

С. С. Наумович<sup>1</sup>, Ф. Г. Дрик<sup>1</sup>, Э. Л. Мачкалян<sup>2</sup>

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ СТРОЕНИЯ КОРНЕЙ ЗУБОВ НА ОСНОВЕ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

УО «Белорусский государственный медицинский университет»<sup>1</sup>,  
УО «Витебский государственный медицинский университет»<sup>2</sup>

Золотая пропорция является одной из самых интересных и загадочных тайн природы. На протяжении десятилетий она использовалась в стоматологии для создания эстетической улыбки. В данной статье представлены результаты исследования геометрических размеров корней зубов на основе золотой пропорции. Оценка размеров корней проводилась с учетом разделения каждого корня на два «армирующих». Полученные результаты измерений позволили нам построить численный ряд, соотношение значений которого довольно близко совпадает с соотношением чисел классического ряда Фибоначчи. Эти данные свидетельствуют о наличии в форме и геометрических размерах корней зубов человека признаков, свойственных многим живым организмам, а также объясняют закономерности восприятия функциональной нагрузки в периодонте.

**Ключевые слова:** золотое сечение, золотая пропорция, корень зуба, последовательность Фибоначчи.

**S. S. Naumovich, F. G. Drick, E. L. Machkalyan**

### GEOMETRIC REGULARITIES OF TOOTH ROOT MORPHOLOGY ON THE BASIS OF THE GOLDEN RATIO

The golden ratio is one of the most interesting and mysterious secrets of nature. For decades it has been used in dentistry to create an aesthetic smile. This article presents the results of a study of teeth roots geometrical sizes based on the golden section. Evaluation of the roots sizes was carried out taking into account the separation of each root into two «reinforcing roots». The obtained results allowed constructing a numerical series, in which the values ratio quite closely matches the numbers ratio of the classical Fibonacci sequence. These findings suggest the presence of features in the form and dimensions of the human teeth roots, which typical for many living organisms, as well as explain the many regularities in perception of functional load in periodontium.

**Key words:** golden ratio, golden proportion, tooth root, Fibonacci sequence.

Природа, создавая неисчислимое многообразие видов живых существ, в том числе и человека, в структурной организации не только целых организмов, но и их отдельных органов, широко использовала свою уникальную константу – золотую пропорцию. На протяжении веков правило золотого сечения использовалось в различных аспектах человеческой деятельности: живописи, скульптуре, архитектуре и даже музыке. Связано это с тем, что использование закономерностей золотой пропорции обеспечивает эстетическое восприятие объектов, являясь краеугольным камнем красоты. Так как эстетика является неотъемлемой частью работы врача-стоматолога, то абсолютно естественным стало использование данной пропорции при конструировании идеальной улыбки [2, 9].

На протяжении нескольких последних десятилетий были опубликованы результаты научных

исследований, оценивающих эстетику лица в целом [3, 6, 10], а также передних зубов с точки зрения золотой пропорции. Именно соотношению видимой части 6 фронтальных зубов верхней челюсти на основании золотой пропорции посвящено наибольшее количество статей, цитируемых в основных базах научной медицинской литературы [1, 4, 5]. Однако представленные в них результаты зачастую довольно противоречивы. Так многие авторы указывают на четкую связь эстетики улыбки с золотым сечением, в то же время результаты многих эпидемиологических исследований не выявили никакой взаимосвязи в ширине резцов и клыков [7, 8].

В математике, две величины находятся в золотой пропорции, если их отношение такое же, как отношение их суммы к большей из двух величин. Рисунок 1 иллюстрирует геометрическую связь между отрезками находящимися в золотой пропорции.

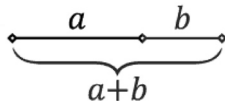


Рисунок 1. Соотношение частей отрезка в золотой пропорции

Алгебраически данное выражение, для величины  $a$  и  $b$ , при  $a > b > 0$ , будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{b}{a} = \varphi,$$

где греческая буква фи ( $\varphi$ ) представляет собой золотое сечение и равняется 1,6180339887...

