(5) = P(X < 5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = F(4) + P(4) = 0{,}61 + 0{,}22 = 0{,}83;$

$F(6) = P(X < 6) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = F(5) + P(5) = 0{,}88 + 0{,}13 = 0{,}96;$

$F(> 6) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = F(6) + P(6) = 0{,}96 + 0{,}04 = 1.$

Многоугольник распределения вероятности $p(x_k)$ этой случайной величины представлен на рис. 2.2, а ее интегральная функция распределения $F(x)$ — на рис. 2.3, где стрелки означают, что $F(x_k) = \text{const}$ в интервале $(x_{k-1}; x_k]$.

Рис. 2.2. Многоугольник распределения дискретной случайной величины *X*

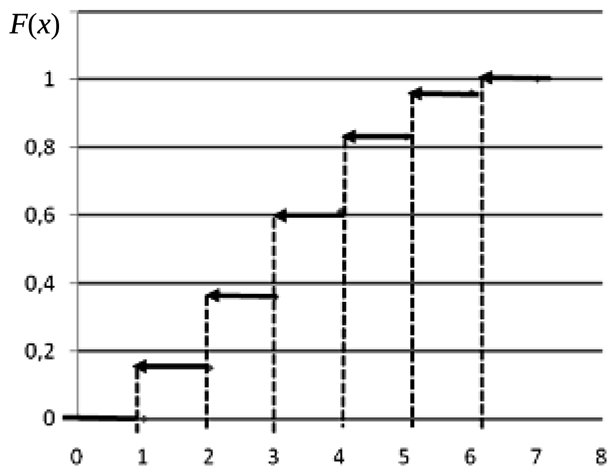


Рис. 2.3. Функция распределения (интегральная) $F(x)$ дискретной случайной величины *X*

2.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для непрерывных случайных величин невозможно применить закон распределения в виде таблицы, так как непрерывная величина имеет бесчисленное («несчетное») множество возможных значений, сплошь заполняющих некоторый интервал. Поэтому составить таблицу, в которой были бы перечислены все ее возможные значения, или построить многоугольник распределения нельзя. Кроме того, вероятность какого-либо ее конкретного значения очень мала (близка к 0). При этом различные области (интервалы) возможных значений непрерывной случайной величины обычно не являются одинаково вероятными. Таким образом, и здесь существует некий закон распределения.

Рассмотрим непрерывную случайную величину *X*, возможные значения которой сплошь заполняют некоторый интервал $[a, b]^*$. Закон распре-

* Если точные значения *a* и *b* неизвестны, то рассматривают весь интервал (–∞, +∞).

деления вероятностей такой величины должен позволять найти вероятность попадания ее значений в любой заранее заданный интервал (x_1, x_2), лежащий внутри [a, b] (рис. 2.4).

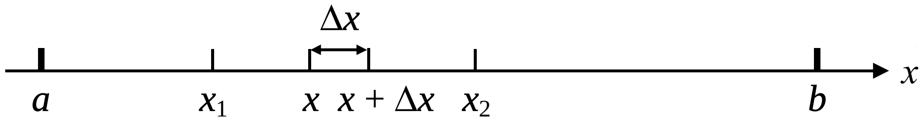


Рис. 2.4. Значения непрерывной случайной величины x, определенные в интервале [a, b]

Обозначим эту вероятность как $P(x_1 < X < x_2)$ или $P(x_1 \le X \le x_2)$.

Рассмотрим сначала очень малый интервал значений от x до ($x + \Delta x$) (рис. 2.4). Малая вероятность dP того, что случайная величина X примет какое-то значение из этого малого интервала (x, $x + \Delta x$), будет пропорциональна величине этого интервала Δx: $dP \sim \Delta x$. Введем коэффициент пропорциональности $f(x)$, который сам может зависеть от x, и получим:

$$dP = f(x) \cdot \Delta x. \tag{2.3}$$

Введенная здесь функция $f(x)$ называется ***плотностью распределения вероятностей*** случайной величины X или, коротко, ее ***плотностью вероятности*** (плотностью распределения). Уравнение (2.3) теперь можно рассматривать как дифференциальное уравнение, и тогда искомая вероятность попадания величины X в заданный интервал (x_1, x_2) равна

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{2.4}$$

Графически эта вероятность $P(x_1 \le X \le x_2)$ равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, кривой $f(x)$ и прямыми $X = x_1$ и $X = x_2$ (рис. 2.5), что следует из геометрического смысла определенного интеграла (2.4). Кривая $f(x)$ при этом называется ***кривой распределения***.

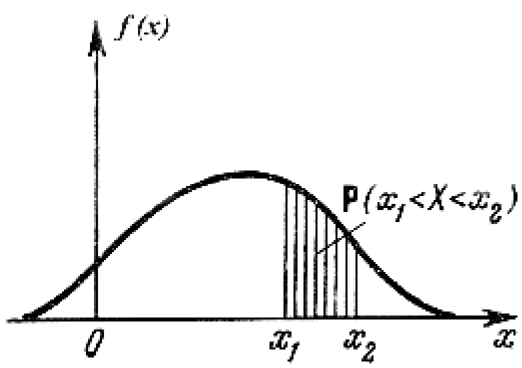


Рис. 2.5. Графическое представление вероятности попадания случайной величины X в заданный интервал (x_1, x_2) при известной функции распределения $f(x)$

Из (2.4) видно, что если известна функция $f(x)$, то изменяя пределы интегрирования, можно найти вероятность принятия случайной величиной X любого значения из интересующего интервала. Поэтому именно *задание функции f(x) полностью определяет закон распределения для непрерывных случайных величин X.*

Плотность вероятности $f(x)$ распределения непрерывной случайной величины подчиняется *условию нормировки*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1, \tag{2.5}$$

если известно, что все значения X лежат в интервале $[a, b]$, или же в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \tag{2.5а}$$

если границы интервала для значений X точно неизвестны.

Условия нормировки (2.5) или (2.5а) являются следствием того, что значения случайной величины X достоверно принадлежат интервалу $[a, b]$ или $(-\infty, +\infty)$ и означают, что ***площадь, ограниченная кривой распределения f(x) и осью абсцисс, всегда равна 1.***

Интегральная функция распределения F(x) непрерывной случайной величины равна вероятности принятия случайной величиной любого значения, меньшего заданного x: $F(x) = P(-\infty < X < x)$ — и определяется формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{2.6}$$

Эта функция всегда *возрастает* с ростом x от 0 (при $x = -\infty$) до 1 (при $x = +\infty$), поскольку ее значение в любой точке x_1 численно равно площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$, снизу — осью OX на интервале $(-\infty, x)$ (рис. 2.6).

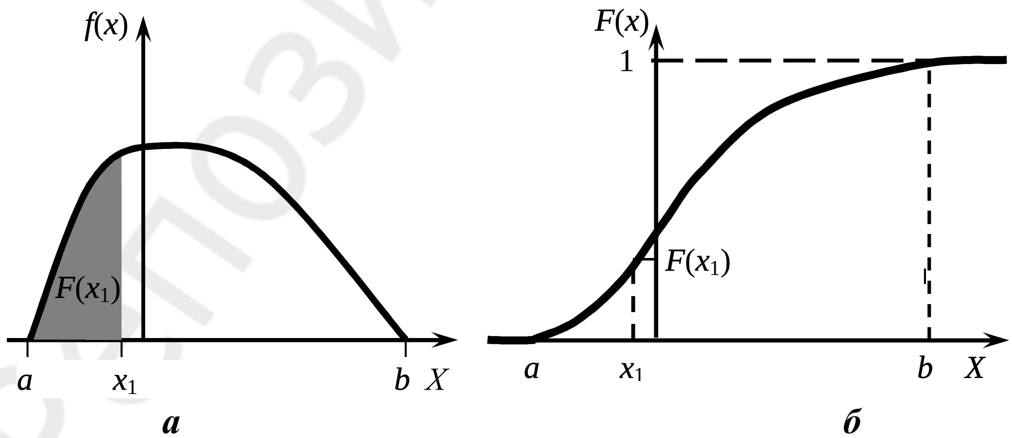


Рис. 2.6. Пример плотности распределения вероятности и интегральной функции распределения случайной величины X:
а — плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X, распределенной на участке $[a, b]$; площадь $F(x_1)$ равна значению функции распределения в точке x_1; *б* — интегральная функция $F(x)$ распределения той же величины

2.3. ЧИСЛОВЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон распределения дискретной или непрерывной случайной величины описывает ее полностью. Однако во многих практически значимых ситуациях удобно и полезно охарактеризовать эти распределения числовыми параметрами (характеристиками) случайных величин, главное назначение которых — выразить в сжатой форме наиболее существенные особенности их распределения. Важно, что эти параметры представляют собой *конкретные числовые значения*, которые можно определить из полученных в опытах данных, зачастую это определенные значения случайной величины.

