МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. М. Капитонов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Минск БГМУ 2013

УДК 51(075.8)
ББК 22.1 я73
К20

Рекомендовано Научно-методическим советом университета в качестве учебно-методического пособия 17.04.2013 г., протокол № 8

Р е ц е н з е н т ы: канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. физики и высшей математики Международного государственного экологического университета им. А. Д. Сахарова В. Ф. Малишевский; канд. мед. наук, доц., зав. каф. общественного здоровья и здравоохранения Белорусского государственного медицинского университета Т. П. Павлович

Капитонов, А. М.

К20 Основы математического анализа и дифференциальных уравнений : учеб.-метод. пособие / А. М. Капитонов. – Минск : БГМУ, 2013. – 51 с.

ISBN 978-985-528-848-1.

Рассматриваются основы математического анализа и дифференциальных уравнений. Теоретические положения поясняются иллюстрациями и примерами, адаптированными для студентов медицинского университета.

Предназначено для студентов 1-го курса фармацевтического факультета.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-528-848-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Знакомство с высшей математикой, в частности с основами математического анализа и дифференциальных уравнений, является необходимой составляющей профессиональной подготовки фармацевта. В процессе изучения высшей математики формируется способность давать точные количественные оценки на базе строгих аналитических моделей. Эта способность лежит в основе академических, профессиональных и социально-личностных компетенций, требующихся специалисту-фармацевту. В частности, владение соответствующим математическим аппаратом — залог успеха в дальнейшем изучении физики, аналитической и коллоидной химии, экономики фармации, ряда других естественнонаучных и специальных дисциплин.

Данное учебно-методическое пособие предназначено студентам фармацевтического факультета. Оно написано на основе лекций, читаемых автором студентам БГМУ. В пособии излагается первый из трех основополагающих разделов курса высшей математики.

Для удобства использования в процессе самоподготовки студентов материал учебно-методического пособия структурирован согласно пунктам действующей учебной программы. Последовательность изложения соответствует методическим рекомендациям автора «Вопросы и задания к практическим занятиям по высшей математике» (БГМУ, 2011). Материал подобран с учетом общего уровня математической подготовки студентов медицинского вуза. Предпочтение отдано ясности, доступности и логической последовательности излагаемого материала. Приводятся решения задач, имеющих прикладное значение для фармации и смежных дисциплин. Где требуется, строгие математические выкладки и формальные доказательства заменены подходящим иллюстративным материалом. При написании ставилась цель облегчить процесс усвоения читателем основных понятий высшей математики, подтолкнуть к осознанию универсальности ее подходов и логических построений.

ВВЕДЕНИЕ

Функция. Математика оперирует *абстрактными математическими величинами*, не рассматривая их конкретной (физической) природы. Математические величины могут быть *постоянными* (например, числа) и *переменными*.

Переменные величины бывают *независимыми*, а могут и зависеть от других величин. Пусть величина Y зависит от величины X. Это значит, что каждому возможному значению x ставится в соответствие некое значение y. Зависимость величины Y от X *функциональная*, если каждому возможному значению x соответствует какое-то одно конкретное значение $y(x)$. При этом независимая величина X называется *аргументом* (параметром), а зависимая Y — *функцией* от X: $Y(X)$.

Выберем какую-либо пару значений аргумента x_0 и функции y_0. На координатной плоскости эта пара значений отобразится точкой $A(x_0; y_0)$ (рис. 1). Другая пара значений, x_1 и y_1, отобразится другой точкой — $B(x_1; y_1)$. Множество всех таких точек — график функции $y(x)$.

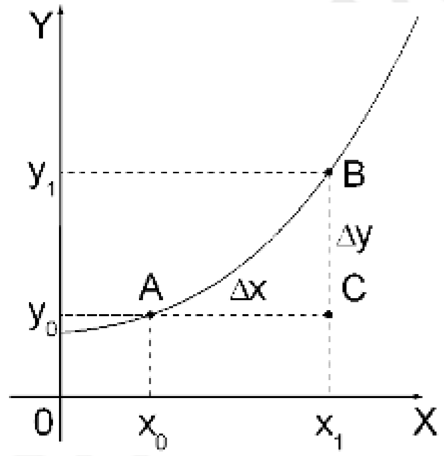


Рис. 1. Совокупность точек, абсциссы которых равны значениям аргумента x, а ординаты — соответствующим значениям функции $y(x)$, образует график этой функции

При переходе от одной точки (A) к другой (B) аргумент x испытывает приращение (изменяется на):

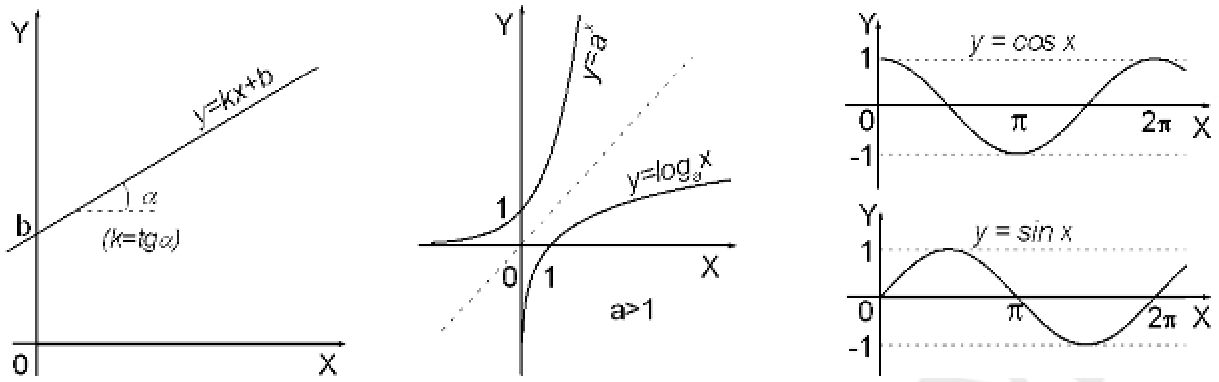
$$\Delta x = x_1 - x_0$$

а функция прирастает (изменяется) на:

$$\Delta y = y_1 - y_0.$$

На рис. 1 приращения Δx и Δy соответствуют взаимно перпендикулярным отрезкам AC и CB. (Греческая буква Δ (дельта) используется в математике для обозначения приращения.)

Элементарные функции. Это некоторые наиболее часто встречаемые в практических приложениях и относительно простые функции. Рассмотрим их подробнее (рис. 2):



а ***б*** ***в***

Рис. 2. Графики некоторых элементарных функций:
а — линейная; *б* — показательная и логарифмическая; *в* — гармонические (cos x и sin x)

Линейная функция: $y = k \cdot x + b$, где $k = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент, равный тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси *OX*.

Степенная функция: $y = x^n$, где n — постоянное число. Имеют место следующие свойства степеней: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ и $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{n}}$. В прикладных задачах распространены *полиномы* (многочлены) степени n: $y = a_n + a_{n-1} \cdot x + {}$ $+ a_{n-2} \cdot x^2 + a_0 \cdot x^n$, здесь каждое слагаемое содержит целую неотрицательную степень аргумента ($x^0 = 1$, x, x^2, …, x^n) и соответствующий постоянный коэффициент (a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, …, a_0). Используя знак суммирования Σ (греческая буква «сигма») и индекс суммирования $i = 0, 1, 2, …, n$, полином можно записать: $y = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \cdot x^i$.

Показательная функция: $y = a^x$, где $a > 0$, например $y = 10^x$ или $y = e^x$ — экспонента ($e \approx 2{,}7…$).

Функция, обратная показательной: логарифм по основанию a — $y = \log_a x$, десятичный (по основанию 10) — $\lg x$ — и натуральный (по основанию e) — $\ln x$ — логарифмы. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$. Свойства логарифмов: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a (\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$, $\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$.

Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x = = \frac{\sin x}{\cos x}$, $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Функции sin x и cos x, описывающие гармонические колебания, носят общее название гармонических.

Сложные функции, или функции от функций. Если $z = \sin y$, а $y = \ln x$, то $z = \sin \ln x$ — сложная функция.

Функции нескольких аргументов. Одна и та же функция, например z, может зависеть сразу от многих аргументов, например от x, y и т. д.: $z(x, y, \ldots)$.

1. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.1. Производная как мера скорости изменения функции (физический смысл производной)

Рассмотрим задачу о движении некоего тела. Пусть за время t оно проходит путь S. Тогда S будет функцией от t: $S(t)$. Скорость v, с которой движется это тело, вообще говоря, может зависеть от времени t: $v(t)$. Как мы можем определить эту скорость?

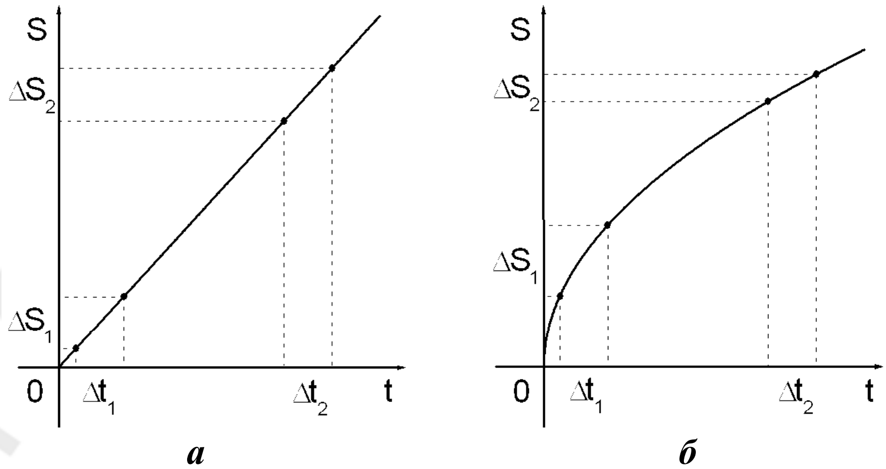
Рассмотрим два случая:

1. Равномерное движение (рис. 1.1, *а*) — за равные интервалы времени ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \ldots$) тело проходит равные отрезки пути ($\Delta S_1 = \Delta S_2 = \ldots$). График зависимости $S(t)$ — прямая линия. Скорость равномерного движения — постоянная величина:

$$v = \frac{S}{t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

2. Тело движется неравномерно и за равные промежутки времени ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \ldots$) проходит различные отрезки пути ($\Delta S_1 \neq \Delta S_2 \ldots$) (рис. 1.1, *б*). В этом случае график функции $S(t)$ не будет прямой линией, а отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ даст среднюю скорость:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$



а ***б***

Рис. 1.1. Графики зависимости $S(t)$:
а — при равномерном движении; *б* — при неравномерном движении

Если скорость тела изменяется плавно, без скачков, то ее среднее значение $\langle v \rangle$, рассчитанное по формуле (1.2), будет тем ближе к истинному, мгновенному значению, чем меньше Δt.

В математике используется понятие предела (лимита), к которому стремится та или иная математическая величина при условии стремления какого-то параметра к определенному значению. Используя понятие предела, выражение для мгновенной скорости можно записать в виде:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{1.3}$$

т. е. мгновенная скорость v равна пределу отношения приращения пути ΔS к приращению времени Δt при условии стремления последнего к нулю ($\Delta t \to 0$).

Мы можем обобщить формулу (1.3) на случай любой математической функции $y(x)$, зависящей от какого-либо аргумента x (см. «Введение», рис. 2). Роль абстрактных величин x и y могут выполнять различные физические, химические, биомедицинские и другие величины, например масса, энергия, заряд, температура, влажность, кислотность и т. д.

Быстроту (скорость) изменения функции $y(x)$ при изменении аргумента x будем описывать величиной, называемой ***производная*** от y по x (обозначается y'):

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.4}$$

т. е. производная y' равна пределу отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю ($\Delta x \to 0$).

Замечание. В общем случае следует указывать, по какому из возможных аргументов функции берется производная. Это указание можно опустить лишь при дифференцировании функции, имеющей один единственный аргумент.

Физический смысл производной: производная — это мера скорости изменения функции.

1.2. Геометрический смысл производной

Для выяснения геометрического смысла производной обратимся к геометрическим понятиям секущей и касательной прямых к кривой — графику функции (рис. 1.2).

Секущая линия пересекает кривую не менее чем в двух точках — пусть это точки A и B. Эти точки являются общими для графика и секущей. Касательная же имеет только одну общую точку (точка A) с кривой, т. е. касается ее в этой точке. Пусть одна точка, общая для кривой и секущей, например A, зафиксирована, а другую — точку B — мы можем передвигать вдоль кривой (рис. 1.2, *а*). Предположим, что точка B сдвигается по направлению к A. В этом случае секущая AB будет поворачиваться вокруг точки A, постепенно приближаясь к касательной. Следовательно, касательная — это предел, к которому стремятся секущая AB при $B \to A$. Другое важное свойство касательной (рис. 1.2, *б*, *в*) — в малой окрестности точки касания кривая и касательная линии мало отличаются и в пределе разница между ними практически исчезает.

