

- [3] Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
- [4] Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
- [5] Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Основы механики сплошной среды. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
- [6] Димитриенко Ю. И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
- [7] Нигматулин Р. И. Механика сплошной среды. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2014. 528 с.

## Математическое моделирование биомеханической системы среднего уха человека

*Босяков С.М.,<sup>1</sup> Малец Е.Л.,<sup>2</sup> Петрова Л.Г.<sup>3</sup>*

*bosiakov@bsu.by, malets-al@yandex.by, petrova\_l@tut.by*

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет,

220030, Республика Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4,

<sup>2</sup>Республиканский научно-практический центр оториноларингологии,

220004, Республика Беларусь, Минск, ул. Сухая, 8,

<sup>3</sup>Белорусский государственный медицинский университет,

220083, Республика Беларусь, Минск, пр. Дзержинского, 83

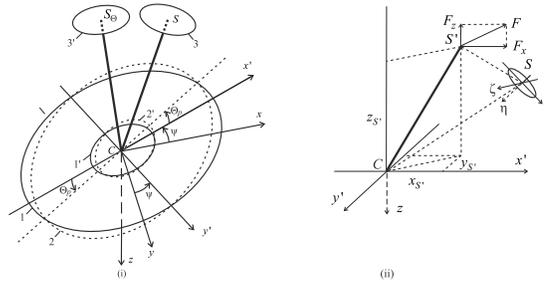
**Аннотация.** В настоящей работе представлены результаты математического моделирования колебательной системы среднего уха человека, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссиклопластике, трансплантации тимпанальной мембраны после удаления ретракционного кармана, а также аэрации барабанной полости в условиях хронической дисфункции слуховой трубы. Полученные результаты позволяют сопровождать и планировать лечение потери слуховой проводимости, связанной с перфорациями тимпанальной мембраны, возникновением различных отитов, пороков развития или неправильным формированием.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, среднее ухо, тимпанальная мембрана, аэрация барабанной полости, тимпанопластика, хрящевой трансплантат.

**Введение.** Моделирование биомеханической системы среднего уха и механизма слуховой проводимости в нормальном и патологических состояниях относится к одной из основных задач медицинской биомеханики. Результаты такого моделирования позволяют прогнозировать особенности их функционирования, а также формулировать рекомендации при назначении лечения, по выполнению профилактических мероприятий и послеоперационной реабилитации пациентов. В настоящей работе представлены результаты определения собственных частот свободных колебаний среднего уха человека, подвергнутого тотальной тимпанопластике и оссиклопластике, с учетом подвижности подножной пластины стремени, оценки геометрических параметров хрящевых

трансплантатов тимпанальной мембраны, устанавливаемых после удаления ретракционного кармана, а также результаты моделирования аэрации полостей среднего уха при различных дисфункциях слуховой трубы.

**Свободные колебания среднего уха после тотальной тимпанопластики и оссикулопластики.** Математическая модель для определения частот свободных колебаний среднего уха после тимпанопластики учитывает изгибные колебания кольцевой пластинки, используемой для восстановления барабанной перепонки, плоскостные движения протеза, замещающего звено «молоточек — наковальня» и соединяющего реконструированную тимпанальную мембрану с подвижным основанием подножной пластины стремени. Соответствующая схема представлена на рис. 1.