В теории вероятностей и математической статистике используется достаточно много различных характеристик, здесь мы рассмотрим наиболее часто употребляемые характеристики положения и рассеяния.

Характеристики положения: математическое ожидание, мода, медиана

Математическое ожидание μ(X) случайной величины X является важнейшей характеристикой распределения и представляет собой вероятностный аналог среднего арифметического значения $\overline{X}$.

Для дискретной случайной величины оно вычисляется по формуле:

$$\mu(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \overline{X}. \tag{2.7}$$

Для непрерывной случайной величины X, определенной в интервале (a, b), либо в интервале $(-\infty; +\infty)$ математическое ожидание $\mu(X)$ соответственно определяется формулами:

$$\mu(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx \text{ или } \mu(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx, \tag{2.8}$$

где $f(x)$ — плотность вероятности, $dP = f(x)dx$ — элемент вероятности (аналог p_i) для малого интервала $\Delta x(dx)$.

Свойства математического ожидания:

1) $\mu(C) = C$, если $C = \text{const}$;

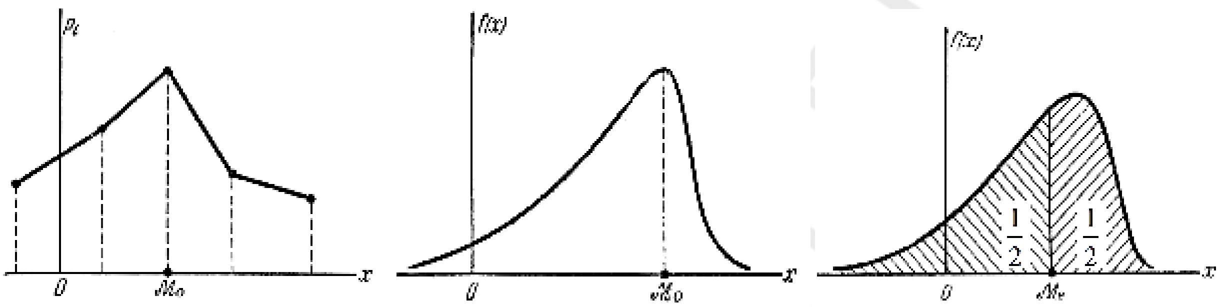
2) $\mu(C \cdot X) = C \cdot \mu(X)$ — постоянный множитель можно выносить;

3) $\mu(X \pm Y) = \mu(X) \pm \mu(Y)$ — математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме математических ожиданий этих случайных величин (как зависимых, так и независимых);

4) $\mu(X \cdot Y) = \mu(X) \cdot \mu(Y)$ — математическое ожидание произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий.

Модой Mo(X) дискретной случайной величины называют ее наиболее вероятное значение (рис. 2.7, *а*), а модой непрерывной случайной величины X значение x, при котором плотность вероятности максимальна (рис. 2.7, *б*).

Медианой Me(X) случайной величины называют такое ее значение X, которое делит все распределение на две равновероятные части. Другими словами для случайной величины одинаково вероятно принять значения меньше медианы Me(X) или больше нее: $P(X < \mathrm{Me}) = P(X > \mathrm{Me}) = = \frac{1}{2}$. Медианой Me($X$) обычно пользуются только для непрерывных случайных величин, хотя формально ее можно определить и для дискретных величин.



а **б** **в**

Рис. 2.7. Примеры значений моды и медианы некоторых распределений:
а — мода дискретного распределения; *б* — мода непрерывного распределения; *в* — медиана непрерывного распределения

Медиану непрерывной случайной величины можно вычислить по формуле

$$\int_{-\infty}^{\mathrm{Me}} f(x)dx = \frac{1}{2}. \qquad (2.9)$$

Графически медиана — это значение случайной величины, ордината которой делит площадь под кривой распределения пополам ($S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$) (рис. 2.7, *в*).

Если $\mu(X)$, Mo(X) и Me(X) совпадают, то распределение случайной величины называют симметричным, в противном случае — асимметричным.

Пример 2.2. Закон распределения дискретной случайной величины X задан представленной ниже табл. 2.3. Найдите неизвестную вероятность p_5, математическое ожидание и моду этой случайной величины.

Таблица 2.3

Распределение дискретной случайной величины

X	2	4	5	7	9
P	0,1	0,4	0,3	0,1	p_5

Решение. Неизвестную вероятность найдем из условия нормировки:

$0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 + p_5 = 1$.

Отсюда $p_5 = 1 – (0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1) = 1 – 0{,}9 = 0{,}1$.

$\mu(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_5p_5 = 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}1 = 4{,}9$.

$\mathrm{Mo}(X) = 4$, так как значению $x = 4$ соответствует наибольшая вероятность $p(4) = 0{,}4$.

Ответ: $p_5 = 0{,}1$; $\mu(X) = 4{,}9$; $\mathrm{Mo}(X) = 4$.

Характеристики рассеяния: дисперсия и среднее квадратичное отклонение

Дисперсия характеризует среднее рассеяние, разбросанность значений случайной величины X относительно ее математического ожидания. Само слово «дисперсия» означает «рассеяние», а центром рассеяния является математическое ожидание $\mu(X)$.

Дисперсия D(X) случайной величины X определяется как математическое ожидание квадрата отклонения X от ее математического ожидания $\mu(X)$:

$$D(X) = \mu[X - \mu(X)]^2 \text{ или } D(X) = \mu(X^2) - [\mu(X)]^2. \qquad (2.10)$$

Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}[x_i - \mu(X)]^2 p_i \text{ или } D(X) = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - [\mu(X)]^2. \qquad (2.11)$$

Дисперсия непрерывной величины, распределенной в интервале (a, b), равна:

$$D(X) = \int_a^b [x - \mu(X)]^2 \cdot f(x)dx \text{ или } D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - [\mu(X)]^2, \qquad (2.12)$$

а для интервала $(–\infty, \infty)$

$$\mathrm{D(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu(X)]^2 \cdot f(x)dx \text{ или } D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - [\mu(X)]^2. \qquad (2.13)$$

Но дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что весьма неудобно при оценке разброса в физических, биологических, медицинских и других приложениях. Поэтому обычно пользуются иным параметром, размерность которого совпадает с размерностью X. Это ***среднее квадратичное отклонение*** случайной величины X, которое обозначают $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \qquad (2.14)$$

Свойства дисперсии:

1) $D(C) = 0$, если $C = \mathrm{const}$;

2) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

3) $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$ — дисперсия алгебраической суммы независимых случайных величин равна алгебраической сумме дисперсий этих случайных величин.

Пример 2.3. Рассчитайте дисперсию и среднеквадратичное отклонение дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан табл. 2.3 (учитывая, что $p_5 = 0{,}1$):

Решение. Ранее (см. пример 2.2) мы уже нашли математическое ожидание этого распределения: $\mu(X) = 4{,}9$. Рассчитаем дисперсию:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - [\mu(X)]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_5^2 p_5 - [\mu(X)]^2 =$$

$$= 4 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}4 + 25 \cdot 0{,}3 + 49 \cdot 0{,}1 + 81 \cdot 0{,}1 - 4{,}7^2 = 3{,}29.$$

Среднеквадратичное отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}29} \approx 1{,}81.$

Ответ: $D(X) = 3{,}29$; $\sigma(X) \approx 1{,}81$.