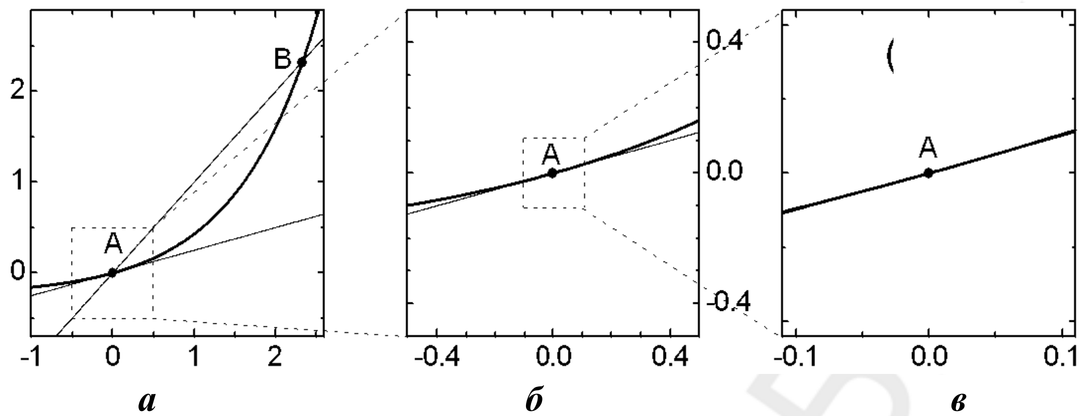


Рис. 1.2. Касательная и секущая к графику функции, проведенные через точку A (масштаб последовательно увеличивается от *а* к *в*)

Найдем значение производной y' в точке A (рис. 1.3), координаты которой (x_0; y_0). Будем использовать формулу 1.4. Пусть некоторая точка B на графике имеет координаты (x_1; y_1). Разности координат точек A и B являются приращениями $\Delta x = x_1 - x_0$ и $\Delta y = y_1 - y_0$. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и ADC с общим катетом AC, длина которого равна Δx. Гипотенузами этих треугольников служат участки секущей AB и касательной AD соответственно. Отношение приращений $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, фигурирующее в определении производной (1.4), равно отношению катетов BC к AC в треугольнике ABC, следовательно, оно равно тангенсу угла BAC — угла наклона секущей AB:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \angle BAC. \tag{1.5}$$

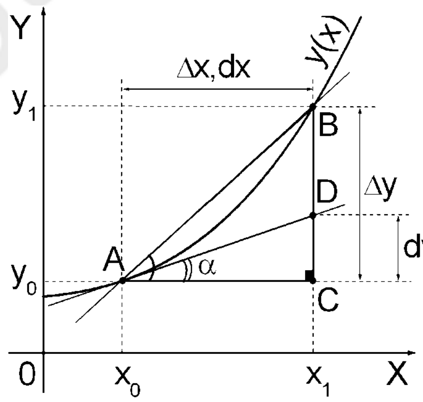


Рис. 1.3. Секущая AB и касательная AD к графику функции $y(x)$, проведенные через точку A с координатами (x_0; y_0)

Однако определение производной (1.4) требует произвести предельный переход $\Delta x \to 0$. Если график функции $y(x)$ — непрерывная кривая, то и приращение функции при этом также будет стремиться к нулю: $\Delta y \to 0$. Но Δx и Δy представляют собой разницу в координатах точек пересечения графика функции секущей A и B. Значит, при условии $\Delta x \to 0$ точка B будет стремиться к точке A ($B \to A$), и секущая превратится в касательную. Соответственно, пределом угла наклона секущей AB при условии $\Delta x \to 0$ будет угол наклона касательной AD, обозначенный на рис. 1.3 символом α: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \angle BAC = \alpha$. А пределом отношения приращений $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ будет тангенс угла наклона касательной α. Значит, производная y' будет равна:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha. \tag{1.6}$$

Геометрический смысл производной: производная функции в данной точке равна тангенсу угла наклона (угловому коэффициенту) касательной к графику функции, проведенной в этой точке.

1.3. Производные элементарных функций, правила дифференцирования суммы, произведения, частного, сложной функции

Скорость процесса может изменяться с течением времени. Угловые коэффициенты касательных, проведенных к графику функции в разных точках, т. е. при разных значениях аргумента, могут различаться. Значит, и производная y' произвольной функции $y(x)$ должна в общем случае зависеть от аргумента x. Таким образом, производная сама является некоторой функцией $y'(x)$ аргумента x.

Процедуру нахождения производной называют математической операцией *дифференцирования*. Ее суть заключается в сопоставлении данной функции $y(x)$ другой функции $y'(x)$, являющейся ее производной. Будем обозначать дифференцирование при помощи штриха. Правила нахождения производной могут быть доказаны математически строго, мы, однако, ограничимся простейшим обоснованием лишь некоторых из них.

Производная постоянной величины. Если функция $y(x) = C$ не изменяется ($C = \text{const}$), то ее скорость равна нулю. Приняв во внимание, что скорость — физический смысл производной, приходим к выводу, что производная постоянной величины равна нулю: $(C)' = 0$.

Производная алгебраической суммы функций ($u + v$). Рассмотрим движение лодки по реке. Скорость лодки относительно пунктов, расположенных на берегу, будет складываться из собственной скорости лодки u (относительно воды) и скорости течения реки v: $(u + v)$. Если скорости u и v разнонаправлены, то сумма превращается в разность $(u - v)$. Обобщив на случай произвольных функций, придем к заключению, что производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

Производная линейной функции $y' = (k \cdot x + b)'$. Касательная к графику линейной функции повсюду совпадает с самим графиком. У них тангенс угла наклона везде одинаков и равен коэффициенту k. Значит, $(k \cdot x + b)' = k$ и, в частности, $x' = 1$.

Приведем без доказательства необходимый в дальнейшем набор правил дифференцирования и производных элементарных функций.

Правила дифференцирования

1. Производная алгебраической суммы функций u и v:
$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{1.7}$$
2. Вынесение постоянного множителя C = const:
$$(Cu)' = Cu', \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}. \tag{1.8}$$
3. Производная произведения двух функций u и v:
$$(uv)' = u'v \pm uv'. \tag{1.9}$$
4. Производная частного двух функций u и v:
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{1.10}$$
5. Производная сложной функции $y(u)$, где $u(x)$ — функция от x:
$$(y(u))'_x = y'_u u'_x. \tag{1.11}$$

Производные элементарных функций

$$(C)' = 0. \tag{1.12}$$
$$x' = 1. \tag{1.13}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{1.14}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{1.15}$$
$$(e^x)' = e^x. \tag{1.16}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \tag{1.17}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$
$$(\lg x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10} \approx \frac{0,4343}{x}.$$
$$(\sin x)' = \cos x. \tag{1.18}$$
$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{1.19}$$
$$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{1.20}$$

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = \frac{1}{\sin^2 x}. \qquad (1.21)$$

Производные сложных функций (с учетом 5-го правила)

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'_x. \qquad (1.14а)$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'. \qquad (1.15а)$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'. \qquad (1.16а)$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}. \qquad (1.17а)$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$(\lg u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln 10} \approx 0{,}4343\frac{u'}{u}.$$

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'. \qquad (1.18а)$$

$$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'. \qquad (1.19а)$$

$$(\mathrm{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}. \qquad (1.20а)$$

$$(\mathrm{ctg}\,u)' = \frac{u'}{\sin^2 u}. \qquad (1.21а)$$

Пример 1. Количество радионуклидов N убывает со временем t по закону $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, где N_0 — начальное количество нуклидов; τ — их среднее время жизни. Как зависит от времени активность нуклидов A, представляющая собой скорость радиоактивного распада?

Решение. Скорость распада — производная по времени от количества нуклидов: $A = \left(N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)'_t$. Выносим постоянный множитель N_0 (правило (1.8)), не зависящий от времени: $A = N_0\left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)'_t$. Затем дифференцируем сложную функцию (правило (1.15а)): $A = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{t}{\tau}\right)'_t$. Вновь выносим постоянный множитель, на этот раз $-\frac{1}{\tau}$: $A = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot (t)'_t$.

Производная $(t)'_t$ равна единице в силу правила (1.13), значит $A = -\frac{N_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Ответ: $A = -\frac{N_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Пример 2. Материальная точка совершает затухающие колебания по закону: $S(t) = Ae^{-\beta \cdot t} \sin(\omega \cdot t)$, где $S(t)$ — смещение точки от положения равновесия в момент времени t; A — начальная амплитуда; β — показатель затухания; ω — циклическая частота колебаний. Найти скорость v этой точки.

Решение. Смысл скорости v имеет первая производная смещения по времени $(S)'_t$. Найдем ее, вынеся за скобки постоянный множитель A и воспользовавшись правилом (1.9) дифференцирования произведения функций. В качестве одной функции возьмем экспоненту $e^{-\beta \cdot t}$, а другим множителем будет $\sin(\omega \cdot t)$. Тогда $v = S'_t = A(e^{-\beta \cdot t})'_t \cdot \sin(\omega \cdot t) + Ae^{-\beta \cdot t} \times$ $\times (\sin(\omega \cdot t))'_t$. С учетом правил (1.15а) и (1.18а) дифференцирования сложных функций получим:

$$v = Ae^{-\beta \cdot t} \cdot (-\beta \cdot t)'_t \cdot \sin(\omega \cdot t) + Ae^{-\beta \cdot t} \cos(\omega \cdot t)(\omega \cdot t)'_t = Ae^{-\beta \cdot t} \cdot (-\beta) \times$$
$$\times \sin(\omega \cdot t) + Ae^{-\beta \cdot t} \cos(\omega \cdot t) \cdot \omega.$$

Перегруппировав, получим выражение: $v = Ae^{-\beta \cdot t} \cdot (\omega \cos(\omega \cdot t) - \beta \sin(\omega \cdot t))$.

Ответ: $v = Ae^{-\beta \cdot t} \cdot (\omega \cos(\omega \cdot t) - \beta \sin(\omega \cdot t))$.

Пример 3. Два вещества, начальные концентрации которых равны n_0, вступают в химическую реакцию. С течением времени t их концентрации $n(t)$ изменяются по закону: $\frac{1}{n} = kt + \frac{1}{n_0}$, где k — постоянная скорости реакции. Найти скорость реакции.

Решение. Скорость реакции v (количество вещества, прореагировавшего за единицу времени) определим как первую производную n'_t концентрации по времени. Выражать концентрацию n в явном виде не будем, вместо этого найдем производные по t от правой и левой частей выражения, данного в условии. Равенство при этом не нарушится: $\left(\frac{1}{n}\right)'_t = \left(kt + \frac{1}{n_0}\right)'_t$.

Здесь слева имеем производную степенной сложной функции (правило (1.14а)), а справа — сумму слагаемых, только одно из которых зависит от t. Тогда: $\left(n^{-1}\right)'_t = (kt)'_t + \left(\frac{1}{n_0}\right)'_t$, что приводит к уравнению

$(-1)\cdot n^{-2}\,n'_t = k\cdot t'_t + 0$ и далее к $\dfrac{n'_t}{n^2} = -k$. Значит скорость реакции равна: $v = n'_t = -kn^2$.

Теперь выразим n. Из $\dfrac{1}{n} = kt + \dfrac{1}{n_0} = \dfrac{n_0kt+1}{n_0}$ следует, что $n = \dfrac{n_0}{n_0kt+1}$.

Тогда $v = -k\dfrac{n_0^2}{(n_0kt+1)^2}$. Отрицательное значение скорости реакции свидетельствует о ее замедлении со временем благодаря истощению реагентов.

Ответ: $v = -k\dfrac{n_0^2}{(n_0kt+1)^2}$.

1.4. Производные высших порядков

Любая производная сама является функцией. Так, при механическом движении тела его скорость v также является функцией времени t наряду с пройденным телом путем $S(t)$. Можно найти производную скорости v', применив правила дифференцирования еще раз. С точки зрения математики, полученная таким образом величина будет второй производной (S'') пути по времени, имеющей физический смысл ускорения a: $S'' = a$.

Производными высших порядков функции $y(x)$ будут результаты последовательного многократного дифференцирования этой функции: $y'' = (y')'$ — вторая производная, $y''' = ((y')')'$ — третья производная, $y^{(4)} = (((y')')')'$ — четвертая производная и т. д. Порядок производной может быть сколь угодно большим.