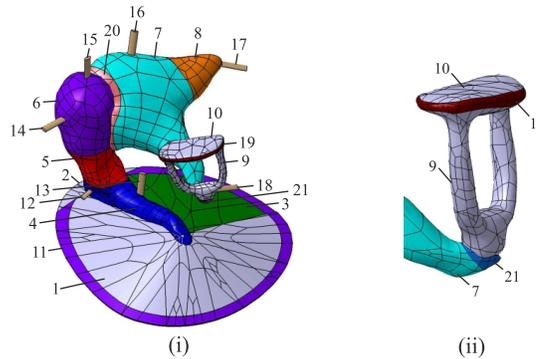
**Рис. 1.** Начальное и конечное положения пластинки и протеза после элементарного поворота на угол  $\Theta_p$  (i) и силы, действующие на подножную пластину стремени (ii):  $(Cxyz)$  — глобальная система координат;  $Cx'y'z'$  — локальная система координат;  $S(x_S, y_S, z_S)$  — точка закрепления конца стержня протеза на подножной пластине стремени;  $Cy'$  — один из узловых диаметров, вокруг которого протез совершает повороты;  $\psi$  — угол между осями  $Cy$  и  $Cy'$ ;  $S, S_\Theta$  и  $S'$  — начальное положение ствола протеза, его положение при повороте протеза на угол  $\Theta_p$  и его положение после поступательного перемещения вдоль оси  $Cz$  и поворота на угол  $S_\Theta$ ;  $F_x$  и  $F_z$  — реакции стержня протеза вдоль осей  $Cx'$  и  $Cz$ ;  $(x_{S'}, y_{S'}, z_{S'})$  — координаты точки  $S'$  в системе координат  $(Cx'y'z')$ ; 1 и 1', 2 и 2' и 3 и 3' — положения тимпанальной мембраны, основания протеза и подножной пластины стремени до и после поворота на угол  $\Theta_p$ ;  $S(\xi, \eta, \zeta)$  — локальная система координат, связанная с подножной пластиной стремени.

Здесь ось  $Cz$  перпендикулярна плоскости реконструированной тимпанальной мембраны и направлена в сторону внешнего слухового прохода. Предполагается, что протез является недеформируемым твердым телом. Формы собственных колебаний механической системы «тимпанальная мембрана–протез–подножная пластина стремени» классифицируются на основании возможных форм колебаний круглой кольцевой пластинки, моделирующей восстановленную тимпанальную мембрану с учетом жесткого срачивания пластинки с осно-

ванием протеза по его контуру. Из всех форм колебаний пластинки рассматриваются только те, которые сопровождаются образованием не более чем одного узлового (неподвижного) диаметра. Это обусловлено тем, что формы колебаний с образованием двух и более узловых диаметров на пластинке не стимулируют движение присоединенного протеза [1].

Установлено, что при увеличении модуля упругости трансплантата и жесткости связки овального окна собственные частоты свободных колебаний реконструированной системы среднего уха также возрастают. В то же время, изменение модуля упругости трансплантата оказывает более существенное влияние на изменение значений собственных частот, чем изменение жесткости овального окна.

**Оценка толщины хрящевое трансплантата.** Разработка твердотельных моделей тимпанальной мембраны, молоточка, наковальни и стремени выполнена на основании томографических данных с учетом того, что тимпанальная мембрана имеет слоистую структуру и неравную толщину областей *pars tensa* и *pars flaccida* [2]. Элементы модели представлены на рис. 2.

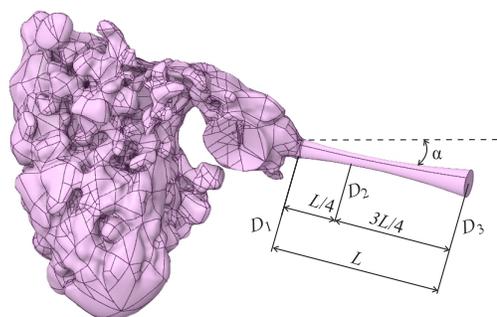


**Рис. 2.** Твердотельная модель среднего уха (i) и область наковальне-стремени сустава (ii): 1 — *pars tensa*; 2 — задневерхний квадрант; 3 — *pars flaccida*; 4, 5 и 6 — рукоятка, шейка и головка молоточка; 7 — тело наковальни; 8 и 9 — короткий и длинный отростки наковальни; 10 — стремя; 11 — основание подножной пластины стремени; 12 — тимпанальное кольцо; 13 — *tensor tympani*; 14, 15 и 16 — передняя, латеральная и верхняя молоточковые связки; 17 и 18 — передняя и задняя связки наковальни; 19 и 20 — сухожилие и кольцевая связка стремени; 21 и 22 — молоточковонаковальный и стремянаковальный суставы.