Итак, математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия и среднее квадратичное отклонение являются наиболее важными числовыми характеристиками распределений случайной величины. Каждое из этих характеристик выражает какое-нибудь характерное свойство распределения.

3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

3.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Простейшим видом распределения непрерывной случайной величины является равномерное распределение. В этом случае плотность вероятности постоянна на интервале $[a, b]$:

$$\begin{cases} f(x) = f_0 = \text{const, при } a \le x \le b \\ f(x) = 0 \text{ при } x < a \text{ и } x > b. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Определим значение f_0 и остальные параметры этого распределения. Значение f_0 найдем из условия нормировки (2.5):

$$1 = \int_a^b f(x)\,dx = f_0 \int_a^b dx = f_0 \cdot (b-a),$$

отсюда

$$f_0 = \frac{1}{b-a}. \qquad (3.2)$$

Вычислим *математическое ожидание*:

$$\mu(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2(b-a)} \cdot x^2 \Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(a+b).$$

Следовательно, при равномерном распределении математическое ожидание μ(X) совпадает с серединой интервала [a, b] и равно среднему арифметическому значению: $\overline{X} = \mu(X) = \frac{1}{2}(a+b)$.

Мода при равномерном распределении не определена, так как все значения случайной величины равновероятны.

Медиана равномерно распределенной случайной величины также приходится на середину отрезка [a, b] и равна Me(X) = $\frac{a+b}{2}$, что можно доказать расчетом:

$\int_a^{\mathrm{Me}} f(x)dx = \frac{1}{2}$, у нас $f(x) = \frac{1}{b-a}$, поэтому $\int_a^{\mathrm{Me}} \frac{1}{b-a}dx = \frac{\mathrm{Me}-a}{b-a} = \frac{1}{2}$.

Отсюда $\mathrm{Me} - a = \frac{b-a}{2}$; $\mathrm{Me} = \frac{a+b}{2}$.

Интегральная функция распределения при $x \in (a, b)$ равна

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}. \qquad (3.3)$$

$F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$. Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ для равномерного распределения представлены на рис. 3.1.

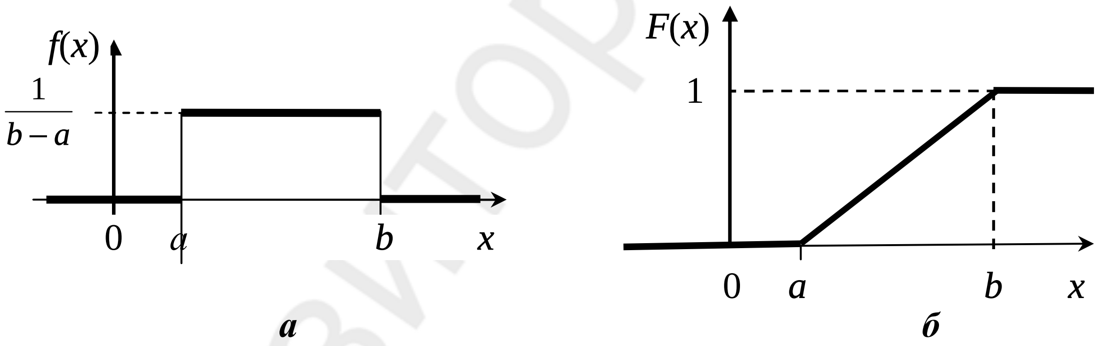


Рис. 3.1. Графики равномерного распределения случайной величины X:
а — плотность вероятности распределения $f(x)$; *б* — интегральная функция распределения $F(x)$

Рассчитаем *дисперсию* равномерного распределения:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - [\mu(X)]^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx - [\frac{a+b}{2}]^2 =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2) =$$

$$= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратичное отклонение равно $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \dfrac{|b-a|}{2\sqrt{3}}$.

Таким образом, равномерно распределенная на отрезке (a, b) случайная величина X имеет постоянную плотность распределения вероятности $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ для $x \in (a, b)$ и $f(x) = 0$ вне этого отрезка.

Интегральная функция равномерного распределения $F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ при $x \in (a, b)$, $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$. Математическое ожидание совпадает с медианой: μ = Me = $\dfrac{a+b}{2}$; дисперсия и среднеквадратичное отклонение распределения соответственно равны:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \text{ и } \sigma(X) = \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}. \qquad (3.4)$$

3.2. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Целочисленная случайная величина X, которая может принимать целые значения в интервале $[0, n]$, имеет биномиальное распределение с параметрами n и p, если ее плотность вероятности определяется формулой Бернулли (1.7):

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \text{ где } C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}. \qquad (3.5)$$

Напомним, что здесь $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X представлен табл. 3.1.

Таблица 3.1

Биномиальное распределение величины *X*

X	0	1	2	…	n
$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$	q^n	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$	$\frac{(n-1)n}{2} p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Параметры распределения (математическое ожидание μ, дисперсия D и среднеквадратичное отклонение σ дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, определяются соотношениями:

$$\mu = n \cdot p; \qquad (3.6)$$

$$D = n \cdot p \cdot q; \qquad (3.7)$$

$$\sigma = \sqrt{npq}. \qquad (3.8)$$

Вероятность $P_n(x)$ принимает наибольшее значение при x (мода распределения), равном целой части числа $(n + 1)p$. Если же это число целое, то случайная величина X имеет два наиболее вероятных значения: $\mathrm{Mo}_1(X) = (n + 1)p$ и $\mathrm{Mo}_2(X) = (n + 1)p - 1$.

На рис. 3.2 представлены многоугольники биномиальных распределений вероятности $P_n(X)$ проявления некоторой целочисленной случайной величины X в серии из $n = 10$ испытаний при различных значениях вероятностей p ее проявления в отдельно взятом испытании.

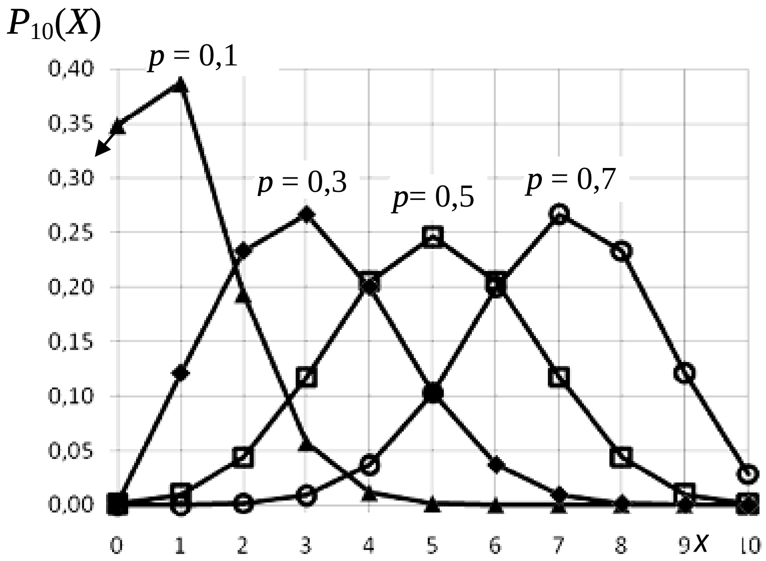


Рис. 3.2. Многоугольники биномиальных распределений $P_{10}(X)$ при $n = 10$ и разных значениях вероятности p проявления случайной величины X в отдельном испытании

Пример 3.1. Найти закон распределения числа m попаданий в мишень биатлонистом в серии из $n = 5$ выстрелов, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле p равна 0,8. Определить математическое ожидание μ, дисперсию D, среднеквадратичное отклонение σ и построить многоугольник распределения.