Пример 1. Найти третью производную функции $y = x^5 + \sin x$.

Решение. Сразу находим первую производную, используя правило дифференцирования суммы функций: $y' = (x^5 + \sin x)' = (x^5)' + (\sin x)' = 5x^4 + \cos x$.

Затем находим вторую производную: $y'' = (5x^4 + \cos x)' = (5x^4)' + (\cos x)' = 5(x^4)' + (\cos x)' = 20x^3 - \sin x$.

И, наконец, третью: $y''' = (20x^3 - \sin x)' = 20(x^3) - (\sin x)' = 60x^2 - \cos x$.

Ответ: $y''' = 60x^2 - \cos x$.

Пример 2. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $S = A\sin(\omega\cdot t)$, где S — смещение от положения равновесия, A — амплитуда колебаний, а ω — их циклическая частота. Найти, как зависят от времени скорость и ускорение этой точки.

Решение. Требуется найти первую S' и вторую S'' производные по времени от координаты S. Эти производные и будут являться скоростью и ускорением соответственно:

$v = S'_t = (A \sin(\omega \cdot t))'_t = A(\sin(\omega \cdot t))'_t = A\cos(\omega \cdot t)(\omega \cdot t)'_t = A\,\omega\cos(\omega \cdot t)$;
$a = S'' = (A\,\omega\cos(\omega \cdot t))'_t = A\,\omega(\cos(\omega \cdot t))'_t = -A\,\omega\sin(\omega \cdot t)(\omega \cdot t)'_t =$
$= -A\,\omega^2\sin(\omega \cdot t)$.

Ответ: $v = A\,\omega\cos(\omega \cdot t)$, $a = -A\,\omega^2\sin(\omega \cdot t)$.

1.5. Применение производной для исследования функции на экстремум

Экстремум — общее название максимумов и минимумов функции. Ограничимся рассмотрением непрерывных функций, наиболее часто встречающихся на практике.

Функция достигает локального *максимума* в точке $x = a$, если в пределах некоторой окрестности этой точки, причем как для $x < a$, так и для $x > a$, значение функции повсюду меньше максимального: $y(x \neq a) < y(a)$. На примере, показанном на рис. 1.4, локальный максимум функции достигается при $x = -1$, чему соответствует точка $B(-1; 1)$ на графике.

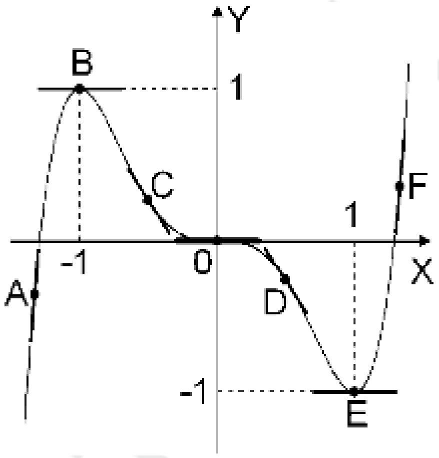


Рис. 1.4. График функции $y(x) = 1{,}5x^5 - 2{,}5x^3$. В точках *A, B, C, O, D, E* и *F* проведены участки касательных к графику. Функция достигает максимума в точке *B*, минимума — в точке *E*, а в точке *O* экстремума нет

Функция имеет локальный *минимум* в такой точке $x = b$, что в пределах некоторой окрестности этой точки, как для $x < b$, так и для $x > b$, значение функции повсюду больше минимального: $y(x \neq b) > y(b)$. Например, функция, представленная на рис. 1.4, достигает локального минимума при $x = 1$, чему соответствует точка $E(1; -1)$ на графике.

Точка $x = a$ будет локальным экстремумом функции, если в пределах некоторой окрестности этой точки с одной стороны от нее функция возрастает, а с другой — наоборот, убывает. При движении в сторону увеличения аргумента x переход от возрастания функции к ее убыванию имеет место в локальном максимуме (точка B на рис. 1.4). В минимуме (точка E на рис. 1.4) убывание функции сменяется ее ростом.

Что же происходит с производной функции в точках экстремума? Для ответа на этот вопрос обратимся к геометрическому смыслу производной — тангенсу угла наклона касательной к графику функции. В тех точках графика, где угловой коэффициент касательной положителен ($\mathrm{tg}\ \alpha > 0$), функция возрастает (например, в точках A и F на рис. 1.4). А там, где тангенс угла наклона касательной отрицателен ($\mathrm{tg}\ \alpha < 0$), функция убывает (например, в C и D). Значит, в точках экстремумов производная функции меняет знак, обращаясь для этого в ноль. Касательная к графику функции, проведенная через экстремумы (например, через B и E), располагается горизонтально.

Замечание. Производная может не существовать в точках экстремума. Так, производная функции $y = |x|$ не существует в точке минимума $x = 0$. Провести касательную к графику функции в такой точке невозможно.

Смена знака производной в экстремальных точках имеет простую физическую интерпретацию — направление и, следовательно, знак скорости колеблющейся точки изменяются на противоположный, когда точка достигает экстремумов — положений максимального смещения от равновесия.

Процедура нахождения экстремумов функции при помощи производной проводится в два этапа. Во-первых, находят *точки, подозрительные на экстремум*. Таковыми являются те точки, в которых первая производная функции обращается в ноль или не существует вовсе. На втором этапе проверяют, действительно ли найденные точки являются экстремумами.

Следует учитывать, что в некоторых точках первая производная функции может достигать нуля, однако сохранять свой знак по обе стороны такой точки. Примером служат точки перегиба, в которых изменяет свой знак вторая производная. В этих точках график функции из выпуклой кривой превращается в вогнутую или наоборот, из вогнутой в выпуклую. Точки перегиба не являются экстремумами, поскольку функция продолжает в них свой рост или убывание (точка O на рис. 1.4).

Замечание. Можно показать, что в точках максимума функции ее вторая производная принимает отрицательное значение (max: $y'' < 0$), а в точках минимума — положительное (min: $y'' > 0$). Точки, в которых она равна нулю ($y'' = 0$), не являются экстремумами.

Поясним на примере функции $y(x) = 1{,}5x^5 - 2{,}5x^3$, чей график показан на рис. 1.4. Найдем производную функции:

$$y' = (1{,}5x^5 - 2{,}5x^3)' = 1{,}5(x^5)' - 2{,}5(x^3)' = 7{,}5x^4 - 7{,}5x^2 = 7{,}5x^2(x^2 - 1).$$

Производная равна нулю, если $x^2 = 0$ или $x^2 - 1 = 0$. Следовательно, к точкам, подозрительным на экстремум, относятся $x = 0$ (точка O), $x = -1$ (точка B) и $x = 1$ (точка E).

Проверку можно осуществить различными способами, например при помощи второй производной:

$$y'' = (7{,}5x^4 - 7{,}5x^2)' = 7{,}5(x^4)' - 7{,}5(x^2)' = 30x^3 - 15x.$$

В точке B ($x = -1$) вторая производная принимает значение: $y''(-1) = 30 \cdot (-1)^3 - 15 \cdot (-1) = -30 + 15 = -15$ — меньше нуля, значит это максимум. В точке O ($x = 0$) вторая производная ($y''(0) = 30 \cdot 0^3 - 15 \cdot 0 = 0$) равна нулю, следовательно, это точка перегиба, не относящаяся к экстремумам. В точке E функция достигает максимума, поскольку при $x = 1$ ее вторая производная положительна.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

2.1. Дифференциал функции, связь дифференциала с производной

Со скоростью изменения функции тесно связан математический объект, называемый *дифференциалом*. Его кратко обозначают при помощи латинской буквы d (dx читается «дэ икс», dy читается «дэ игрек» и т. д.). Начнем рассмотрение дифференциала с двух определений.

Определение 1. Дифференциал аргумента равен его приращению:

$$dx = \Delta x. \qquad (2.1)$$

Определение 2. Дифференциал функции одного аргумента равен произведению производной функции на дифференциал аргумента:

$$dy = y' \cdot dx. \qquad (2.2)$$

Из определения (2.2) можно выразить производную:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}. \qquad (2.3)$$

Это обозначение производной ($\frac{dy}{dx}$ читается «дэ игрек по дэ икс») также встречается в научной литературе.

Вновь обратимся к рис. 1.3, на котором показан график функции $y(x)$. Выберем любую точку на графике, например $A(x_0;\ y_0)$, и зададим произвольное приращение аргумента Δx. По определению (2.1) это приращение равно дифференциалу аргумента dx. Изменение абсциссы на $\Delta x = dx$ приведет функцию в новую точку $B(x_1;\ y_1)$, заставив ее прирасти на Δy. Чем быстрее изменяется функция, тем большим окажется $|\Delta y|$.

Как следует из треугольника ABC, средняя скорость $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ изменения функции равна тангенсу угла наклона секущей AB. Графиком движения с такой (средней) скоростью и был бы отрезок AB. Мгновенная же скорость функции в точке A равна производной $y'(x_0)$, взятой в этой точке. Если бы функция продолжала изменяться со скоростью $y'(x_0)$, то графиком движения была бы касательная AD, а приращению аргумента $\Delta x = dx$ соответствовало бы изменение функции на величину, равную длине отрезка CD, т. е. на дифференциал функции.

Действительно, в прямоугольном треугольнике ADC отношение противолежащего катета CD к прилежащему AC равно тангенсу угла α. Значит, $CD = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$. А с учетом выражений (1.6) и (2.1) получим $CD = y'(x_0) \cdot dx$, что соответствует определению (2.2). Таким образом, *механический смысл дифференциала функции* — путь, который прошла бы точка от момента времени t до момента $t + \Delta t$, если бы продолжала двигаться со скоростью, достигнутой к моменту времени t.

Пример. Найти дифференциал функции $y(x) = 1{,}5x^5 - 2{,}5x^3$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 0{,}5$, если аргумент в обоих случаях прирастает на $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. Для нахождения дифференциала функции понадобится вычислить ее производную: $y' = (1{,}5x^5 - 2{,}5x^3)' = 1{,}5(x^5)' - 2{,}5(x^3)' = 7{,}5x^4 - 7{,}5x^2$.

В точке $x_1 = 0$ производная принимает значение $y'(0) = 7{,}5 \cdot 0^4 - 7{,}5 \cdot 0^2 = 0$, а в точке $x_2 = 0{,}5$ производная равна $y'(0{,}5) = 7{,}5 \cdot 0{,}5^4 - 7{,}5 \cdot 0{,}5^2 = -1{,}40625$. Для нахождения dy домножаем значения производной $y'(0) = 0$ и $y'(0{,}5) = -1{,}40625$ на $\Delta x = 0{,}1$: $dy(0) = 0 \cdot 0{,}1 = 0$ и $dy(0{,}5) = -1{,}40625 \cdot 0{,}1 = -0{,}140625$.

Ответ: $dy(0) = 0$; $dy(0{,}5) = -0{,}140625$.

Дифференциал функции обладает важным свойством, лежащим в основе интегрального исчисления и математического моделирования реальных процессов при помощи дифференциальных уравнений. Как показано в подразделе 1.2, с уменьшением рассматриваемого интервала аргумента Δx график функции $y(x)$ все меньше и меньше отличается от касающейся его прямой, а секущие превращаются в касательную. Что же в таком случае при $\Delta x \to 0$, происходит с дифференциалом dy и полным приращением Δy функции? Обе эти величины (и отрезок CB, и отрезок CD на рис. 1.3) стремятся к нулю, однако разница между ними (отрезок DB) исчезает значительно быстрее по мере того, как исчезает разница между секущей AB и касательной AD. Следовательно, приращение и дифференциал функции становятся равными при малых изменений аргумента Δx:

$$\Delta y \approx dy \text{ (при } \Delta x \to 0). \tag{2.4}$$

А дифференциал является пределом приращения функции при $\Delta x \to 0$:

$$dy = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y\,. \tag{2.5}$$

В связи с этим говорят, что *дифференциал* — это *главная часть приращения функции*.

Замечание. Рассмотренное выше свойство дифференциала (формулы (2.4) и (2.5)) позволяет использовать его в приближенных вычислениях. Применяется следующий алгоритм. Пусть требуется оценить значение функции $y(x)$ в точке x. Сперва находят ближайшую точку x_0, в которой функция $y(x_0) = y_0$ вычисляется легко, также вычисляют производную $y'(x_0)$ функции в этой точке и изменение аргумента $dx = x - x_0$. Затем вместо точного равенства $y(x) = y_0 + \Delta y$ используют приближенное $y(x) \approx y_0 + dy = y_0 + y'(x_0)\,dx$.

