

Н.С. Цаплина, Л.Л. Лямец

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЯ ХИ-КВАДРАТ

Научный руководитель: канд. техн. наук, доц. Л.Л. Лямец

Кафедра физики, математики и медицинской информатики

Смоленский государственный медицинский университет, г. Смоленск

N.S. Tsaplina, L.L. Lyamets

ALGORITHM FOR CALCULATING THE POWER OF CHI-SQUARED TEST

Tutor: PhD in technical sciences, associate professor L.L. Lyamets

Department of Physics, Mathematics and Medical Informatics

Smolensk State Medical University, Smolensk

Резюме. В статье описан алгоритм вычисления мощности критерия хи-квадрат. Разработанный алгоритм и предложенный способ автоматизации вычислений может представлять интерес для научных работников, использующих в своих исследованиях методы статистического анализа данных.

Ключевые слова: критерий хи-квадрат, мощность статистического критерия

Resume. The article describes an algorithm for calculating the power of the chi-square test. The developed algorithm and the proposed method for automating calculations may be of interest to researchers who use statistical data analysis methods in their work.

Keywords: chi-squared test, statistical criterion power

Актуальность. Критерий хи-квадрат (χ^2) – непараметрический критерий, который выявляет значимые различия между наблюдаемыми и ожидаемыми частотами в статистических распределениях. Обоснование статистических выводов связано с необходимостью вычисления мощности данного критерия [1]. В литературе для медицинских специальностей алгоритм вычисления мощности критерия χ^2 встречается редко, поэтому его разработка имеет учебно-методическое значение.

Цель: разработка алгоритма для вычисления мощности критерия χ^2 для таблиц сопряженности и автоматизация соответствующих вычислений при помощи современных информационных технологий.

Задачи:

1. Проанализировать математическую модель критерия хи-квадрат для таблиц сопряженности;
2. Рассмотреть понятие мощности статистического критерия, её роли в интерпретации выводов статистических исследований;
3. Сформулировать пошаговую последовательность вычислений мощности критерия хи-квадрат;
4. Предложить автоматизацию сложных вычислений с использованием статистических функций в языке программирования *Python*.

Материалы и методы. Анализируются два атрибутивных признака *A* и *B*. Признак *A* имеет *m* градаций, признак *B* – имеет *n* градаций. На первом этапе алгоритма формулируются статистические гипотезы. Нулевая гипотеза H_0 – признаки статистически не сопряжены; альтернативная гипотеза H_1 – признаки статистически сопряжены. На основании первичных данных строится таблица сопряженности признаков размером $m \times n$. Рассчитываются наблюдаемые (*O*) и

ожидаемые (E) частоты для каждой ячейки таблицы [2]. Статистика критерия χ_p^2 рассчитывается по следующей формуле:

$$\chi_p^2 = \sum_{i=1}^w \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Статистика критерия χ_p^2

В формуле 1 суммирование ведется по ячейкам таблицы, где $w = mn$. Статистика χ_p^2 также является параметром нецентрального распределения χ^2 .

На втором этапе алгоритма для распределения χ^2 с числом степеней свободы $k = (m - 1)(n - 1)$ вычисляется квантиль z уровня γ . Если $\gamma = 0,95$, то квантиль z вычисляется из следующего выражения:

$$\int_0^z f(x)dx = 0,95$$

Квантиль z уровня $\gamma = 0,95$

На третьем этапе алгоритма вычисляется мощность критерия $1 - \beta$ по формуле:

$$1 - \beta = \int_z^\infty f_{\text{нц}}(x)dx$$

Мощность критерия χ_p^2

В формуле 3 через $f_{\text{нц}}(x)$ обозначена функция плотности вероятности нецентрального распределения χ^2 с числом степеней свободы $k = (m - 1)(n - 1)$ и параметром нецентральности χ_p^2 . Через β обозначена вероятность ошибки второго рода.

Для автоматизации вычислений по формулам 1, 2 и 3 можно использовать возможности библиотеки *Statsmodels* языка программирования *Python*. Формула 3 может быть реализована импортированием из *statsmodels* объекта *stats.power* методом *solve_power()*:

$$1 - \beta = \text{GofChisquarePower().solve_power(effect_size, nobs, alpha, power)}$$

Мощность критерия χ_p^2 в языке программирования *Python*

В формуле 4 *nobs* – количество наблюдений, *alpha* – уровень значимости, *effect_size* – это разница между относительными показателями, рассчитывается автоматически, *power* – приемлемая теоретическая мощность критерия.

Пример: рассмотрим таблицу сопряженности 2×2 . В таблице 1 приведены наблюдаемые частоты, в таблице 2 – ожидаемые частоты.