В литературе встречается много синонимов золотой пропорции: золотая середина, золотое сечение, божественная пропорция, божественное сечение (от латинского Sectio Divina), золотой номер.

Довольно тесно со значением золотой пропорции связана последовательность Фибоначчи, представляющая собой ряд целых чисел:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987... и т. д.

По определению, первые две цифры в последовательности Фибоначчи 1 и 1 или 0 и 1, в зависимости от выбранной начальной точки последовательности, и каждое последующее число равно сумме двух предыдущих. Впервые упоминание о ряде Фибоначчи встречается еще в древнеиндийских трактатах по математике. На Западе данная последовательность чисел впервые появляется в книге Liber Abaci (1202) Леонардо из Пизы, известного как Фибоначчи. Он рассчитывал рост идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов.

Особенность данной последовательности цифр заключается в том, что если любое число в ряду разделить на его предшественника, то полученное значение будет близко к золотой пропорции. В начале последовательности соотношения поочередно меньше и больше  $\varphi$ , и приближаются к  $\varphi$  по мере увеличения чисел Фибоначчи, например,  $987/610 \approx 1,6180327868852$ .

При рассмотрении формы многих живых существ можно увидеть сходства с рядом Фибоначчи и золотым сечением. Количество спиралей по и против часовой стрелки при распределении семян подсолнуха – это два числа идущих подряд в последовательности Фибоначчи, аналогично заворачиваются раковины моллюсков и, даже, некоторые спиральные галактики. И хотя в стоматологической научной литературе довольно много упоминаний о связи морфологии зубо-

челюстной системы с золотой пропорцией, однако все исследования сконцентрированы исключительно на изучении коронок зубов и анатомии лица. В то же время широкое распространение правила золотого сечения в природе может объясняться не только стремлением к эстетике, но функциональным смыслом. Корни зубов, не имея прямого эстетического значения, в основном несут чисто функциональную нагрузку. Поэтому довольно актуальным может быть оценка размеров корней зубов с точки зрения золотой пропорции и ее влияния на функциональное предназначение зубов.

**Целью исследования** явилось определение связи геометрических размеров корней зубов с правилом золотого сечения и последовательностью Фибоначчи.

### Материалы и методы

Для достижения поставленной цели в качестве объекта исследования нами были отобраны удаленные зубы, с хорошо сохранившимися корнями, в количестве 36 штук. Распределение зубов по групповой принадлежности представлено в таблице 1.

Таблица 1. Распределение зубов по групповой принадлежности

	Резцы	Клыки	Премоляры (одно- и двухкорневые)	Двухкорневые моляры	Трехкорневые моляры	Всего
Количество, n	11	5	7	7	6	36

Данные пациентов (пол, возраст, национальность и т. п.), которым были удалены зубы, не учитывались в исследовании. При планировании исследования в качестве параметров сравнения для каждого зуба были выбраны длина корня,  $l$  – размер от эмалево-цементной границы до верхушки корня и наибольший размер поперечного сечения корня зуба на уровне шейки –  $d$ . Для большинства корней наибольшим являлся размер в вестибуло-оральном направлении.

Однако визуально исследуя заготовленные для измерения образцы зубов, нами было установлено, что основная масса их в продольном сечении представлена не одним треугольником (конусом), а имеет четкие очертания из двух сросшихся между собой конусов. Таким образом, поперечное сечение корней имеет форму «восьмерки» (рисунок 2). Для более полной оценки закономерностей размеров мы добавили к двум заранее планировавшимся параметрам еще 4 линейных размера, включающих длины каждого из «армирующих» корней –  $l_1$  и  $l_2$ , а также их