Пример. Вычислим приближенно sin 3°. Используем функцию $y = \sin x$. Ее значение в точке $x_0 = 0°$ известно, $y_0 = \sin 0° = 0$. Производная функции $y' = \cos x$ в точке $x_0 = 0°$ также известна, $y'(0°) = \cos 0° = 1$. Приращение аргумента из градусов следует перевести в радианы (развернутый угол 180° = π рад, значит $1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад): $dx = 3° - 0° = = 3° = \dfrac{\pi}{60}$ рад. Дифференциал функции $dy = y'dx = 1 \cdot \dfrac{\pi}{60} = \dfrac{\pi}{60}$. Значит, искомое значение функции приближенно равно $\sin 3° \approx 0 + \dfrac{\pi}{60} = \dfrac{\pi}{60} \approx 0{,}05236$. Проверка при помощи калькулятора дает $\sin 3° \approx 0{,}05233$.

2.2. Частные производные функции многих переменных

Использовавшееся выше определение производной (1.4) справедливо лишь для функции $y(x)$ одного аргумента x. Оно не учитывает тот факт, что в случае функции нескольких аргументов, например $z(x, y, \ldots)$, возможны одновременно несколько приращений аргументов: и Δx, и Δy и т. д. Каким же образом описать быстроту изменения функции нескольких переменных?

Рассмотрим функцию, зависящую от двух переменных — времени t и пространственной координаты x. Таковой будет, например, концентрация лекарственной формы вещества в окружающей растворяющуюся таблетку жидкости. Благодаря процессу диффузии вещества его концентрация $n(t, x)$ должна изменяться и с течением времени t, и от точки к точке по мере удаления от таблетки вдоль пространственной координаты x. Однако в каждой конкретной точке пространства, скажем в x_0, концентрация $n(t, x)$ будет зависеть только от времени, значит скорость ее изменения в этой точке можно описать математически при помощи производной по времени t. У этой производной $n'_t(t, x_0)$ есть особенность — она вычисляется без учета зависимости функции n от второго аргумента x. Применяются обычные правила дифференцирования, но вторая переменная x считается фиксированной, и поэтому с ней обращаются как с постоянной величиной ($x = x_0 = \text{const}$). Аналогичным образом можно зафиксировать произвольный момент времени $t = t_0$ и ввести производную $n'_x(t_0, x)$ по x, описывающую быстроту изменения в пространстве мгновенного распределения $n(t_0, x)$ концентрации вещества.

В математике такие производные по одному из нескольких аргументов функции $z(x, y, t, \ldots)$ называются *частными производными*. Их обозначают z'_x, z'_y, z'_t, … или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (читается «дэ зет по дэ икс»), $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ и т. д.

Приведем точное определение частной производной по аргументу x функции $z(x, y)$ двух переменных x и y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y) - z(x, y)}{\Delta x}. \qquad (2.6)$$

Частная производная этой же функции по y определяется аналогично:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta y}. \qquad (2.6а)$$

Таким же образом, фиксируя все аргументы, кроме того, по которому проводят дифференцирование, можно вычислять частные производные функций трех, четырех и более переменных.

Пример. Найти частные производные функции $z = \ln y + \dfrac{e^{-t}}{x^2+1}$.

Решение. Функция z зависит от трех аргументов: x, y и t. Значит, у нее будут три частные производные первого порядка. Сразу найдем частную производную по x, считая аргументы y и t зафиксированными и обращаясь с ними как с константами: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (\ln y)'_x + \left(e^{-t} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}\right)'_x$. Первое слагаемое справа равно нулю как производная константы, поскольку натуральный логарифм фиксированной (постоянной) величины также является фиксированной величиной: $(\ln y)'_x = 0$. Во втором слагаемом присутствует не зависящий от x множитель e^{-t}, его можно вынести за скобки. Значит:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 + e^{-t} \cdot \left(\frac{1}{x^2+1}\right)'_x = e^{-t}\,((x^2+1)^{-1})'_x = e^{-t}\,((-1)(x^2+1)^{-2})(x^2+1)'_x =$$

$$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} e^{-t}.$$

Далее находим частную производную по y. От этой переменной зависит только первое слагаемое функции z, частная производная по y от второго слагаемого равна нулю: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = (\ln y)'_y + 0 = \dfrac{1}{y}$.

Рассуждая подобным образом, находим частную производную по t:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0 + \frac{1}{x^2+1}(e^{-t})'_t = \frac{1}{x^2+1} e^{-t} \cdot (-t)'_t = -\frac{1}{x^2+1} e^{-t}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} e^{-t}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{y}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial t} = -\dfrac{1}{x^2+1} e^{-t}$.

2.3. Частные и полный дифференциалы. Градиент

Дифференциал функции $y(x)$ одного аргумента по определению (2.2) равен произведению производной $y'(x)$ этой функции на дифференциал dx аргумента. У функции же многих аргументов $z(x, y, \ldots)$ существует несколько частных производных z'_x, z'_y и т. д. Каждую из этих частных производных можно домножить на дифференциал соответствующего аргумента (dx, dy и т. д.) по аналогии с (2.2). Сконструированный таким образом математический объект называется ***частным дифференциалом*** (по x, y и т. д.):

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx,\ \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \text{ и т. д.} \qquad (2.7)$$

Полная сумма всех частных дифференциалов функции нескольких аргументов называется *полным дифференциалом*. Так, для функции $z(x, y)$ двух аргументов полный дифференциал равен:

$$dz(x, y) = d_x z + d_y z = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \qquad (2.8)$$

Замечание. Полный дифференциал обладает свойством инвариантности — формула (2.8) остается справедливой и в том случае, когда аргументы функции x, y и т. д. сами зависят (являются функциями) от других величин. Инвариантность полного дифференциала широко применяется в механике, теоретической физике, квантовой химии и других науках, оперирующих строгими математическими моделями многопараметрических процессов и явлений.

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \ln y + \dfrac{e^{-t}}{x^2+1}$.

Решение. Все частные производные рассматриваемой функции найдены в предыдущем примере. Можем составить ее частные дифференциалы.

По x: $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx = -\dfrac{2x\cdot e^{-t}}{(x^2+1)^2}\,dx$; по y: $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy = \dfrac{1}{y}\,dy$;

по z: $d_t z = \dfrac{\partial z}{\partial t}\,dt = -\dfrac{e^{-t}}{x^2+1}\,dt$.

Полный дифференциал равен полной сумме частных: $dz = -\dfrac{2x\cdot e^{-t}}{(x^2+1)^2}\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy - \dfrac{e^{-t}}{x^2+1}\,dt$.

Ответ: $dz = -\dfrac{2x\cdot e^{-t}}{(x^2+1)^2}\,dx + \dfrac{1}{y}\,dy - \dfrac{e^{-t}}{x^2+1}\,dt$.

Физический смысл производной — скорость изменения функции (см. подраздел 1.1). Однако общеупотребительное значение термина «скорость» связано с зависимостью какой-либо функции (величины) от времени t.

Но функция может изменяться и в пространстве, т. е. зависеть от пространственной координаты x. Производная функции по такой пространственной координате получила специальное название градиент (grad).

Для математического описания объемных (трехмерных) явлений и объектов требуется использовать систему из трех пространственных координат (например, декартову XYZ). У трехмерной функции $\varphi(x, y, z)$ будет три частные производные (по x, y и z). Градиент $\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi}$ такой функции представляет собой направленную величину (вектор) с проекциями (компонентами), равными соответствующим частным производным: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ — вдоль оси OX, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ — вдоль OY, и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ — вдоль OZ. Каждая из них показывает, как быстро функция изменяется вдоль соответствующей координаты. Абсолютная величина (модуль) градиента равна: $\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}\varphi}\right| = \sqrt{(\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2 + (\varphi'_z)^2}$, что можно доказать при помощи теоремы Пифагора. Градиент ориентирован в направлении максимально быстрого роста функции. Если направить в ту же сторону одну из координат, например ось OX, то частные производные φ'_y и φ'_z станут равны нулю и выражение для градиента существенно упростится:

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}. \qquad (2.9)$$

3. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1. Определенный интеграл, задача о нахождении площади плоской фигуры

Площадь S прямоугольника со сторонами a и b равна произведению длин этих сторон: $S = a \cdot b$. Площадь круга с радиусом r равна: $S = \pi \cdot r^2$. Площадь треугольника равна половине произведения стороны a треугольника на высоту h, опущенную к этой стороне: $S = \dfrac{a \cdot h}{2}$. При помощи этих простых арифметических формул вычисляется площадь любой фигуры, которую можно разбить на круги, треугольники и прямоугольники. Например, площадь трапеции будет равна $S = \dfrac{(a+b)\cdot h}{2}$, где a и b — длины оснований трапеции, а h — ее высота. Однако не существует общих арифметических формул, которые позволяли бы находить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками произвольных функций — эта задача требует применения интегрального исчисления.

Обозначим площади полосок соответственно S_1, S_2, S_3 и т. д., вплоть до S_n. Очевидно, что площадь S всей фигуры равна сумме площадей полосок:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{3.1}$$

Площадь полоски $aACx_1$ можно *приблизительно* оценить как площадь трапеции $aACx_1$, наклонная сторона которой AC образована секущей к графику, проходящей через точки A и C. Высота ее равна Δx, длины оснований — $f(a)$ и $f(x_1)$, значит, площадь: $S_1 = \dfrac{f(a)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x = \dfrac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x.$ Площадь i-й полоски S_i находим таким же образом: $S_i = \dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\cdot\Delta x.$ Тогда площадь всей фигуры *приблизительно* равна:

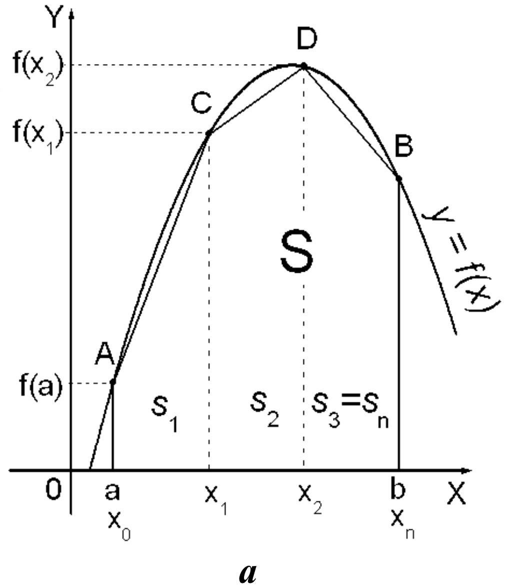
$$S \approx \frac{f(a)+f(x_1)}{2}\cdot\Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot\Delta x + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\cdot\Delta x + \ldots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_b)}{2}\cdot\Delta x. \tag{3.2}$$

Нетрудно заметить, что в этой сумме $f(x_1)$ встречается дважды — в первом и во втором слагаемых. То же касается и $f(x_2)$, и $f(x_3)$ и т. д. По одному разу встречаются лишь $f(a)$ и $f(b)$. Для простоты будем считать толщины полосок Δx одинаковыми. Тогда, сгруппировав подобные члены, получим:

$$S \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot\Delta x + f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot\Delta x + \sum_i f(x_i)\cdot\Delta x. \tag{3.3}$$

Что же произойдет, если мы начнем дробить криволинейную трапецию на все большее и большее количество ($n \to \infty$) все более тонких ($\Delta x \to 0$) полосок? Сравнив рис. 3.1, *а* и рис. 3.1, *б*, заметим, что разница между полосками и соответствующими трапециями становится менее существенной по мере их сужения. В подразделе 1.2 показано, что при $\Delta x \to 0$ секущая стремится к касательной, которая, в свою очередь, становится практически неотличимой от графика функции. Значит, и сумма (3.3) будет стремиться к точному значению площади криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot\Delta x + \sum_i f(x_i)\cdot\Delta x\right). \tag{3.4}$$



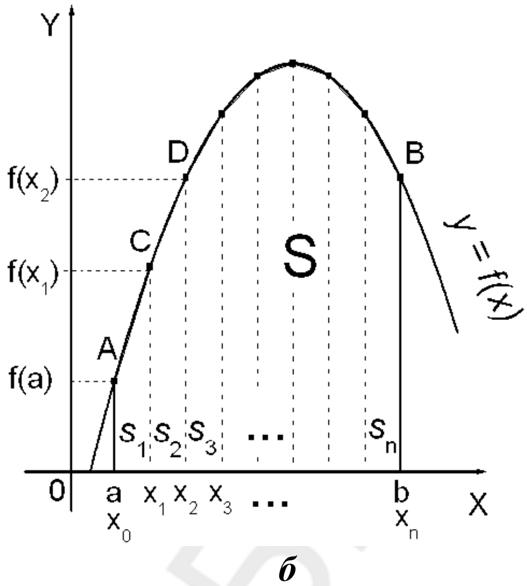


Рис. 3.1. Схема вычисления площади S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью OX и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$

Слагаемое $\frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot \Delta x$ в формуле (3.4) становится бесконечно малым, когда $\Delta x \to 0$. Без потери точности можно объединить его с основной суммой (под знаком суммирования Σ):

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(x_i) \cdot \Delta x. \qquad (3.5)$$

Сумма слагаемых $f(x_i) \cdot \Delta x$ в выражении (3.5) называется интегральной суммой, а ее предел при $\Delta x \to 0$ — ***определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на интервале от a до b. Заменив Δx на dx и используя знак интеграла $\int$ вместо предела суммы, записываем:

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.5a)$$

($\int_a^b f(x)dx$ читается «интеграл от а до б эф от икс дэ икс», функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией (выражением), x — переменной интегрирования, a — нижней, а b — верхней границами интегрирования.)