Решение. Для расчета вероятностей используем формулу Бернулли, учитывая, что $q = 1 - 0,8 = 0,2$ (см. пример 1.14):

$$P_5(0) = \frac{5!}{0!5!} 0,8^0 \cdot\ 0,2^5 = 0,2^5 = 0,00032;$$

$$P_5(1) = \frac{5!}{1!4!} 0,8^1 \cdot\ 0,2^4 = 4 \cdot 0,2^4 = 0,0064;$$

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!3!} 0,8^2 \cdot\ 0,2^3 = 0,0512;\ \ P_5(3) = \frac{5!}{3!2!} 0,8^3 \cdot\ 0,2^2 = 0,2048;$$

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!1!} 0,8^4 \cdot\ 0,2^1 = 0,4096;\ \ P_5(5) = \frac{5!}{5! \cdot 0!} 0,8^5 \cdot\ 0,2^0 = 0,32768.$$

Проверим выполнение условия нормировки:
$0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 \equiv 1.$

Закон распределения числа попаданий в мишень (случайная величина $X = m$) представим табл. 3.2. Многоугольник этого распределения показан на рис. 3.3.

Таблица 3.2

Распределение числа попаданий в мишень в серии из 5 выстрелов

x_m	0	1	2	3	4	5
$P_5(m)$	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

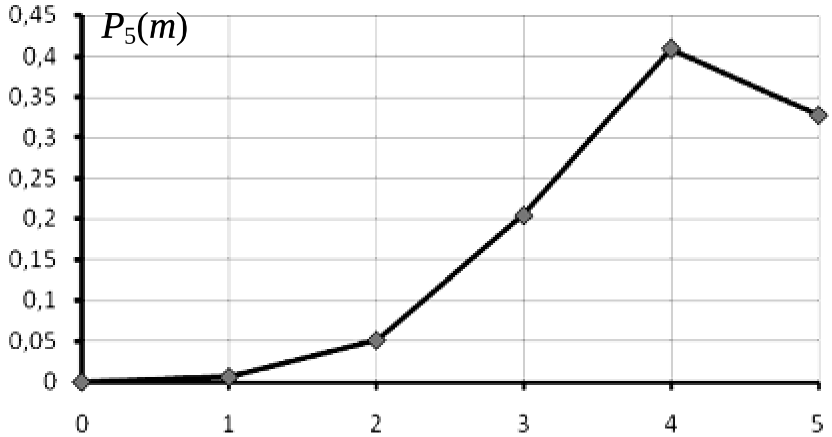


Рис. 3.3. Многоугольник биномиального распределения при $n = 5$, $p = 0,8$

Рассчитаем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение этого распределения:

$$\mu = np = 5 \cdot 0,8 = 4; \; D = npq = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,8; \; \sigma = \sqrt{0,8} = 0,894.$$

3.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА (ЗАКОН РЕДКИХ СОБЫТИЙ)

Говорят, что случайная величина X распределена по *закону Пуассона*, если она принимает целые значения $X = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ с вероятностями, определяемыми формулой Пуассона (1.9).

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \tag{3.9}$$

где $\lambda = np$ — параметр распределения Пуассона.

Распределение Пуассона (3.9) называют законом редких событий, поскольку оно применимо только при условии $p \to 0$, когда вероятность успешного исхода в отдельно взятом испытании мала (редкое событие).

Характерная особенность этого распределения:

$$\mu(X) = D = \lambda, \tag{3.10}$$

параметр распределения λ представляет собой как *математическое ожидание* случайной величины $\mu(X) = \lambda$, так и *дисперсию* распределения Пуассона $D = \lambda$. *Среднеквадратичное отклонение* равно:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\lambda}. \tag{3.11}$$

Таким образом, параметр λ в распределении Пуассона полностью определяет как вероятность $P(x_m)$ реализации величины x_m, так и все важнейшие числовые параметры распределения.

Многоугольники распределений Пуассона при разных значениях параметра λ приведены на рис. 3.4, а значения $P(m)$ при разных λ — в прил. 1.

Видно, что при малых λ наблюдается асимметрия кривой распределения, а при больших значениях λ > 1 распределение Пуассона приближается к нормальному (см. ниже) распределению. Поэтому распределение Пуассона следует использовать при малых значениях параметра λ < 10.

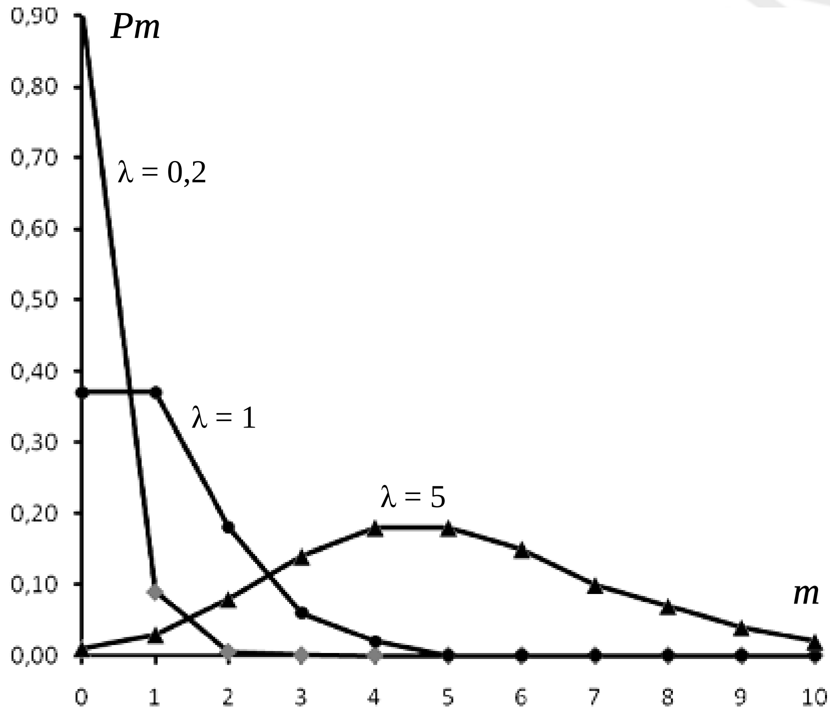


Рис. 3.4. Многоугольники распределений Пуассона при разных значениях параметра λ

Распределение Пуассона часто встречается в задачах, связанных с потоком событий, под которым понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то моменты времени.

***Примеры*:** поток вызовов на телефонной станции или станции скорой помощи, поток сбоев при работе ЭВМ, поток сердечных сокращений и т. д.

Поток событий называется регулярным, если они следуют друг за другом через строго определенные промежутки времени. Не проводя подробного анализа, укажем, что в таких задачах параметр λ — это среднее число событий, происходящих за время t: $\lambda = bt$, где b — среднее число событий, происходящих в единицу времени, которое обычно указывается в условии задачи или определяется в эксперименте. При этом вероятность того, что за время t произойдет m событий, определяется формулой (3.9).

Пример 3.2. Предположим, что на станцию скорой помощи поступает в среднем 90 вызовов в час. Найдите вероятность того, что за 2 минуты на станцию поступит ровно 3 вызова.

Решение. По условию число вызовов за 1 минуту равно $b = \dfrac{90}{60} = 1{,}5$. Тогда за 2 минуты $\lambda = bt = 1{,}5 \cdot 2 = 3$. Рассчитаем вероятность:

$$P(X = 3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = \frac{3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^{-3} = \frac{27}{6} e^{-3} = 4{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}224 = 22{,}4\,\%.$$

3.4. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Нормальный закон распределения играет исключительно важную роль в теории вероятностей и статистике. Во-первых, это наиболее часто встречающийся на практике закон распределения непрерывных случайных величин. Во-вторых, он является *предельным законом*, в том смысле, что к нему, как мы уже видели, при определенных условиях приближаются другие законы распределения (например, предельная локальная теорема Муавра–Лапласа, распределение Пуассона при больших $\lambda > 1$).

Нормальный закон распределения характеризуется следующим выражением для плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.12}$$

где x — текущие значения случайной величины X; μ и σ — ее математическое ожидание и среднеквадратичное отклонение, которые полностью определяют функцию распределения плотности вероятности $f(x)$. Нормальное распределение случайной величины X с математическим ожиданием μ и дисперсией $D = \sigma^2$ часто обозначают краткой записью: $X \sim N(\mu, D)$.