Толщина хрящевое трансплантата определяется из условия равенства частот свободных колебаний для соответствующих главных форм колебаний среднего уха в норме и среднего уха с установленным на задневерхний квадрант

хрящевым трансплантатом различной толщины. Установлено, что при хирургической операции по восстановлению целостности тимпанальной мембраны наиболее эффективно использовать хрящевой трансплантат толщиной около  $0,193 \pm 0,031$  мм.

**Моделирование аэрации полостей среднего уха.** Параметризованная модель среднего уха, соответствующая детям двух и двенадцати лет, включающая сосцевидный отросток, барабанную полость, колебательную систему среднего уха и слуховую трубу, представлена на рис. 3.



**Рис. 3.** Твёрдотельная модель среднего уха, параметризованная по углу  $\alpha$  наклона слуховой трубы и ее диаметрам на уровнях  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  ( $L$  — длина слуховой трубы).

Расчет распределения давления и линий тока воздуха в сосцевидном отростке, барабанной полости и слуховой трубе осуществлялся для случаев в норме, при патологии проходимости евстахиевой трубы, уменьшающей величины полуосей эллиптических поперечных сечений на трех различных уровнях трубы в два, три и десять раз, патологии сосцевидного отростка, приводящей к уменьшению площади его поверхности на 30% по отношению к площади поверхности в норме.

**Заключение.** Установленные закономерности изменения спектров частот свободных колебаний среднего уха после установки хрящевого трансплантата и протеза среднего уха, а также закономерности распределения давления в полостях среднего уха при дисфункции слуховой трубы и сосцевидного отростка позволяют планировать хирургические операции по улучшению слуховой проводимости.

Работа выполнена в рамках задания 1.7.1.4 ГПНИ «Конвергенция».

## Литература

- [1] Mikhasev G., Ermochenko S., Bornitz M. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis // *Math. Med. Biol.* 2010. Vol. 27. No. 4. P. 289–312.
- [2] Mikhasev G., Bosiakov S., Petrova L., Maisyuk M., Yurkevich K. Assessment of eigenfrequencies of the middle ear oscillating system: effect of the cartilage transplant // *Dyn. Sys. Mod.* 2016. Vol. 181. P. 243–255.

## Методы оптимального управления в проектировании траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками

*Петухов В.Г.*

*PetukhovVG@mai.ru*

НИИ прикладной механики и электродинамики МАИ,  
125080, Российская Федерация, Москва, Ленинградское шоссе, 5, а/я 43

**Аннотация.** Рассматриваются задачи оптимизации траекторий космических аппаратов с электроракетными двигателями. Приводится обоснование важности решения таких задач при проектировании перспективных космических миссий, описание многообразия возникающих задач, фундаментальных проблем, осложняющих процесс их решения и разработанных методов преодоления этих проблем. Приводятся численные результаты оптимизации межорбитальных, лунных и межпланетных траекторий.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, принцип максимума, оптимизация траекторий, космический аппарат, электроракетный двигатель.

Технический облик космических аппаратов (КА) во многом определяется результатами проектно-баллистического анализа, включающего выбор основных траекторных и проектных параметров КА и определение технических требований к его бортовым системам. Во многих космических миссиях выведение КА на целевые орбиты требует больших затрат характеристической скорости, что приводит к целесообразности использования электроракетных двигателей (ЭРД) с большим удельным импульсом тяги с целью сокращения затрат топлива на реализацию перелета. Современные ЭРД имеют скорость истечения в 5...20 раз больше, чем традиционные жидкостные ракетные двигатели. Соответственно, при одинаковых затратах массы, ЭРД может обеспечить приращение характеристической скорости в 5...20 раз больше, чем жидкостные ракетные двигатели. Однако тяга ЭРД пропорциональна располагаемой электрической мощности, поэтому реактивное ускорение, создаваемое ЭРД, очень невелико. В типичных случаях это реактивное ускорение составляет доли мм/с<sup>2</sup>, поэтому для набора, скажем, 1 км/с характеристиче-