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл равен площади фигуры, ограниченной графиком подынтегральной функции $y = f(x)$, горизонтальной осью OX и вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = S. \qquad (3.6)$$

Пример. Записать как определенный интеграл площадь S фигуры, лежащей между графиком функции $y = \sin x$ и осью OX на одном полупериоде этой функции (рис. 3.2).

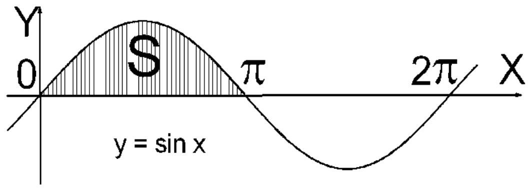


Рис. 3.2. S — площадь фигуры, ограниченной полупериодом функции $y = \sin x$ и осью OX

Решение. Как видно из рис. 3.2, 0 — нижняя, а π — верхняя границы интегрирования, следовательно: $S = \int_a^{\pi} \sin x\, dx.$

Ответ: $S = \int_a^{\pi} \sin x\, dx.$

3.2. Формула Ньютона–Лейбница, первообразная функции

Можно показать, что определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b равен разности значений некоей функции $F(x)$, называемой *первообразной*, взятых в точках — границах интегрирования a и b:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) называется *формулой Ньютона–Лейбница*. Разность в правой части (3.7) можно записать при помощи вертикальной черты:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{3.7a}$$

Первообразной непрерывной функции $f(x)$ является такая функция $F(x)$, что ее производная $F'(x)$ равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x). \tag{3.8}$$

Например, для функции $f(x) = 1$ первообразной будет $F(x) = x$, поскольку $(x)' = 1$. Фактически, для нахождения первообразных можно воспользоваться формулами производных, представленными в подразделе 1.3. Следует, однако, читать эти формулы в обратном порядке. Так, зная, что $(\sin x)' = \cos x$, можно сказать, что $F(x) = \sin x$ является первообразной $f(x) = \cos x$. Рассуждая аналогично, придем к заключению, что первообразной x^n будет $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Пример. Вычислить площадь S фигуры, лежащей между графиком функции $y = \sin x$ и осью OX на одном полупериоде этой функции (рис. 3.2).

Решение. В предыдущем примере площадь этой фигуры выражена через определенный интеграл. Сейчас, чтобы воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница, следует найти первообразную функции $y = \sin x$. В подразделе 1.3 находим, что $(\cos x)' = -\sin x$ (1.19), значит первообразная равна ($-\cos x$). Тогда: $S = \int\limits_a^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2.$

Ответ: $S = 2$.

Если к первообразной $F(x)$ добавить какую-либо постоянную C, то результат $F(x) + C$ также будет первообразной. Для доказательства возьмем производную от $F(x) + C$, учитывая, что производная от константы C равна нулю: $(F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$. Значит

$$F(x) + C \text{ — также первообразная } f(x). \tag{3.9}$$

Например, если функция ($-\cos x$) является первообразной функции $\sin x$, то и функция ($1 - \cos x$), и функция ($-10 - \cos x$), и функция ($0{,}003 - \cos x$) и т. д. также являются первообразными для $\sin x$.

3.3. Свойства определенного интеграла

Определенный интеграл представляет собой постоянную величину, число. Геометрический смысл этого числа — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции. Однако в отличие от площади в геометрии, определенный интеграл может быть отрицательным числом.

$$\int\limits_a^b f(x)dx < 0, \text{ если } f(x) < 0 \text{ на интервале от } a \text{ до } b. \tag{3.10}$$

Действительно, если в интегральной сумме (3.5) каждое слагаемое меньше нуля в силу того, что $f(x) < 0$, то и вся интегральная сумма и ее предел — определенный интеграл — также будут отрицательными.

Используя свойство (3.10) и рис. 3.2, можно заключить, что $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x dx < 0.$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx, \tag{3.11}$$

т. е. знак определенного интеграла меняется на противоположный при изменении направления интегрирования на обратное. В обоснование этого свойства можно сослаться на формулу Ньютона–Лейбница, где перемена местами границ интегрирования a и b ведет к смене знака: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(t)dt. \qquad (3.12)$$

Поскольку определенный интеграл — число, не зависящее от переменной интегрирования, то формальная замена одной переменной интегрирования на другую, скажем, x на t, не меняет результата.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (3.13)$$

Интеграл от a до b в левой части (3.13) равен площади S криволинейной трапеции, располагающейся вдоль оси OX от a до b (рис. 3.3). Эту фигуру можно мысленно разбить на две меньшие — одна от a до c и вторая от c до b. Площади этих двух трапеций S_1 и S_2 равны интегралам, стоящим в (3.13) справа, и в сумме равны S. Можно показать, используя (3.12), что равенство (3.13) выполняется и в том случае, когда точка c лежит за пределами интервала $[a; b]$.

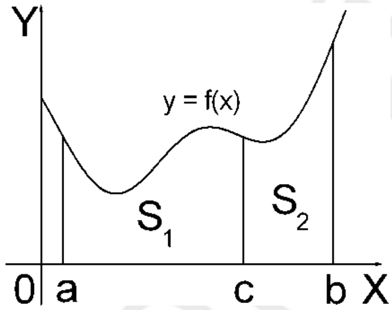


Рис. 3.3. Криволинейная трапеция под графиком функции $y = f(x)$ в пределах от a до b состоит из двух меньших: от a до c (S_1) и от c до b (S_2)

Определенный интеграл с совпадающими верхней и нижней границами интегрирования равен нулю. Высота трапеции равна $a - a = 0$. Значит, и ее площадь равна:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (3.14)$$

Постоянный множитель может быть вынесен из-под знака интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(t)dt = k \cdot \int_a^b f(t)dt. \qquad (3.15)$$

Если каждое слагаемое $k \cdot f(x) \cdot \Delta x$ в интегральной сумме (3.5) содержит постоянный множитель k, то этот множитель может быть вынесен за знак суммирования.

Аналогично, путем рассмотрения интегральной суммы (3.5), можно показать, что интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов:

$$\int_a^b (u \pm v)dx = \int_a^b udx \pm \int_a^b vdx. \qquad (3.16)$$

Среднее значение $\langle f \rangle$ функции $f(x)$ на интервале от a до b равно:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(t)dt. \qquad (3.17)$$

Выберем произвольным образом функцию $f(x)$. Пусть ее график $y = f(x)$ показан на рис. 3.4.

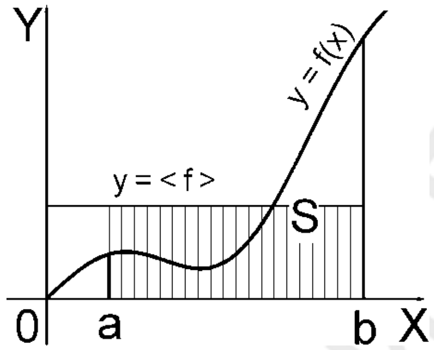


Рис. 3.4. Равновеликие по площади S криволинейная трапеция, ограничиваемая графиком функции $y = f(x)$, и прямоугольник, расположенный ниже линии $y = \langle f \rangle$, расположенной на высоте среднего значения функции на интервале от a до b (прямоугольник заштрихован)

На интервале от a до b он ограничивает криволинейную трапецию площадью S. Заменим изменяющуюся функцию неким постоянным значением, называемым средним $\langle f \rangle$. На рис. 3.4 ему соответствует горизонтальная прямая $y = \langle f \rangle$, ограничивающая прямоугольник со сторонами, равными $\langle f \rangle$ и $(b - a)$. Определение (3.17) требует, чтобы площадь этого прямоугольника $\langle f \rangle \cdot (b - a)$ была равна площади S фигуры под графиком функции.

3.4. Неопределенный интеграл. Интегралы элементарных функций

В подразделе 3.2 введено понятие первообразной $F(x)$ функции $f(x)$. Напомним, что по определению (3.8) $F'(x) = f(x)$. Было показано, что к первообразной $F(x)$ можно добавить произвольную постоянную величину C, и результат этого, $F(x) + C$, также будет первообразной функции $f(x)$. Таким образом, функция $f(x)$ обладает бесконечным множеством первообразных $F(x) + C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым C.

Множество всех первообразных $F(x) + C$ функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** данной функции. Неопределенный интеграл функции $f(x)$ обозначается $\int f(x)dx$ (читается «неопределенный интеграл эф от икс дэ икс»). Определение неопределенного интеграла можно записать так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (3.18)$$

Здесь C обозначает *неопределенную* константу, называемую *постоянной интегрирования*.

Как видим, в обозначении неопределенного интеграла, в отличие от определенного, отсутствуют (не определены) границы интегрирования. Имеется различие и в сути определенного и неопределенного интегралов. Определенный интеграл, как показано ранее, является постоянной величиной (числом), в то время как неопределенный интеграл — функция, имеющая в своем составе в качестве слагаемого неопределенную постоянную интегрирования C.

Вычисление как неопределенных (3.18), так и определенных (формула Ньютона–Лейбница) интегралов требует нахождения первообразных. На математическом языке это называется операцией интегрирования. Она является обратной дифференцированию. Правила дифференцирования (подраздел 1.3) универсальны, они позволяют найти производную любой функции, если только эта производная существует. Производная элементарных функций также будет элементарной функцией. Но в интегральном исчислении подобных универсальных правил для отыскания первообразной не существует в принципе — первообразная многих элементарных функции (например, e^{-x^2}) не может быть выражена через элементарные функции. Лишь некоторые из правил дифференцирования имеют аналоги при интегрировании.

Свойства неопределенного интеграла

$$\left(\int f(x)dx\right)_x' = f(x). \qquad (3.19)$$

Дифференцирование неопределенного интеграла функции $f(x)$ возвращает нас к этой же функции. По определению (3.18): $\left(\int f(x)dx\right)_x' =$ $= F'(x) + (C)' = f(x)$.

$$\int dF(x) = F(x) + C. \qquad (3.20)$$

Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой же функции плюс постоянная интегрирования: $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int (u(x) \pm v(x))dx = \int u(x)dx \pm \int v(x)dx. \qquad (3.21)$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \text{ и } \int \frac{f(x)dx}{k} = \frac{1}{k} \cdot \int f(x)dx, \text{ где } k = \text{const}. \quad (3.22)$$

Неопределенные интегралы некоторых элементарных функций

$$\int dx = x + C. \quad (3.23)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ при } n \neq -1. \quad (3.24)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad (3.25)$$

$$\int a^n dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ в частности, } \int e^x dx = e^x + C. \quad (3.26)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C. \quad (3.27)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C. \quad (3.28)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C. \quad (3.29)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C. \quad (3.30)$$

3.5. Некоторые методы интегрирования: приведение к табличному виду и метод замены переменных

Как указывалось в предыдущем подразделе, не существует универсальных методов нахождения первообразной. Не всегда первообразная может быть выражена через элементарные функции. Разработаны лишь частные методы интегрирования (порой весьма трудоемкие), позволяющие находить интегралы тех или иных типов. Рассмотрим два наиболее простых метода интегрирования.

В основе *метода приведения к табличному виду* лежат свойства (3.21) и (3.22). Используя их, иногда удается свести интегрирование к табличным формулам (3.23–3.30).