Итак, если случайная величина распределена по нормальному закону, то достаточно знать только два числовых параметра: $\mu(X)$ и σ, чтобы полностью знать закон ее распределения (3.12). График функции (3.12) называется *нормальной кривой распределения* (кривой Гаусса). Он имеет симметричный вид относительно ординаты $x = \mu(X)$. Максимальная плотность вероятности соответствует математическому ожиданию $\mu(X)$ и равна $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \dfrac{0{,}4}{\sigma}$. По мере удаления от $\mu(X)$ плотность вероятности $f(x)$ падает, постепенно приближаясь к нулю (рис. 3.5). Среднеквадратичное отклонение σ характеризует ширину кривой распределения (рис. 3.6).

Естественно, что при любых значениях μ и σ площадь, ограниченная графиком кривой $f(x)$ и осью OX, остается равной 1 (условие нормировки):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Изменение значения $\mu(X)$ в (3.12) не изменяет форму нормальной кривой, но приводит к ее сдвигу вдоль оси абсцисс. При возрастании σ максимум кривой понижается, кривая становится более пологой, растягиваясь вдоль оси абсцисс, тогда как при уменьшении s кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков (рис. 3.6).

Нормальное распределение симметрично, поэтому $\mu(X)$ = Mo(X) = = Me(X).

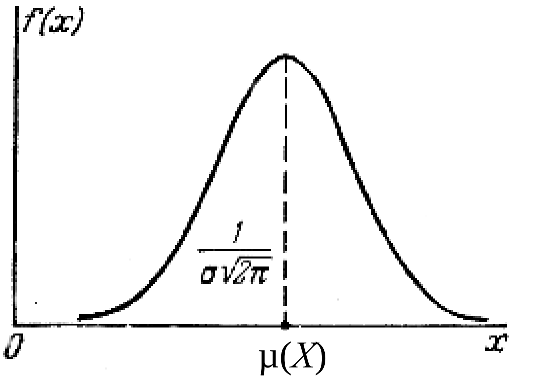


Рис. 3.5. Кривая нормального распределения случайной величины $X \sim N(\mu, D)$

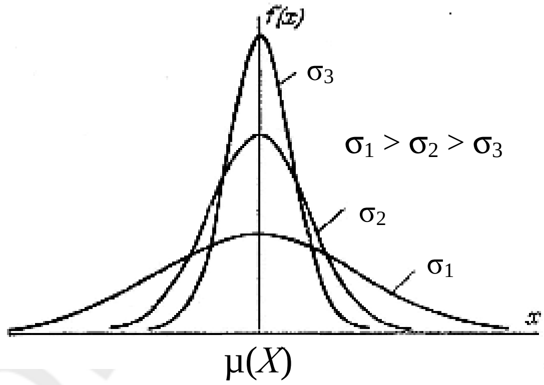


Рис. 3.6. Кривые нормального распределения при разных значениях σ: $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$

Любое нормальное распределение вида (3.12) можно введением новой переменной $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ (с учетом обязательного сохранения элемента вероятности $f(x)\,dx = \varphi(z)\,dz$) преобразовать в *стандартное* (нормированное) *нормальное* распределение, имеющее вид функции Гаусса:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \qquad (3.13)$$

Напомним, что эта функция четная — $\varphi(-z) = \varphi(z)$ — и ее график симметричен относительно оси ординат. Математическое ожидание и дисперсия стандартного нормального распределения соответственно равны нулю и единице: $\mu(Z) = 0$, $D(Z) = 1$. Поэтому *стандартное* (нормированное) *нормальное* распределение часто обозначают как $Z \sim N(0; 1)$.

Интегральная функция стандартного нормального распределения $F(z)$ равна:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (3.14)$$

Графики плотности вероятности $\varphi(z)$ и интегральной функции распределения $F(z)$ стандартного нормального распределения $Z \sim N(0;\ 1)$ приведены на рис. 3.7 и 3.8.

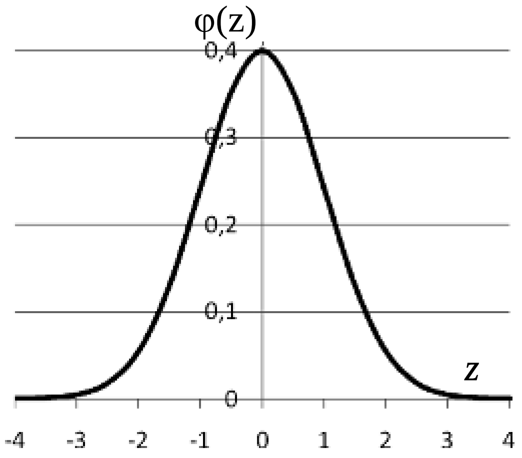


Рис. 3.7. График плотности вероятности $\varphi(z)$ стандартного нормального распределения

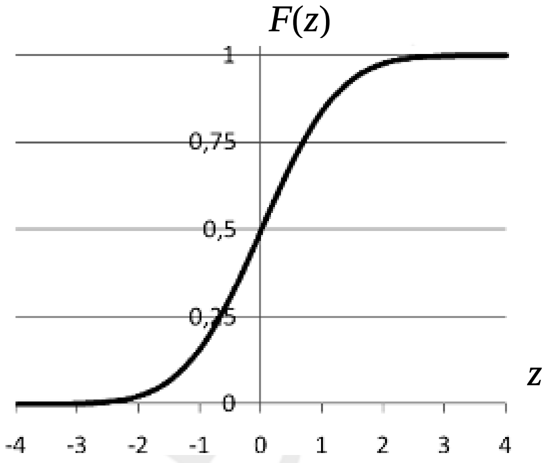


Рис. 3.8. Интегральная функция $F(z)$ стандартного нормального распределения

На практике часто требуется найти вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины в некоторый интервал $(x_1,\ x_2)$. Ее можно рассчитать, интегрируя плотность вероятности распределения в соответствующих пределах:

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx. \qquad (3.15)$$

Но эту вероятность легко найти, пользуясь таблицами стандартной интегральной функцией нормального распределения $F(z)$, где $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(z_2) - F(z_1). \qquad (3.16)$$

Значения функции $F(z)$ приведены в соответствующих таблицах, а также выражаются через известную функцию Лапласа $\Phi(z)$:

$$F(z) = 0{,}5 + \Phi(z), \qquad (3.17)$$

которая определяется соотношением:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{0}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \qquad (3.18)$$

Функция Лапласа (3.18) нечетная: $\Phi(-z) = -\Phi(z)$, ее положительные значения $\Phi(z)$ также приводятся в прил. 3.

Теперь вероятность попадания в заданный интервал (a, b) случайной величины X, распределенной по нормальному закону (3.12), равна:

$$P(a \leq X \leq b) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \qquad (3.19)$$

В заключение рассмотрим вероятность попадания значений нормально распределенной случайной величины X в интервалы, симметричные относительно $\mu(X)$, пользуясь формулами (3.14) либо (3.16).

Отложим вправо и влево от $\mu(X)$ отрезки, равные σ, 2σ и 3σ (рис. 3.9). Расчеты вероятностей попадания значений величины X в соответствующие интервалы дают следующие значения:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827 = 68{,}27$ %.

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545 = 95{,}45$ %.

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973 = 99{,}73$ %.

Из последнего равенства следует, что практически все (99,73 %) значения нормально распределенной случайной величины попадают в интервал ($\mu \pm 3\sigma$). Отсюда следует ***правило трех сигм***: значения нормально распределенной случайной величины X с параметрами $\mu(X)$ и σ *практически достоверно* лежат в интервале $\mu \pm 3\sigma$.