## □ Оригинальные научные публикации

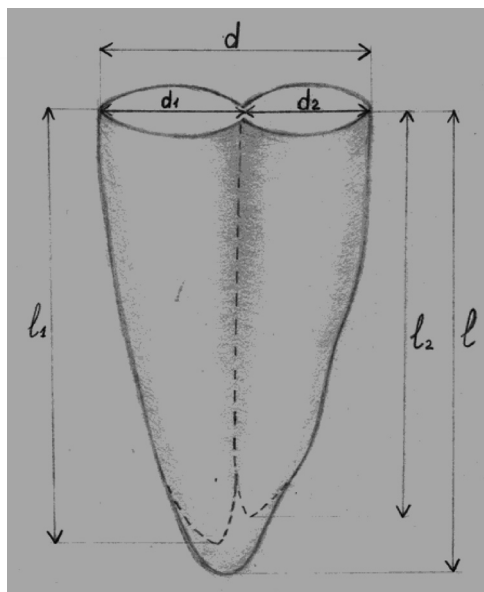


Рисунок 2. Схематическое изображение корня зуба с исследуемыми размерами

большие поперечные размеры –  $d_1$  и  $d_2$ , которые чаще всего не совпадают. Плоскость сращения корней всегда ориентирована по нормали к альвеолярной дуге, а сама зона их соединения представлена в виде продольной вмятины на мезиальной и дистальной поверхностях корней. Как видно из рисунка 2, длина корня  $l$  всегда больше длин каждого из «армирующих» корней  $l_1$  и  $l_2$ .

Таблица 3. Соотношение чисел в классическом ряду Фибоначчи

Ряд Фибоначчи	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
Соотношение		2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	1,618	1,617	1,618	1,618	1,618

Из таблицы 3 видно, что значение соотношения 1,618, равное золотой пропорции, достигается не сразу, а по мере увеличения значений числового ряда. Возможно, этот математический феномен означает, что природа допускает отклонение от золотой пропорции в небольших пределах.

### Результаты и обсуждение

В результате измерений отобранных образцов зубов и статистической обработки полученных результатов была составлена таблица 4 с данными средних значений отношений измеряемых параметров ( $d$ ,  $l$ ,  $d_1$ ,  $l_1$ ,  $d_2$ ,  $l_2$ ) как для отдельных групп зубов, так и для всех образцов.

Отмечается довольно значительное отличие в средних размерах отношения длины корня к поперечному размеру в зависимости от групповой принадлежности зуба. Так для двухкорневых моляров оно составляет 1,667, а для трехкорневых моляров и резцов – около 2,3. Данное соотношение увеличивается для «армирующих» корней, в среднем составляя 2,584 и 2,598.

На 36 опытных образцах зубов имелось 55 корней, на которых был выделен 81 «армирующий» корень. Таким образом, для каждого однокорневого зуба и каждого корня многокорневого зуба было проведено 6 линейных измерений с помощью штангенциркуля с точностью до десятых долей мм.

После измерения размеров каждого корня, полученные данные ранжировались в численный ряд, составленный по закону Фибоначчи, где каждое последующее число является суммой двух предыдущих, кроме этого вычислялось соотношение последующего значения к предыдущему (таблица 2). Аналогичные параметры определялись для размеров  $d_1$ ,  $l_1$  и  $d_2$ ,  $l_2$ .

Таблица 2. Схема ранжирования данных измерения корней зубов согласно ряду Фибоначчи

Числовой ряд	$d$	$l$	$d+l$	$d+l+l$	$d+l+l+d+l$
Соотношение		$l/d$	$l+d/l$	$2l+d/d+l$	$3l+2d/2l+d$

Кроме измерений каждого зуба были определены средние величины каждого параметра как для отдельных групп зубов, так и для всех зубов в исследовании. Полученное множество средних значений соотношений сравнивалось со значениями отношений классического ряда Фибоначчи (таблица 3).

Визуально определяемая форма корней в виде «восьмерки» в поперечном сечении с плоскостью сращения корней, ориентированной перпендикулярно направляющей к альвеолярной дуге, на наш взгляд, обеспечивают большую устойчивость корней зубов к нагрузкам в вестибуло-оральном направлении. Меньший поперечный размер корней в мезио-дистальном направлении компенсируется наличием аппрокимальных контактов зубов, частично перераспределяющих нагрузку.