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int \left(\frac{2}{3} \cdot 10^x - 4\cos x + \frac{1}{2x} \right) dx.$$

Решение. Для краткости записи введем обозначение I для искомого интеграла. Подынтегральная функция является алгебраической суммой более простых функций. Используем свойство (3.21): $I=\int\frac{2}{3}\cdot 10^x dx-$ $-\int 4\cos x dx+\int\frac{1}{2x}dx.$

Далее, используя (3.22), выносим из-под интегралов постоянные множители: $I=\frac{2}{3}\int 10^x dx-4\int\cos x dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}.$ Оставшиеся интегралы — табличные, вида (3.26), (3.28) и (3.25). Поэтому: $I=\frac{2}{3}\left(\frac{10^x}{\ln 10}+C_1\right)-$ $-4(\sin x+C_2)+\frac{1}{2}(\ln x+C_3).$

В получившееся выражение входят три неопределенные постоянные интегрирования C_1, C_2 и C_3. Но результатом математических действий над постоянными величинами C_1, C_2 и C_3 (числами) тоже будет постоянная величина. И если конкретные значения C_1, C_2, C_3 неизвестны, то и результат проведенных над ними действий тоже будет неопределенным. Поэтому для краткости записи и удобства ее чтения следует объединить все промежуточные постоянные интегрирования в одну, C: $I=\frac{2\cdot 10^x}{3\ln 10}-$ $-4\sin x+\frac{1}{2}\ln x+C.$

Ответ: $\frac{2\cdot 10^x}{3\ln 10}-4\sin x+\frac{1}{2}\ln x+C.$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{3x^3-2x^2+x-1}{2x^2}dx.$

Решение. Разложим подынтегральную функцию на алгебраическую сумму более простых:

$$I=\int\left(\frac{3x^3}{2x^2}-\frac{2x^2}{2x^2}+\frac{x}{2x^2}-\frac{1}{2x^2}\right)dx=\int\left(\frac{3}{2}x-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^{-2}\right)dx.$$

Получаем интегралы табличного вида (3.24), (3.25):

$$I=\frac{3}{2}\int x dx-\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int x^{-2}dx=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{-1}+C=$$

$$=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2x}+C.$$

Ответ: $\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2x}+C.$

Применяя *метод замены переменной* (подстановки), переходят от одной переменной интегрирования (x) к другой, вспомогательной (y), связанной с исходной переменной функциональной зависимостью $y(x)$. При этом первоначальный интеграл $\int f(x)dx$ преобразуется в эквивалентный $\int \varphi(y)dy,$ нахождение которого может оказаться более легкой задачей.

Следует помнить, что переход должен быть осуществлен не только в подынтегральной функции, но и в дифференциале переменной интегрирования. Связь между дифференциалами dy и dx устанавливают, рассматривая новую переменную интегрирования y как функцию старой x и используя определение дифференциала функции (2.2): $dy = y'_x\, dx$. Перейдем к примерам.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

Решение. Сделаем замену $y = 3x + 1$. Для того чтобы перейти под интегралом от dx к dy, используем определение дифференциала $dy = (3x + 1)'_x\, dx$, откуда выражаем dx:

$$I = \left| \begin{matrix} y = 3x+1 \\ dy = (3x+1)'dx \\ dy = 3dx, dx = \dfrac{dy}{3} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{y^{-0,5+1}}{-0,5+1} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{y} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C.$$

Вставка, ограниченная вертикальными чертами, содержит вычисления, связанные с заменой переменных. Найдя первообразную, сделали обратную замену — возвратились к исходной переменной x от вспомогательной y.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C.$

Применение метода замены переменных для вычисления определенных интегралов имеет особенность. Необходимо учитывать, что границы интегрирования изменяются при переходе к новой переменной. Например, при замене $y = 3x + 1$ границы интегрирования $a = 0$ и $b = 1$ преобразуются в $\alpha = 3 \cdot 0 + 1 = 1$ и в $\beta = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ соответственно. Пересчитанные границы интегрирования (α и β) можно напрямую подставлять в формулу Ньютона–Лейбница, без проведения обратной замены.

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $S = \int_0^{\pi} \cos x \cdot \sqrt[3]{\sin x}dx.$

Решение. Делаем подстановку y = cos x и соответствующим образом преобразуем границы интегрирования:

$$\int_0^{\pi} \cos x \cdot \sqrt[3]{\sin x} dx = \left| \begin{array}{c} y = \sin x \\ dy = (\sin x)' dx \\ dx = \dfrac{dy}{\cos x} \end{array} \right| = \int_{x=0}^{x=\pi} \cos x \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \frac{dy}{\cos x} = \left| \begin{array}{c} \sin 0 = 0 \\ \sin \pi = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 y^{\frac{1}{3}} dy = \frac{3}{4} \cdot y \cdot \sqrt[3]{y} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Границы интегрирования можно и не пересчитывать, но в этом случае необходимо вернуться к исходной переменной до подстановки границ в формулу Ньютона–Лейбница. Будем указывать, которая из переменных используется для описания границ интегрирования.

Пример 5. Найти $S = \int_0^2 x \cdot e^{1-x^2} dx.$

Решение. Используем замену $y = 1 - x^2$:

$$\int_0^2 x \cdot e^{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{c} y = 1 - x^2 \\ dy = -2x dx \\ dx = -\dfrac{dy}{2x} \end{array} \right| = \int_{x=0}^{x=2} x \cdot e^y \cdot \left(-\frac{dy}{2x} \right) = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=2} e^y dy = \frac{1}{2} e^y \Big|_{x=2}^{x=0} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{1-x^2} \Big|_2^0 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2e^3}.$$

Ответ: $\dfrac{e}{2} - \dfrac{1}{2e^3}$.

3.6. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Рассмотрим определенный интеграл, верхний предел интегрирования в котором является переменной величиной, например x. Обозначим переменную интегрирования t и воспользуемся формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Определенный интеграл с переменным верхним пределом — *функция*, а не постоянная величина (число), которой является определенный интеграл с фиксированными пределами. В отличие от неопределенного интеграла в состав определенного интеграла с переменным верхним пределом не входит неопределенная постоянная интегрирования C.

Переменными могут быть как верхний, так и нижний пределы интеграла. Изменение направления интегрирования на противоположное (3.11) всего лишь меняет знак интеграла: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^x f(x)dx.$

Использование различных букв (например, t и x) для обозначения переменной интегрирования и переменного предела интегрирования подчеркивает различную роль этих величин в интеграле. Менее наглядно, хотя также возможно, применение одного и того же символа, например: $\int_a^x f(x)dx.$

Пример. Найти и сравнить: а) $\int_0^x tdt$; б) $\int_0^x xdx$; в) $\int_0^3 xdx$; г) $\int xdx$.

Решение. Интегралы (а) и (б) эквивалентны — это разные записи одного и того же определенного интеграла, являющегося функцией аргумента x: $\int_0^x tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ и $\int_0^x xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$.

Интеграл (в) — определенный интеграл с постоянными пределами — равен числу: $\int_0^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}$.

Интеграл (г) — неопределенный, это сумма функции от x и неопределенной постоянной интегрирования: $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$

Ответ: $\int_0^x tdt = \int_0^x xdx = \frac{x^2}{2}$; $\int_0^3 xdx = \frac{9}{2}$; $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C.$

3.7. Несобственные интегралы

Ранее нами рассматривались определенные интегралы функций $f(x)$, непрерывных в пределах интегрирования, и подразумевалось, что пределы интегрирования a и b конечны. ***Несобственными*** называются определенные интегралы разрывных функций или интегралы с бесконечными пределами.

Рассмотрим интеграл с бесконечным ($+\infty$) верхним пределом как предел, к которому стремится интеграл с конечными пределами:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \qquad (3.31)$$

Такой несобственный интеграл существует, если существует соответствующий предел. Он равен площади фигуры, бесконечно длинной вдоль оси OX (рис. 3.5).

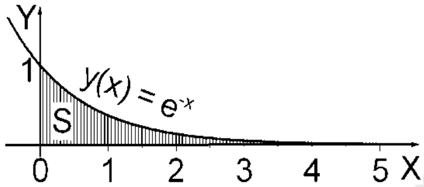


Рис. 3.5. Геометрическая интерпретация несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} e^{-x}dx$

Пример. Найти $S = \int_a^{+\infty} e^{-x}dx.$

Решение. $S = \int_a^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = -\dfrac{1}{e^{+\infty}} + 1 = 1.$

Ответ: $\int_a^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$

Если функция $f(x)$ претерпевает разрыв в точке $x = c$, принадлежащей интервалу интегрирования $(a;\ b)$, то определенный интеграл этой функции будет несобственным. Вычислять его следует последовательным интегрированием на интервалах $(a;\ c)$ и затем $(b;\ c)$. Пусть, например, функция $f(x)$ равна нулю при отрицательных значениях аргумента x и единице — при положительных. Проинтегрируем ее в пределах от $a = -1$ до $b = 1$, учитывая, что функция претерпевает разрыв при $c = 0$: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$,

находим $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{1} 1\cdot dx = 0 + x\Big|_0^1 = 1.$

Подынтегральная функция может обращаться в бесконечность в точке разрыва. В этом случае несобственный интеграл может и не существовать. Попытаемся проинтегрировать в пределах от $a = -1$ до $b = 1$ функцию $y = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$. Эта функция претерпевает разрыв и обращается в бесконечность в точке $x = 0$. Требуется последовательно находить интегралы S_1 и S_2 на интервалах от -1 до 0 и от 0 до 1. (Формальная подстановка в формулу Ньютона–Лейбница в качестве первообразной $F(x) = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$ дает заведомо неверное отрицательное значение $S = -2$ для площади бесконечно высокой полосы под графиком $y = x^{-2}$, изображенном на рис. 3.6.) Но оба интеграла, как S_1, так и S_2, расходятся, т. е. не имеют конечных значений: $S_1 = \int_{-1}^{0} x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{0} - 1$ и $S_2 = \int_{0}^{1} x^{-2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{0}^{1} = -1 + \frac{1}{0}$. Поэтому расходится и искомый несобственный интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

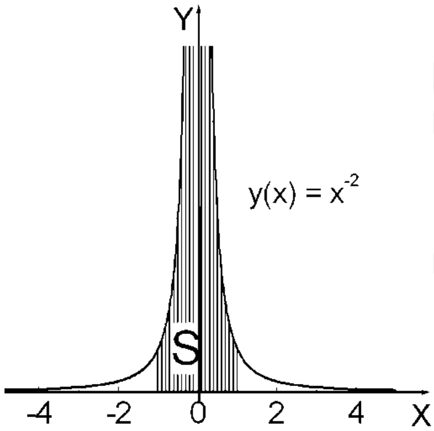


Рис. 3.6. Геометрическая интерпретация несобственного интеграла $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

4. ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Общее и частное решения дифференциального уравнения

Многие научные законы и теории не ограничиваются описанием функциональных связей между различными переменными величинами. Часто требуется учитывать и скорости изменения функций, их градиенты, приращения и другие величины, выражаемые на математическом языке при помощи производных и дифференциалов. Так, математическая запись второго закона Ньютона $F = m \cdot a$ является уравнением, связывающим массу тела m, действующую на него силу F и возникающее под действием этой силы ускорение тела a, которое может рассматриваться как первая производная v'_t скорости тела по времени или как вторая производная x'' координаты тела по времени.

Уравнения, содержащие производные или дифференциалы неизвестных функций, получили название ***дифференциальных уравнений***.

Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то уравнение называется *обыкновенным* дифференциальным уравнением в отличие от уравнения *в частных производных*, содержащего функции многих аргументов. Мы ограничимся знакомством с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Порядок дифференциального уравнения — порядок наивысшей производной или дифференциала, входящих в это уравнение. Например, в уравнениях $y' + x = 0$ и $(y')^2 - x^2 + 1 = 0$ присутствуют производные только первого порядка, значит, и порядок данных уравнений — первый. Заметим, что играет роль именно порядок производной, а не ее степень. В уравнения $y'' + y = 0$ и $(x^2 + 1) \cdot y'' + (y')^3 - 2y + \sin x = 0$ входят вторые производные — значит, это уравнения второго порядка.

Решениями дифференциального уравнения называются функции, обращающие данное уравнение в тождество. Проверить, является ли данная функция решением дифференциального уравнения, можно прямой подстановкой.

Пример 1. Проверить, являются ли функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = -x^2$ решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$.

Решение. Сперва проверим y_1. Кроме самой этой функции в уравнение требуется подставить и ее вторую производную: $(y_1)' = (\sin x)' = \cos x$. Соответственно, $(y_1)'' = ((y_1)')' = (\cos x)' = -\sin x$.

Теперь подставим y_1 и найденную $(y_1)''$ в уравнение: $-\sin x + \sin x = 0$ — подстановка обращает дифференциальное уравнение в тождество, значит функция $y_1 = \sin x$ является его решением.