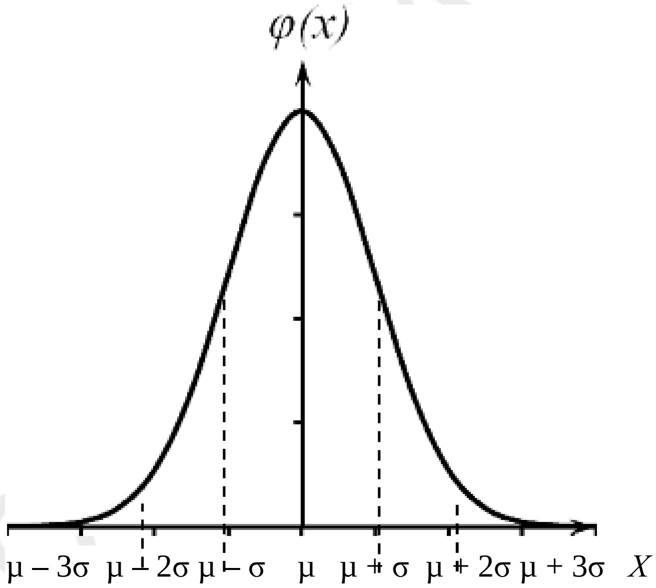


Рис. 3.9. Границы интервалов, в которые попадает значение случайной величины с вероятностями 68,27, 95,45 и 99,73 %

Пример 3.3. Известно, что для человека рН крови является нормально распределенной величиной со средним значением (математическим ожиданием) 7,4 и стандартным отклонением 0,2. Определите диапазон значений этого параметра.

Решение. Для ответа на этот вопрос воспользуемся правилом трех сигм. С вероятностью, равной 99,73 % (т. е. практически достоверно), можно утверждать, что диапазон значений рН для человека составляет 6,8–8.

3.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФОРМЫ — АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Характеристики положения (μ, Me, Mo*)* и рассеяния (*D*, σ) являются наиболее важными параметрами распределения. Однако они почти не характеризуют *форму кривой распределения*. Такую информацию дают асимметрия и эксцесс распределения.

Асимметрией распределения случайной величины называется числовой параметр γ, характеризующий различие в рассеивании значений этой случайной величины слева и справа от ее моды Mo(X) и равный отношению математического ожидания куба отклонения величины X от μ(X) к кубу среднеквадратичного отклонения:

$$\gamma = \frac{\mu[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}. \tag{3.20}$$

У симметричных распределений коэффициент асимметрии $\gamma = 0$. Если более длинная часть («хвост») кривой распределения $f(x)$ находится правее моды, то $\gamma > 0$, а если левее, то $\gamma < 0$ (рис. 3.10).

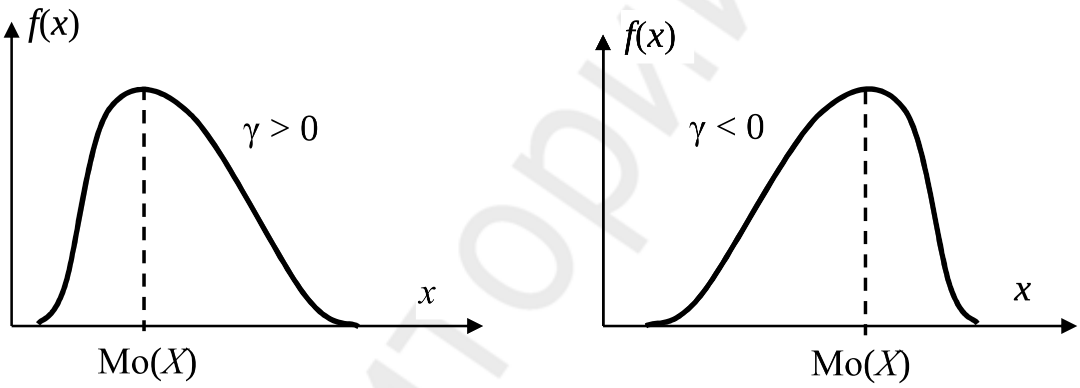


Рис. 3.10. Вид кривых распределения при разной асимметрии γ

Вторым параметром, характеризующим форму кривой, а именно ее островершинность, является ***эксцесс*** распределения δ, который пропорционален математическому ожиданию четвертой степени отклонения случайной величины X от μ(X) и обратно пропорционален четвертой степени среднеквадратичного отклонения σ(X):

$$\delta = \frac{\mu[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} - 3. \tag{3.21}$$

Эксцесс характеризует отличие кривой $f(x)$ плотности распределения в окрестности моды Mo(x) от кривой нормального распределения. Для нормального распределения (сплошная кривая на рис. 3.11) эксцесс равен нулю. Если же вершина распределения $f(x)$ более острая, чем у стандартного нормального распределения, то эксцесс положителен ($\delta > 0$), а если вершина более низкая и пологая, то он отрицателен ($\delta < 0$).

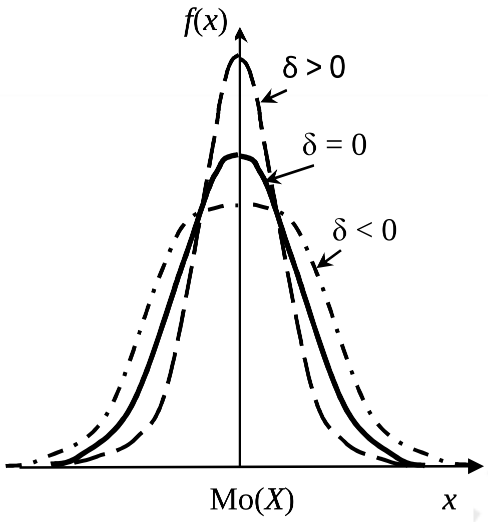


Рис. 3.11. Кривые распределения при разных значениях эксцесса δ

Асимметрию и эксцесс распределения удобнее рассчитывать на компьютере с помощью соответствующих встроенных формул процессора Excel, поэтому здесь примеры таких расчетов мы не приводим.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдите вероятность того, что набрана нужная цифра.

2. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня лишь, что эти цифры нечетные и разные. Какова вероятность, что номер набран правильно?

3. При испытании партии датчиков относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найдите число годных датчиков, если всего было проверено 200 штук.

4. Примерно 1 ребенок из 700 рождается с синдромом Дауна. В больнице большого города в год рождается 2500 детей. Определите ожидаемое число новорожденных с синдромом Дауна.

5. Некоторая вакцина формирует иммунитет по отношению к краснухе в 95 % случаев. Предположим, что вакцинировалось 30 % популяции и что вероятность заболеть краснухой у вакцинированного человека без иммунитета такая же, как у не вакцинированного. Какова вероятность того, что человек, заболевший краснухой, был вакцинирован?

6. Операция по пересадке кожи приводит к успеху в 40 % всех случаев. Пациенту делают пересадку кожи несколько раз подряд до тех пор, пока она не удастся. Чему равна вероятность того, что пересадка окажется успешной с третей попытки.

7. Студент знает 14 вопросов из 20. В билете 3 вопроса. Какова вероятность, что он знает хотя бы 1 из них?

8. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Чтобы сдать зачет, надо ответить не менее, чем на 3 вопроса из 4, имеющихся в билете. Взглянув на первый вопрос, студент увидел, что он его знает. Какова вероятность, что он сдаст зачет?

9. В магазине имеются импортные и отечественные телевизоры в соотношении 2 : 9. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока импортного телевизора равна 0,005, а отечественного — 0,01. Какова вероятность, что купленный телевизор выдержит гарантийный срок?

10. Курс доллара в течение квартала повышается с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса фирма получает прибыль с вероятностью 0,85, а при понижении — с вероятностью 0,5. Какова вероятность, что фирма получит прибыль?

11. В данный район поставляются изделия двух фирм в отношении 5 : 8. Среди изделий первой фирмы стандартные составляют 90 %, а у

второй — 85 %. Взятое наугад изделие оказалось стандартным. Какова вероятность, что оно изготовлено первой фирмой?