Табл. 1. Наблюдаемые частоты ($O_i; 1 \leq i \leq w = 4$)

	B_1	B_2
A_1	$O_1 = 20$	$O_2 = 9$
A_2	$O_3 = 15$	$O_4 = 32$

Табл. 2. Ожидаемые частоты ($E_i; 1 \leq i \leq w = 4$)

	B_1	B_2
A_1	$E_1 = 13,3553$	$E_2 = 15,6447$
A_2	$E_3 = 21,6447$	$E_4 = 25,3553$

Подставив значение в формулу 1, получаем статистику критерия $\chi_p^2 = 9,9044$, который является параметром нецентрального распределения χ^2 с числом степеней свободы $k = (2 - 1)(2 - 1) = 1$. Вероятность p этого значения при истинной нулевой гипотезе равна 0,0016. Вычисленная по формуле 3 или 4 мощность равна 0,8826, вероятность ошибки второго рода $\beta = 0,1174$. Язык программирования *Python* позволяет строить графики центрального (график 1) и нецентрального распределения (график 2) χ^2 с выделением областей уровня значимости α и вероятности ошибки второго рода β .

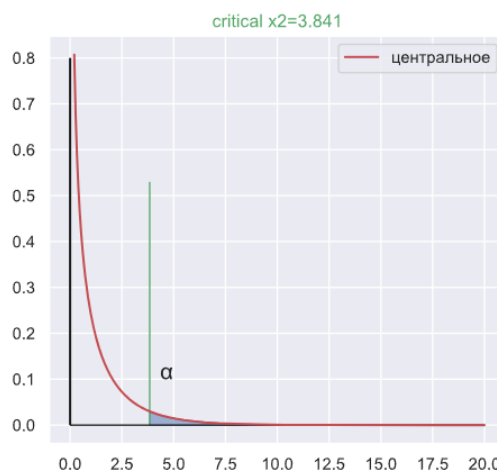


Рис. 1 – Центральное распределение χ^2

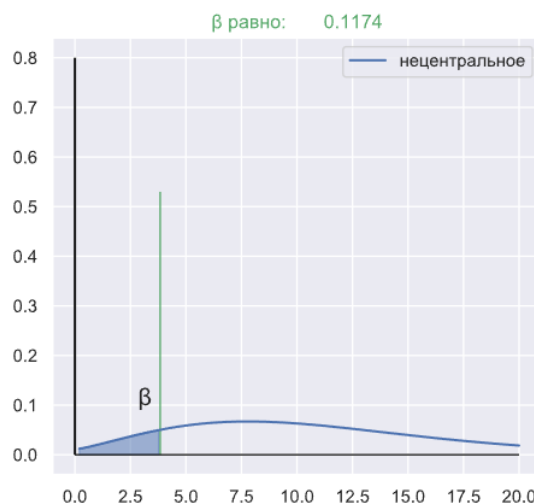


Рис. 2 – Нецентральное распределение χ^2

Результаты и их обсуждение. Разработан и описан алгоритм вычислений мощности критерия χ^2 для таблицы сопряженности. Для автоматизации вычислений разработана программа на языке программирования Python, которая прошла регистрацию в установленном порядке и получила свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025664887 [3]. В этой программе используются возможности библиотеки *Statsmodels* языка программирования *Python*.

На практике при проверке гипотезы H_0 между теоретическим уровнем значимости α и приемлемой ошибкой второго рода β используется соотношение $\beta = 4\alpha$. При этом приемлемая теоретическая мощность критерия равна $1 - 4\alpha$. Например, если $\alpha = 0.05$, то $1 - 4\alpha = 0.8$. Следовательно, решение об отклонении гипотезы H_0 можно считать состоятельным, если вычисленная по приведенному выше алгоритму мощность критерия χ^2 не меньше приемлемой теоретической мощности.

В приведенном примере $p < \alpha$, есть основание отклонить нулевую гипотезу H_0 и принять альтернативную гипотезу H_1 . Решение считается состоятельным, так как рассчитанная мощность $0,8826 > 0,8$.

Выводы. Разработанный алгоритм может использоваться в учебном процессе для объяснения сущности вычисления мощности критерия χ^2 и для анализа статистических данных в научных исследованиях.

Литература

1. Гланц С. Медико-биологическая статистика. Пер. с англ. – М.: Практика, 1998. – 459 с.
2. Медик В.А., Токмачев М.С., Фишман Б.Б. Статистика в медицине и биологии: Руководство. В 2-х томах / Под ред. Ю.М. Комарова. Т.1. Теоретическая статистика. – М.: Медицина, 2000. – 412 с.
3. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025664887 Российская Федерация. Программа для вычисления мощности критерия хи-квадрат для таблицы сопряженности 2x2 : заявл. 20.05.2025: опубл. 06.06.2025 / Л. Л. Лямец, Н. С. Цаплина, А. В. Евсеев, А. И. Данилов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Смоленский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации. – EDN KYCVTR.