Проверяем y_2. Вторая производная этой функции $(y_2)'' = ((x^2)')' =$ $= (-2x)' = -2$. Подстановка в уравнение дает: $-2 + x^2 = 0$ — это равенство не является тождеством (оно выполняется не при всех возможных значениях x), значит функция $y_2 = -x^2$ не является решением.

Ответ: $y_1 = \sin x$ — решение; $y_2 = -x^2$ — нет.

К сожалению, единого метода отыскания аналитических (в виде функций) решений дифференциальных уравнений до сих пор не найдено, во многих практически важных случаях используются приближенные вычисления на компьютерах. В простейших случаях, как будет показано ниже, поиск решений содержит этап вычисления интеграла. Это ведет к включению в решение неопределенной константы (постоянной интегрирования). Интегрирование проводится столько раз, каков порядок дифференциального уравнения. Соответственно, *общее решение* дифференциального уравнения содержит столько неопределенных констант, каков порядок дифференциального уравнения. Так, общим решением дифференциального уравнения второго порядка, приведенного в примере 1, будет функция $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Эта функция, содержащая две неопределенные постоянные C_1 и C_2, обращает рассматриваемое уравнение в тождество.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если выбрать какой-то определенный набор констант. Функция $y_1 = \sin x$ из примера 1 является таким частным решением, она получается из общего, если принять $C_1 = 1$ и $C_2 = 0$.

Общее решение содержит в себе все частные, а каждое частное решение является частным случаем общего. Частное решение выбирают в соответствии с *дополнительными* (начальными) *условиями*.

Пример 2. Общим решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ является функция $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Найти частное решение, отвечающее дополнительным условиям $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$.

Решение. Дополнительное условие $y(0) = 1$ значит, что $y = 1$ при $x = 0$. Подставим его в общее решение: $1 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$. Учитывая, что $\sin 0 = 0$, а $\cos 0 = 1$, приходим к заключению, что $C_2 = 1$, а $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ является частным решением, отвечающим дополнительному условию $y(0) = 1$.

Второе дополнительное условие $y'(0) = 0$ значит, что $y' = 0$ при $x = 0$. Чтобы им воспользоваться, следует найти производную от общего решения: $y' = C_1 (\sin x)' + C_2 (\cos x)' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$. Произведя подстановку, получим $0 = C_1 \cdot 1 - C_2 \cdot 0$, значит, $C_1 = 0$.

Частным решением, удовлетворяющим обоим дополнительным условиям, является функция $y = \cos x$.

Ответ: $y = \cos x$.

Замечание. У некоторых дифференциальных уравнений существуют *особые решения*, не получающиеся из общих решений ни при каких значениях постоянных интегрирования C. В таких случаях общие решения не охватывают всех решений данного уравнения, а только все частные решения.

Пример 3. Функция $y = \sin (x + C)$ является общим решением дифференциального уравнения $y' = \sqrt{1-y^2}$. Является ли решением этого уравнения функция $y_1 = -1$? Если является, то каким?

Решение. Подставим функцию y_1 и ее производную $(y_1)' = 0$ в уравнение $0 = \sqrt{1-(-1)^2}$ — это тождество, справедливое при любом x. Значит, функция y_1 является решением данного дифференциального уравнения.

Проверим, является ли функция y_1 частным решением, для чего попытаемся найти то значение постоянной C, которое превращает общее решение в y_1: $-1 = \sin (x + C)$ — это равенство не может быть тождеством ни при каком C. Значит y_1 является особым решением.

Ответ: $y_1 = -1$ — особое решение.

4.2. Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения первого порядка, как ясно из их названия, содержат производные (дифференциалы) только первого порядка. *Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными* позволяет выразить производную y' в виде произведения $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)$ двух выражений, одно из которых, $\varphi_1(x)$, зависит только от аргумента x, а второе, $\varphi_2(y)$, — только от функции y:

$$y' = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y). \tag{4.1}$$

Уравнения вида (4.1) можно решить *методом разделения переменных*. На первом этапе решения все члены уравнения группируют на две части, одна из которых, $\dfrac{dy}{\varphi_2(y)}$, зависит только от одной переменной y и содержит в качестве множителя дифференциал dy только этой же переменной. Другая часть, $\varphi_1(x)dx$, в свою очередь, зависит только от другой переменной x и в качестве множителя включает лишь дифференциал dx:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y);$$

$$\frac{dy}{\varphi_2(y)} = \varphi_1(x)dx. \tag{4.2}$$

Теперь переменные разделены и равенство (4.2) можно проинтегрировать. Интеграл от левой части (4.2) будет равен интегралу от правой части:

$$\int \frac{dy}{\varphi_2(y)} = \int \varphi_1(x)\, dx + C. \tag{4.3}$$

В общем решении (4.3) дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными учтено появление неопределенной постоянной интегрирования C.

Пример. Найти общее решение уравнения $y' + 3x^2y = 0$.

Решение. Разделим переменные x и y, представив производную как отношение дифференциалов: $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 0$, откуда $\dfrac{dy}{dx} = -3x^2y$ и $\dfrac{dy}{dy} = -3x^2dx$.

Теперь переменные разделены и можно интегрировать: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2 dx + C$.

Оба интеграла табличные, вида (3.25) и (3.24), поэтому общее решение в неявном виде задается формулой $\ln |y| = -x^3 + C$.

Выразим y в явном виде. Неопределенную постоянную C представим как логарифм неопределенной постоянной $\ln C$, что приведет общее решение к виду $\ln |y| = -x^3 + \ln C$. Перенеся $\ln C$ в левую часть и объединив логарифмы (используем свойство логарифмов $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$), получим $\ln \left| \frac{y}{C} \right| = -x^3$.

Потенцируем эту формулу, т. е. возведем число e в степень, равную левой и правой частям равенства, учтем что $e^{\ln a} = a$, тогда $\frac{y}{C} = e^{-x^3}$, откуда получаем окончательный вид общего решения: $y = Ce^{-x^3}$.

Ответ: $y = Ce^{-x^3}$.

4.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Большой практический интерес (см., например, подраздел 5.3) имеют дифференциальные уравнения вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4.4}$$

где p и q — постоянные коэффициенты. Такие уравнения называются *линейными однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами*. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что их общее решение всегда может быть найдено и, более того, выражено через элементарные функции.

Попробуем отыскать частное решение уравнения (4.4) в виде функции $y = e^{kx}$, где k — постоянная величина. Чтобы определить k, следует подставить функцию $y = e^{kx}$ в уравнение (4.4). Для этого понадобятся первая и вторая производные тестируемой функции, найдем их:

$$y' = (e^{kx})' = e^{kx}(kx)' = ke^{kx};$$

$$y'' = (ke^{kx})' = k^2e^{kx}.$$

В результате подстановки в уравнение (4.4) получаем $k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$. Здесь можно вынести за скобки экспоненту, получится уравнение $(k^2 + pk + q)e^{kx} = 0$. Оно выполняется, когда $e^{kx} = 0$ или $k^2 + pk + q = 0$. Варианту $e^{kx} = 0$ соответствует тривиальное решение $y = 0$ (так как $e^{kx} = y$), не имеющее практического интереса. Таким образом, для того чтобы найти k, остается рассмотреть так называемое *характеристическое уравнение*

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{4.5}$$

Дискриминант характеристического уравнения $D = p^2 - 4q$ может быть больше нуля, равен нулю или меньше нуля.

В первом случае ($D > 0$) для k возможны два различных значения $k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ и $k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, ведущие к частным решениям $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$. Общее решение дифференциального уравнения (4.4) можно представить в виде линейной комбинации:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (4.6)$$

Как и положено общему решению дифференциального уравнения второй степени, оно содержит две различные неопределенные постоянные C_1 и C_2.

В случае, когда $D = 0$, для k возможно единственное значение: $k = -\frac{p}{2}$. Теперь частными решениями будут $e^{-\frac{p}{2}x}$ и $xe^{-\frac{p}{2}x}$, в чем можно убедиться прямой подстановкой. Общее решение дается формулой:

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 + C_2 x). \qquad (4.7)$$

Если дискриминант характеристического уравнения (4.5) меньше нуля ($D < 0$), то вещественных решений вида e^{kx} у дифференциального уравнения (4.4) не существует. Их следует искать среди гармонических функций. Общее решение в этом случае будет иметь вид:

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \text{ где } \beta = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}. \qquad (4.8)$$

Проведя тригонометрические преобразования, можно привести (4.8) к виду:

$$y = C_1 \cdot e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \sin(\beta x + C_2). \qquad (4.8а)$$

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + k - 2 = 0$. Его дискриминант равен $D = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 9$, а корни $\left(k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}\right)$ равны –2 и 1.

Поскольку $D > 0$, общее решение дифференциального уравнения будет линейной комбинацией экспонент вида (5.6): $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

Ответ: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение: $k^2 + 2k + 1 = 0$. Его дискриминант равен $D = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$, имеется единственный корень $k = -1$.

Поскольку $D = 0$, общее решение дифференциального уравнения соответствует формуле (5.7): $y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 + C_2 x) = e^{-x} \cdot (C_1 + C_2 x)$.

Ответ: $y = e^{-x} \cdot (C_1 + C_2 x)$.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$. Его дискриминант $D = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16$ меньше нуля, поэтому общее решение дифференциального уравнения следует искать по формулам (4.8) и (4.8а).

$\beta = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{2}{2}\right)^2}$, значит, $y = e^{-\frac{p}{2}x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) =$
$= e^{x} \cdot (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ — форма записи вида (4.8).

Равноценная форма записи общего решения, соответствующая формуле (4.8а): $y = C_1 \cdot e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \sin(\beta x + C_2) = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \sin(2x + C_2)$.

Ответ: $y = C_1 \cdot e^{-x} \cdot \sin(2x + C_2)$.

4.4. Составление дифференциальных уравнений, описывающих фармацевтические, медико-биологические и физико-химические явления и процессы

Универсальных правил составления дифференциальных уравнений по заданным условиям прикладной задачи не существует. Требуется выявить и описать на математическом языке, при помощи формул, существенные связи между переменными величинами и их бесконечно малыми приращениями. Именно переход к бесконечно малым приращениям позволяет заменить их дифференциалами и превратить выявленные связи в дифференциальные уравнения.

Пусть, например, известно, что функция $y(t)$ прирастает за малый интервал времени Δt пропорционально его длительности и обратно пропорционально квадрату своего собственного значения y^2 в данный момент времени. Обозначив коэффициент пропорциональности буквой k, опишем эти связи формулой $\Delta y = k \cdot \frac{1}{y^2} \cdot \Delta t$. Приняв приращения бесконечно малыми и перейдя к дифференциалам, получаем дифференциальное уравнение: $dy = \frac{k}{y^2}dt$.

При составлении дифференциальных уравнений используются скорости изменения функций, их градиенты, ускорения и другие характеристики, выражаемые математически при помощи производных. Такие производные часто записываются в виде отношения дифференциалов, например $y' = \frac{dy}{dx}$. В ходе дальнейших преобразований математические действия над этими дифференциалами проводят как над самостоятельными величинами.

5. РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Растворение лекарственной формы вещества из таблетки

Построение математической модели процесса начинают с выявления наиболее существенных характеристик данного процесса и связей между ними. Следует уяснить, какие величины наилучшим образом отражают суть явления, как и под воздействием каких факторов они изменяются.

Будем описывать содержание лекарственной формы вещества в таблетке посредством массы m этой формы. С течением времени t данная масса изменяется из-за растворения — значит масса является функцией $m(t)$ времени.

Чем больше лекарственной формы вещества содержится в данный момент в таблетке, тем лучшим источником вещества является таблетка и выше скорость растворения. (Когда лекарственная форма вещества растворится полностью, скорость растворения упадет до нуля.)

Будем исходить из предположения, что скорость растворения пропорциональна содержанию вещества в таблетке. Это предположение можно описать формулой $m'_t = -km$, поскольку математическим аналогом скорости служит производная функции по времени. Здесь k — постоянная растворения, коэффициент пропорциональности. Знак минус в формуле означает, что производная (скорость) меньше нуля, так как функция (масса) уменьшается.