Сравнивая средние значения отношений размеров корней зубов, приведенные в таблице 4 (нижняя строка, колонки 1, 2, 3), со значениями отношений классического ряда Фибоначчи (таблица 3), видно почти полное их совпадение. Это свидетельствует о том, что природа в процессе эволюционного развития зубов человека обеспечила более надежную форму корня в плане восприятия нагрузок. В то же время для «армирующих» корней характерна большая амплитуда колебаний величины отношений (таблица 4, колонки 4–9, нижняя строка). Это говорит о мень-

Таблица 4. Средние величины отношений размеров корней и построение последовательности чисел согласно ряду Фибоначчи

Зубы	Средние значения отношений								
	$l/d$	$l + d/l$	$2l + d/d + l$	$l_1/d_1$	$l_1 + d_1/l_1$	$2l_1 + d_1/d_1 + l_1$	$l_2/d_2$	$l_2 + d_2/l_2$	$2l_2 + d_2/d_2 + l_2$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Резцы	2,258	1,444	1,692	2,722	1,391	1,720	2,817	1,375	1,729
Клыки	1,9	1,542	1,649	2,520	1,667	1,708	2,568	1,395	1,705
Премоляры	1,928	1,533	1,653	2,341	1,467	1,651	2,4	1,461	1,684
Двухкорневые моляры	1,667	1,614	1,620	2,575	1,390	1,718	2,526	1,402	1,709
Трехкорневые моляры	2,235	1,454	1,678	2,766	1,410	1,706	2,682	1,380	1,726
Все образцы	1,997	1,517	1,658	2,584	1,465	1,7	2,598	1,402	1,710

шей надежности функционирования корней имеющих простую коническую форму, на боковых поверхностях которых будет возникать больше касательных нагрузок. Именно тангенциальные нагрузки на сдвиг являются наиболее негативными для периодонта.

Таким образом, полученные результаты по геометрическим размерам корней зубов объясняют особенности их строения с точки зрения наиболее оптимального восприятия нагрузки. Полученные данные о взаимосвязи геометрии корней зубов с последовательностью Фибоначчи и правилом золотой пропорции могут быть полезны при определении оптимальных параметров имплантов, а также подтверждают главенствующую роль функции в строении органов и тканей человека.

Проведение в будущем исследований на больших выборках образцов зубов позволит определить более точные средние показатели и выявить новые закономерности строения корней.

### Литература

1. De Castro, M. V., Santos N. C., Ricardo L. H. Assessment of the «golden proportion» in agreeable smiles // Quintessence Int. 2006. Vol. 37. P. 597–604.

2. Decker, J. D. The divine proportion // Am J Orthod Dentofacial Orthop. 2004. Vol. 126. P. 19A–20A.

3. Jahanbin, A., Basafa M., Alizadeh Y. Evaluation of the Divine Proportion in the facial profile of young females // Indian J Dent Res. 2008. Vol. 19. P. 292–296.

4. Levin, E. I. The updated application of the golden proportion to dental aesthetics // Aesthetic Dentistry today. 2011. Vol. 5(3). P. 22–27.

5. Mahshid, M., Khoshvagti A., Varshosaz M., Vallaei N. Evaluation of golden proportion in individuals with an esthetic smile // J. Esthet. Restor. Dent. 2004. Vol. 16. P. 185–192.

6. Mizumoto, Y., Deguchi T., Fong K. W. Assessment of facial golden proportions among young Japanese women // Am. J. Orthod Dentofacial Orthop. 2009. Vol. 136. P. 168–174.

7. Murthi, B. V. S., Ramani N. Evaluation of natural smile: golden proportion, RED or golden percentage // J Conserv Dent. 2008. Vol. 11(1). P. 16–21.

8. Priston, J. D. The golden proportion revisited // J. Esthet Dent. 1993. Vol. 5. P. 247–251.

9. Ricketts, R. M. The biologic significance of the divine proportion and Fibonacci series // Am. J. Orthod. 1982. Vol. 81. P. 351–370.

10. Scolozzi, P., Momjian A., Courvoisier D. Dentofacial deformities treated according to a dentoskeletal analysis based on the divine proportion: are the resulting faces de facto «divinely» proportioned? // J. Craniofac Surg. 2011. Vol. 22. P. 147–150.