12. Большая популяция людей разделена на две одинаковые по численности группы. Одна из них в течение 10 лет придерживалась специальной диеты с высоким содержанием ненасыщенных жиров, а вторая группа была на обычной диете, богатой насыщенными жирами. По прошествии 10 лет сердечно-сосудистые заболевания были зафиксированы у 31 % людей первой группы и у 48 % — второй. Если у случайно выбранного человека оказалось сердечно-сосудистое заболевание, то какова вероятность того, что он принадлежит ко второй группе?

13. Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие. Предполагая, что 60 % мужчин этой возрастной группы курят, вычислить вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, курил?

14. Краснуха может оказаться причиной серьезных врожденных пороков развития у детей, если мать заболеет ею на ранних стадиях беременности. Вероятность пороков оценивается как 45, 20 и 5 %, если заболевание происходит, соответственно, на 1, 2 и 3-м месяцах беременности. Полагая, что вероятность заболеть краснухой одна и та же на любом месяце беременности, определите вероятность того, что мать заболела краснухой на 1-м месяце беременности, если ребенок родился с серьезными пороками по причине краснухи.

15. На полке 10 книг, из них 3 по математике. Наугад выбираются 3 книги. Какова вероятность, что среди них будет хоть 1 по математике?

16. При некотором массовом производстве изделий вероятность брака равна 0,01. Для контроля случайным образом отбирают 200 изделий. Какова вероятность, что среди этих изделий брак не встретится?

17. В аптеку поступили 1000 ампул некоего лекарственного препарата. Вероятность того, что при перевозке 1 ампула разобьется, равна 0,002. Найти вероятность того, что в аптеку поступит: а) 5 разбитых ампул; б) не более 5 разбитых ампул?

18. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: a_1 и a_2. Вероятность того, что X примет значение a_1, равна 0,6. Составьте закон распределения (ряд распределения) величины X.

19. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	–2	1	3	5
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Постройте многоугольник распределения. Найдите математическое ожидание $\mu(X)$, среднее арифметическое $\overline{X}$, моду Mo, дисперсию $D(X)$ и среднеквадратичное отклонение σ этой случайной величины.

20. Распределение непрерывной случайной величины X описывается плотностью вероятности $f(x) = a \sin x$ в интервале $(0, \frac{\pi}{3})$, а вне этого интервала $f(x) = 0$. Найдите вероятность того, что X примет какое-либо значение в интервале $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$.

21. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале (0, 1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найдите $\mu(X)$ и σ.

22. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию распределения.

23. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $\mu(X) = 10$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 2$. Найдите интервал, симметричный относительно $\mu(X)$, в который с вероятностью 0,9973 попадают значения величины X.

24. Диастолическое давление крови у женщин, страдающих гипертонической болезнью, имеет среднее значение 98 мм рт. ст. и стандартное отклонение 15 мм рт. ст. Определите интервал возможных значений этой величины.

25. Диастолическое давление крови имеет среднее значение 85 мм рт. ст. и стандартное отклонение 15 мм рт. ст. Определите вероятность того, что отклонение диастолического давления от среднего по абсолютной величине меньше 20 мм рт. ст.

Ответы

1 — 0,1. 2 — p = 0,05. 3 — 180. 4 — $m \approx 4$. 5 — 3/143. 6 — 0,144. 7 — $p = 0{,}9825$. 8 — $p = 0{,}9012$. 9 — $p = 0{,}991$. 10 — $p = 0{,}815$. 11 — $p = 0{,}3982$. 12 — $p = 8/79 \approx 0{,}61$. 13 — $p = 15/16 = 0{,}94$. 14 — $p = 9/14 \approx 0{,}64$. 15 — $p = 0{,}708$. 16 — $p(0)= e^{-2} \approx 0{,}135$. 17 — а) 0,036, б) 0,848.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. М., 2001.

2. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. М., 2001.

4. *Белько, И. В.* Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / И. В. Белько, Г. П. Свирид. Минск : Новое знание, 2004.

5. *Чашкин, Ю. Р.* Математическая статистика. Анализ и обработка данных / Ю. Р. Чашкин. Ростов н/Д : Феникс, 2010.

Таблица значений функции Пуассона

$$P(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

m \ λ	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,8**	**1**	**1,5**	**2**
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329	0,367879	0,22313	0,135335
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463	0,367879	0,334695	0,270671
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785	0,18394	0,251021	0,270671
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343	0,061313	0,125511	0,180447
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669	0,015328	0,047067	0,090224
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227	0,003066	0,014120	0,036089
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164	0,000511	0,003530	0,012030
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019	0,000073	0,000756	0,003437
8	0	0	0	0	0	0	0,000002	0,000009	0,000142	0,000859
9	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000024	0,000191
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000004	0,000038
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000007
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

m \ λ	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**
0	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316	0,011109	0,006738	0,004087	0,002479	0,001503	0,000912
1	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263	0,04999	0,033690	0,022477	0,014873	0,009772	0,006383
2	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525	0,112479	0,084224	0,061812	0,044618	0,03176	0,022341
3	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367	0,168718	0,140374	0,113323	0,089235	0,068814	0,052129
4	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367	0,189808	0,175467	0,155819	0,133853	0,111822	0,091226
5	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293	0,170827	0,175467	0,171401	0,160623	0,145369	0,127717
6	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196	0,12812	0,146223	0,157117	0,160623	0,157483	0,149003
7	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540	0,082363	0,104445	0,123449	0,137677	0,146234	0,149003
8	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770	0,046329	0,065278	0,084871	0,103258	0,118815	0,130377
9	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231	0,023165	0,036266	0,051866	0,068838	0,085811	0,101405
10	0,000216	0,00081	0,002296	0,005292	0,010424	0,018133	0,028526	0,041303	0,055777	0,070983
11	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925	0,004264	0,008242	0,014263	0,022529	0,032959	0,045171
12	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642	0,001599	0,003434	0,006537	0,011264	0,017853	0,026350
13	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197	0,000554	0,001321	0,002766	0,005199	0,008926	0,014188
14	0	0,000003	0,000014	0,000056	0,000178	0,000472	0,001087	0,002228	0,004144	0,007094
15	0	0,000001	0,000003	0,000015	0,000053	0,000157	0,000398	0,000891	0,001796	0,003311
16	0	0	0,000001	0,000004	0,000015	0,000049	0,000137	0,000334	0,00073	0,001448
17	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000044	0,000118	0,000279	0,000596
18	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000014	0,000039	0,000101	0,000232
19	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000012	0,000034	0,000085
20	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004	0,000011	0,00003
21	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000010
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001	0,000003
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000001

Таблица значений функции Гаусса

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};\ \varphi(-x)=\varphi(x)$$

x	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
0,0...	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,398	0,3977	0,3973
0,1...	0,397	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2...	0,391	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3...	0,3814	0,3802	0,379	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4...	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5...	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,341	0,3391	0,3372	0,3352
0,6...	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,323	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7...	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,292
0,8...	0,2897	0,2874	0,285	0,2827	0,2803	0,278	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9...	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0...	0,242	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1...	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2...	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3...	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4...	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5...	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,12	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6...	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,104	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7...	0,094	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8...	0,079	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9...	0,0656	0,0644	0,0632	0,062	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0...	0,054	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1...	0,044	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2...	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,031	0,0303	0,0297	0,029
2,3...	0,0283	0,0277	0,027	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4...	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,018
2,5...	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6...	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,011	0,0107
2,7...	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8...	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9...	0,006	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,005	0,0048	0,0047	0,0046
3,0...	0,0044	0,0043	0,0042	0,004	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1...	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2...	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,002	0,002	0,0019	0,0018	0,0018
3,3...	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4...	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,001	0,001	0,001	0,0009	0,0009
3,5...	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6...	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7...	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8...	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9...	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{0}^{z}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\,;\ \Phi(-z)=-\Phi(z)$$