Записав производную как отношение дифференциалов, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dm}{dt} = -km. \qquad (5.1)$$

Разделим переменные m и t и получим $\frac{dm}{dt} = -k \cdot dt$, затем проинтегрируем:

$$\int \frac{dm}{m} = -k \int dt + C. \tag{5.2}$$

Получились табличные интегралы вида (3.25) и (3.23), поэтому общее решение в неявном виде $\ln m = -kt + C$. Чтобы выразить из него m, возведем число e в степени, равные левой и правой частям равенства (учтем, что $e^{\ln a} = a$): $m = e^{-kt + C} = e^{-kt} \cdot e^{C}$. Множитель e^{C} является неопределенной константой, переобозначив его символом C, получим общее решения уравнения (5.1) в виде

$$m(t) = C \cdot e^{-kt}. \tag{5.3}$$

Выбор частного решения должен быть обусловлен какими-либо дополнительными условиями. Пусть, например, в начальный момент времени $t = 0$ масса лекарственной формы вещества в таблетке была $m(0) = m_0$. Подставив это начальное условие в (5.3), доопределим C: $m_0 = C \cdot e^{-k \cdot 0} = C$. Частным решением, учитывающим начальное условие, будет функция (рис. 5.1)

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}. \tag{5.4}$$

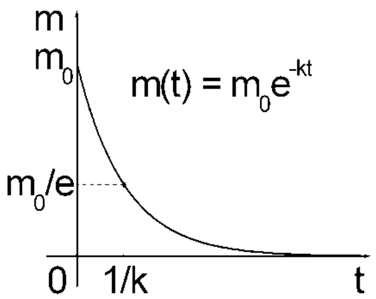


Рис. 5.1. Зависимость массы лекарственной формы вещества в таблетке от времени растворения

5.2. Кинетика химических реакций

При математическом моделировании протекания химических реакций удобнее рассматривать не абсолютное количество реагента, а его концентрацию n, которая является функцией времени $n(t)$. Производную концентрации по времени n'_t назовем скоростью реакции. Скорость реакции отрицательна, поскольку вещества, вступающие в химическую реакцию, расходуются по мере протекания данной реакции. Сама реакция при этом замедляется и затухает. Значит, абсолютная величина скорости реакции тем больше, чем больше концентрация реагента. Простейшим математическим описанием такой зависимости будет пропорция

$$n'_t = -k \cdot n, \tag{5.5}$$

где k — постоянная скорость реакции.

Дифференциальное уравнение (5.5) моделирует химическую *реакцию первого порядка*, скорость которой зависит от концентрации лишь одного реагента. Это уравнение подобно уравнению (5.1), с помощью которого моделировалось растворение лекарственной формы вещества из таблетки.

Разделим переменные в (5.5): $\frac{dn}{dt} = -k \cdot n$, значит, $\frac{dn}{n} = -k \cdot dt$.

Теперь можно интегрировать: $\int \frac{dn}{n} = -k \cdot \int dt + C$.

Получаем общее решение в неявном виде: $\ln n = C - k \cdot t$. Чтобы выразить искомую концентрацию n, потенцируем (возводим число e в степени, равные левой и правой частям равенства, учитываем, что $e^{\ln a} = a$): $n = e^{C - k \cdot t} = e^{C} \cdot e^{-k \cdot t}$. Переобозначим e^{C} буквой C, тогда общее решение приобретет вид:

$$n(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}. \qquad (5.6)$$

Начальное условие $n(0) = n_0$, подставленное в (5.6), приведет к частному решению, описывающему концентрацию реагента, вступающего в реакцию первого порядка:

$$n(t) = n_0 \cdot e^{-k \cdot t}. \qquad (5.7)$$

График этой функции показан на рис. 5.2 линией 1.

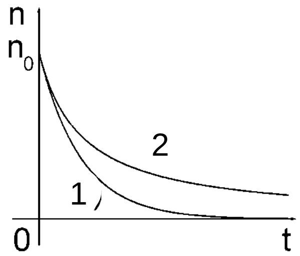


Рис. 5.2. Концентрации веществ, участвующих в реакции первого и второго порядков, в зависимости от времени. Начальные концентрации реагентов n_0 и постоянные скорости реакции k в обоих случаях одинаковы:
1 — реакция первого порядка; *2* — реакция второго порядка

Скорость химической *реакции второго порядка* пропорциональна концентрациям двух реагентов. Если оба вещества расходуются одинаково и имеют одинаковые концентрации $n(t)$, то скорость реакции равна:

$$n'_t = -k \cdot n^2. \qquad (5.8)$$

Разделим переменные в этом дифференциальном уравнении: $\frac{dn}{dt} = -k \cdot n^2$, значит, $\frac{dn}{n^2} = -k \cdot dt$. Это уравнение можно интегрировать: $\int \frac{dn}{n^2} = -k \cdot \int dt + C$. Вычислив интегралы, получаем общее решение в неявном виде: $-\frac{1}{n} = -k \cdot t + C$. Выразим n явно:

$$n(t) = \frac{1}{k \cdot t - C}. \qquad (5.9)$$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ начальные концентрации были $n(0) = n_0$. Подставим это дополнительное условие в общее решение (5.9): $n(0) = n_0 = \frac{1}{k \cdot 0 - C} = -\frac{1}{C}$. Тогда значение постоянной интегрирования C определится: $C = -\frac{1}{n_0}$. Подставив его в общее решение, получим $n = \frac{1}{k \cdot t + \frac{1}{n_0}}$. Домножив числитель и знаменатель дроби на n_0, получаем частное решение, описывающее концентрацию веществ, вступающих в реакцию второго порядка:

$$n(t) = \frac{n_0}{1 + k \cdot t}. \qquad (5.10)$$

График этой функции показан на рис. 5.2 линией 2.

5.3. Свободные колебания

Свободные колебания — весьма распространенное явление, характерное для множества систем, имеющих самую различную природу. Математическая модель свободных колебаний базируется на одних и тех же уравнениях. Рассмотрим поведение простейшей колебательной системы — материальной точки массой m, прикрепленной к упругой пружинке, жесткость которой r. Колеблясь, точка отклоняется от положения равновесия. Величина отклонения является функцией времени $x(t)$, которую и следует отыскать. Скорость v точки математически выражается первой производной отклонения по времени x'_t, а ускорение a — второй производной x''. Движение материальной точки подчиняется второму закону Ньютона ($F = ma$), являющемуся дифференциальным уравнением второго порядка относительно x: $F = mx''$. Здесь F — сумма сил, действующих на точку.

Пусть на точку действует только возвращающая сила со стороны пружинки, равная $-rx$. Подставим ее во второй закон Ньютона:

$$mx'' = -rx.$$

Разделив обе части уравнения на m и введя частоту свободных колебаний $\omega_0 = \sqrt{\frac{r}{m}}$, получим дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \qquad (5.11)$$

Это уравнение является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами, алгоритм решения которого разобран ранее в подразделе 4.3. Чтобы выяснить вид решения уравнения (5.11), составим его характеристическое уравнение:

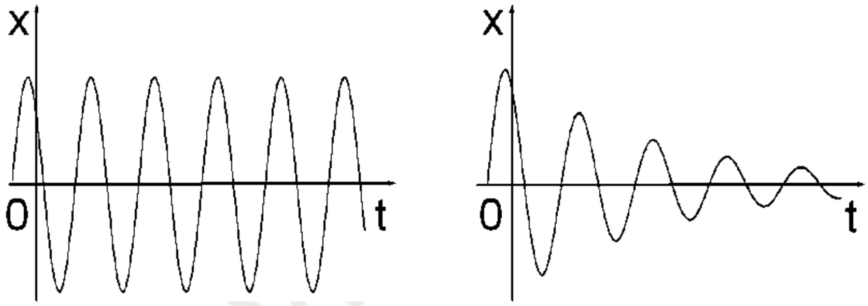
$$k^2 + \omega_0^2 = 0. \tag{5.12}$$

Оно не имеет вещественных решений, поскольку его дискриминант отрицателен: $D = -4\omega_0^2$. Значит (см. подраздел 4.3) общее решение уравнения (5.11) является гармонической функцией вида (4.8а): $y = C_1 \cdot e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \sin(\beta x + C_2)$. В характеристическом уравнении (5.12) коэффициент p, стоящий при первой степени k, равен нулю ($p = 0$), а свободный член характеристического уравнения $q = \omega_0^2$. Поэтому $\beta = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} =$ $= \sqrt{\omega_0^2 - 0^2} = \omega_0$.

Произведя подстановки, получим общее решение дифференциального уравнения свободных незатухающих колебаний:

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega_0 x + C_2). \tag{5.13}$$

График этой функции представлен на рис. 5.3, *а*.



а ***б***

Рис. 5.3. Графики свободных колебаний:
а — незатухающих, вида (5.13); *б* — затухающих, вида (5.16)

Рассмотрим случай, когда кроме силы сопротивления пружинки на материальную точку действует еще и сила трения $-\alpha \cdot x$, пропорциональная скорости точки. Теперь второй закон Ньютона запишется так:

$$m \cdot x'' = -r \cdot x - \alpha \cdot x'.$$

Введем коэффициент затухания $\gamma = \frac{\alpha}{2m}$ и приведем дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний к стандартному виду:

$$x'' + 2\gamma \cdot x + \omega_0^2 x = 0. \tag{5.14}$$

Уравнение (5.14) также является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k\gamma + \omega_0^2 = 0. \qquad (5.15)$$

Дискриминант уравнения (5.15) $D = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$ отрицателен при слабом затухании, когда: $\gamma < \omega_0$. В этом случае, как указано в подразделе 4.3, общее решение дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний имеет вид $y = C_1 \cdot e^{-\frac{p}{2}x} \cdot \sin(\omega \cdot x + C_2)$, где $p = 2\gamma$ — коэффициент характеристического уравнения (5.12), стоящий при первой степени k, а $q = \omega_0^2$ — свободный член этого уравнения. Тогда $\omega = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Сделав эти подстановки, приведем общее решение уравнения (5.14) к виду:

$$y = C_1 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \cdot \sin(\omega \cdot x + C_2). \qquad (5.16)$$

График этой функции представлен на рис. 5.3, *б*.

Замечание. При более сильном затухании, когда коэффициент затухания γ равен или даже превышает значение собственной частоты незатухающих колебаний ω_0, общее решение дифференциального уравнения (5.14) будет апериодической функцией вида (4.6) или (4.7).

5.4. Радиоактивный распад

Исходные данные. Ядра некоторых изотопов нестабильны, распадаются с течением времени. Обнаружено опытным путем, что этот процесс носит вероятностный характер. Вероятность P распада одного ядра за интервал времени Δt пропорциональна длительности этого интервала: $P = \lambda \cdot \Delta t$, где λ — коэффициент, получивший название постоянной распада. Если в пробе содержится достаточно большое число N нестабильных ядер, то, как следует из теории вероятностей, найти количество распадов можно, перемножив N на вероятность P распада одного ядра.

На основании исходных данных составим дифференциальное уравнение. Выберем в качестве искомой функции количество ядер $N(t)$, остающихся нераспавшимися к моменту времени t. Приращению аргумента на Δt соответствует приращение функции $-\Delta N$. Это приращение отрицательно, поскольку функция убывает. Из исходных данных следует, что

$$-\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t. \qquad (5.17)$$

Если приращения в (6.17) бесконечно малы, то можно заменить их соответствующими дифференциалами:

$$-\frac{dN}{N} = \lambda \cdot dt. \qquad (5.18)$$

Равенство (5.18) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, с точки зрения математики аналогичное уравнению (5.1), моделирующему растворение лекарственной формы вещества из таблетки.

Интегрируем (5.18): $-\int \frac{dN}{N} = \lambda \cdot \int dt.$

Учтем начальные условия на этом этапе. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в пробе существовало N_0 нестабильных ядер. А в момент времени t их остается N. Значения, соответствующие начальному моменту времени, можно сделать нижними границами интегрирования 0 и N_0. Тогда значения t и N будут верхними границами интегрирования:

$$-\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \lambda \cdot \int_{0}^{t} dt. \qquad (5.19)$$

Находим определенные интегралы с переменными верхними пределами:

$$-\ln N + \ln N_0 = \lambda \cdot t - \lambda \cdot 0.$$

Выражаем искомую величину N: $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda \cdot t,$ значит:

$$N = N_0 e^{-\lambda \cdot t}. \qquad (5.20)$$

Функция (5.20) является частным решением дифференциального уравнения (5.18). Мы получили его сразу, не находя общего решения, поскольку учли дополнительные условия на этапе интегрирования.

График функции (5.20) аналогичен показанному на рис. 5.1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Капитонов Андрей Михайлович

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск В. Г. Лещенко
Редактор Н. В. Оношко
Компьютерная верстка Н. М. Федорцовой

Подписано в печать 18.04.13. Формат 60×84/16. Бумага писчая «Снегурочка».
Ризография. Гарнитура «Times».
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,02. Тираж 99 экз. Заказ 565.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Белорусский государственный медицинский университет».
ЛИ № 02330/0494330 от 16.03.2009.
Ул. Ленинградская, 6, 220006, Минск.