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
0,00	0,00000	**0,50**	0,19146	**1,00**	0,34134	**1,50**	0,43319	**2,00**	0,47725	**3,00**	0,49865
0,01	0,00399	**0,51**	0,19497	**1,01**	0,34375	**1,51**	0,43448	**2,02**	0,47831	**3,05**	0,49886
0,02	0,00798	**0,52**	0,19847	**1,02**	0,34614	**1,52**	0,43574	**2,04**	0,47932	**3,10**	0,49903
0,03	0,01197	**0,53**	0,20194	**1,03**	0,34849	**1,53**	0,43699	**2,06**	0,48030	**3,15**	0,49918
0,04	0,01595	**0,54**	0,20540	**1,04**	0,35083	**1,54**	0,43822	**2,08**	0,48124	**3,20**	0,49931
0,05	0,01994	**0,55**	0,20884	**1,05**	0,35314	**1,55**	0,43943	**2,10**	0,48214	**3,25**	0,49942
0,06	0,02392	**0,56**	0,21226	**1,06**	0,35543	**1,56**	0,44062	**2,12**	0,48300	**3,30**	0,49952
0,07	0,02790	**0,57**	0,21566	**1,07**	0,35769	**1,57**	0,44179	**2,14**	0,48382	**3,35**	0,49960
0,08	0,03188	**0,58**	0,21904	**1,08**	0,35993	**1,58**	0,44295	**2,16**	0,48461	**3,40**	0,49966
0,09	0,03586	**0,59**	0,22240	**1,09**	0,36214	**1,59**	0,44408	**2,18**	0,48537	**3,45**	0,49972
0,10	0,03983	**0,60**	0,22575	**1,10**	0,36433	**1,60**	0,44520	**2,20**	0,48610	**3,50**	0,49977
0,11	0,04380	**0,61**	0,22907	**1,11**	0,36650	**1,61**	0,44630	**2,22**	0,48679	**3,55**	0,49981
0,12	0,04776	**0,62**	0,23237	**1,12**	0,36864	**1,62**	0,44738	**2,24**	0,48745	**3,60**	0,49984
0,13	0,05172	**0,63**	0,23565	**1,13**	0,37076	**1,63**	0,44845	**2,26**	0,48809	**3,65**	0,49987
0,14	0,05567	**0,64**	0,23891	**1,14**	0,37286	**1,64**	0,44950	**2,28**	0,48870	**3,70**	0,49989
0,15	0,05962	**0,65**	0,24215	**1,15**	0,37493	**1,65**	0,45053	**2,30**	0,48928	**3,75**	0,49991
0,16	0,06356	**0,66**	0,24537	**1,16**	0,37698	**1,66**	0,45154	**2,32**	0,48983	**3,80**	0,49993
0,17	0,06749	**0,67**	0,24857	**1,17**	0,37900	**1,67**	0,45254	**2,34**	0,49036	**3,85**	0,49994
0,18	0,07142	**0,68**	0,25175	**1,18**	0,38100	**1,68**	0,45352	**2,36**	0,49086	**3,90**	0,49995
0,19	0,07535	**0,69**	0,25490	**1,19**	0,38298	**1,69**	0,45449	**2,38**	0,49134	**3,95**	0,49996
0,20	0,07926	**0,70**	0,25804	**1,20**	0,38493	**1,70**	0,45543	**2,40**	0,49180	**4,00**	0,49997
0,21	0,08317	**0,71**	0,26115	**1,21**	0,38686	**1,71**	0,45637	**2,42**	0,49224	**4,05**	0,49997
0,22	0,08706	**0,72**	0,26424	**1,22**	0,38877	**1,72**	0,45728	**2,44**	0,49266	**4,10**	0,49998
0,23	0,09095	**0,73**	0,26730	**1,23**	0,39065	**1,73**	0,45818	**2,46**	0,49305	**4,15**	0,49998
0,24	0,09483	**0,74**	0,27035	**1,24**	0,39251	**1,74**	0,45907	**2,48**	0,49343	**4,20**	0,49999
0,25	0,09871	**0,75**	0,27337	**1,25**	0,39435	**1,75**	0,45994	**2,50**	0,49379	**4,25**	0,49999
0,26	0,10257	**0,76**	0,27637	**1,26**	0,39617	**1,76**	0,46080	**2,52**	0,49413	**4,30**	0,49999
0,27	0,10642	**0,77**	0,27935	**1,27**	0,39796	**1,77**	0,46164	**2,54**	0,49446	**4,35**	0,49999
0,28	0,11026	**0,78**	0,28230	**1,28**	0,39973	**1,78**	0,46246	**2,56**	0,49477	**4,40**	0,49999
0,29	0,11409	**0,79**	0,28524	**1,29**	0,40147	**1,79**	0,46327	**2,58**	0,49506	**4,45**	0,50000
0,30	0,11791	**0,80**	0,28814	**1,30**	0,40320	**1,80**	0,46407	**2,60**	0,49534	**4,50**	0,50000
0,31	0,12172	**0,81**	0,29103	**1,31**	0,40490	**1,81**	0,46485	**2,62**	0,49560	**4,55**	0,50000
0,32	0,12552	**0,82**	0,29389	**1,32**	0,40658	**1,82**	0,46562	**2,64**	0,49585	**4,60**	0,50000
0,33	0,12930	**0,83**	0,29673	**1,33**	0,40824	**1,83**	0,46638	**2,66**	0,49609	**4,65**	0,50000
0,34	0,13307	**0,84**	0,29955	**1,34**	0,40988	**1,84**	0,46712	**2,68**	0,49632	**4,70**	0,50000
0,35	0,13683	**0,85**	0,30234	**1,35**	0,41149	**1,85**	0,46784	**2,70**	0,49653	**4,75**	0,50000
0,36	0,14058	**0,86**	0,30511	**1,36**	0,41309	**1,86**	0,46856	**2,72**	0,49674	**4,80**	0,50000
0,37	0,14431	**0,87**	0,30785	**1,37**	0,41466	**1,87**	0,46926	**2,74**	0,49693	**4,85**	0,50000
0,38	0,14803	**0,88**	0,31057	**1,38**	0,41621	**1,88**	0,46995	**2,76**	0,49711	**4,90**	0,50000
0,39	0,15173	**0,89**	0,31327	**1,39**	0,41774	**1,89**	0,47062	**2,78**	0,49728	**4,95**	0,50000
0,40	0,15542	**0,90**	0,31594	**1,40**	0,41924	**1,90**	0,47128	**2,80**	0,49744	**5,00**	0,50000
0,41	0,15910	**0,91**	0,31859	**1,41**	0,42073	**1,91**	0,47193	**2,82**	0,49760		
0,42	0,16276	**0,92**	0,32121	**1,42**	0,42220	**1,92**	0,47257	**2,84**	0,49774		
0,43	0,16640	**0,93**	0,32381	**1,43**	0,42364	**1,93**	0,47320	**2,86**	0,49788		
0,44	0,17003	**0,94**	0,32639	**1,44**	0,42507	**1,94**	0,47381	**2,88**	0,49801		
0,45	0,17364	**0,95**	0,32894	**1,45**	0,42647	**1,95**	0,47441	**2,90**	0,49813		
0,46	0,17724	**0,96**	0,33147	**1,46**	0,42785	**1,96**	0,47500	**2,92**	0,49825		
0,47	0,18082	**0,97**	0,33398	**1,47**	0,42922	**1,97**	0,47558	**2,94**	0,49836		
0,48	0,18439	**0,98**	0,33646	**1,48**	0,43056	**1,98**	0,47615	**2,96**	0,49846		
0,49	0,18793	**0,99**	0,33891	**1,49**	0,43189	**1,99**	0,47670	**2,98**	0,49856		

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Лещенко Вячеслав Григорьевич
Инсарова Наталия Ивановна

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск В. Г. Лещенко
Редактор Н. В. Оношко
Компьютерная верстка Н. М. Федорцовой

Подписано в печать 18.04.13. Формат 60×84/16. Бумага писчая «Снегурочка».
Ризография. Гарнитура «Times».
Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,03. Тираж 150 экз. Заказ 568.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский государственный медицинский университет».
ЛИ № 02330/0494330 от 16.03.2009.
Ул. Ленинградская, 6, 220006, Минск.