Министерство здравоохранения Республики Беларусь
Минский государственный медицинский институт

Г.К.Ильич

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие для студентов медицинских ВУЗов

МИНСК, 1998 г.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1. Производная функции

Количественное описание сложных изменяющихся процессов жизнедеятельности с помощью элементарной математики невозможно, поскольку соответствующие математические величины, используемые для этой цели, должны сами обладать способностью к “движению” . Высшая математика, в отличие от элементарной, оперирует зависимостями и величинами, подверженными изменениям, происходящим по определенным законам. Величиной, определяющей темп изменения функциональных зависимостей в высшей математике, является **производная функции**. Для пояснения этого понятия рассмотрим рис.1, где графически представлена некоторая произвольная функциональная зависимость $y = f(x)$.

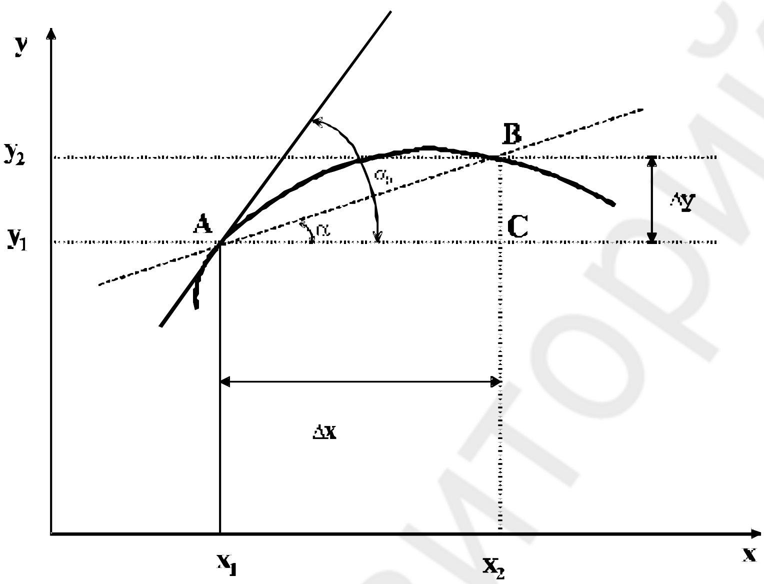


Рис.1

Отметим на графике некоторые значения аргумента x_1 и x_2 , разница между которыми есть **приращение** аргумента : $\Delta x = x_2 - x_1$. **Приращение функции**: $\Delta y = y_2 - y_1$.

Для непрерывных функций если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$. То, к чему при неограниченном убывании Δx стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, зависит от конкретного вида функции и характеризует темп ее изменения.

Производной функции в данной точке называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента при его неограниченном убывании. Обозначение производной функции одного аргумента: y' или $\frac{dy}{dx}$. Таким образом:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Производная функции имеет простой **геометрический смысл**. Из рис. 1 видно, что отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{BC}{AC} = tg\ \alpha\ ,$$

где α - угол наклона секущей AB к оси абсцисс. Если же Δx неограниченно убывает (x_2 стремится к x_1), то секущая вырождается в касательную к графику функции в точке A, имеющую угол наклона к оси абсцисс α_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha_0\ . \qquad (2)$$

Таким образом, **тангенс угла между касательной, проведенной к графику функции в данной точке, и осью абсцисс, числено равен значению производной функции в данной точке**. В этом и состоит геометрический смысл производной.

К **физическому смыслу производной** подойдем из рассмотрения механического движения. Если за время Δt тело проходит путь ΔS, то средняя за это время скорость движения:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Но на пути ΔS скорость может иметь различные мгновенные значения ($v_{\text{мгн}}$), которые определяются как предел отношения ΔS к Δt при $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{мгн.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}. \qquad (3)$$

Следовательно, **мгновенная скорость движения в данной точке представляет собой значение в данный момент времени производной от пути по времени.**

Итак, **производная имеет смысл скорости некоторого процесса**.

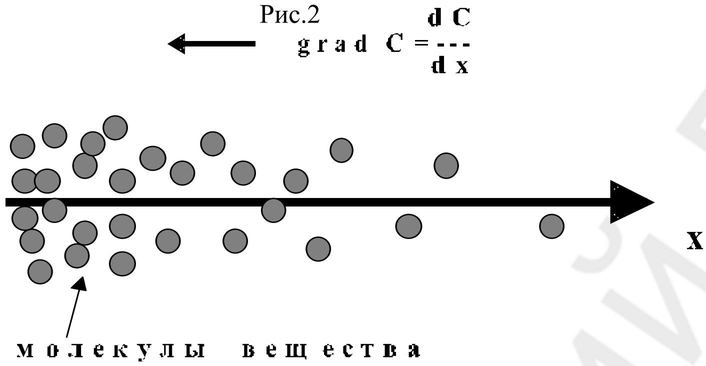
Если рассматривается ускорение (a) механического прямолинейного движения, то мгновенное ускорение представляет собой первую производную от скорости или вторую производную от пути:

$$a_{\text{мгн.}} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}. \qquad (4)$$

Таким образом, вторая производная имеет физический смысл ускорения.

Если некоторая величина y зависит от пространственной координаты x, то производная $\frac{dy}{dx}$ характеризует скорость пространственного изменения y. Упрощенно, производные по пространственной координате называют **градиентами.** Поясним смысл градиента. Представим, что некоторое вещество, аккумулируемое в биологической ткани, имеет неравномерное распределение концентрации C по глубине, характеризуемой координатой x (см.рис.2). Скорость изменения концентрации определяется производной $\frac{dC}{dx}$, или градиентом концентрации. Градиент некоторой величины направлен в сторону ее возрастания. Градиент концентрации является причиной и количественной мерой **диффузии**, заставляя молекулы вещества перемещаться в направлении, противоположном направлению градиента.

Рис.2



Перенос тепла в некотором направлении (теплообмен) осуществляется за счет наличия **градиента температуры;** движение заряженных частиц побуждается **градиентом потенциала** и т. п. Таким образом, градиенты являются одной из первопричин обменных процессов, происходящих в биологических системах.

В заключение этого раздела отметим, что правила и приемы дифференцирования, применение производных для исследования функций (нахождение экстремумов функций) изучались в курсе средней школы и читателям предлагается повторить их самостоятельно.

2. Дифференциал функции.

Дифференциал функции (dy) - это произведение производной функции на приращение (или дифференциал) аргумента:

$$dy = y' \Delta x = y' \, dx. \qquad (5)$$

Аналитический смысл дифференциала заключается в том, что дифференциал dy представляет собой главную часть приращения функции. При малых приращениях можно считать $dy \approx \Delta y$.

Из смысла дифференциала следует его важное практическое значение: нахождение дифференциала функции позволяет определить, насколько изменилась функция, если произошли небольшие изменения переменной, от которой она зависит.

Пример. Имеется куб с длиной ребра $l=1м$. На какую величину ΔV изменится объем куба, если длина ребра увеличилась на $\Delta l=1см$?

Эту задачу можно, конечно, решить и методами элементарной математики:

$$\Delta V= (l+\Delta l)^{3} - l^{3}.$$

Однако, даже в этом элементарном примере необходимо выполнять довольно значительные вычисления.

Учитывая, что приращение объема куба (функции) при малых изменениях длины его ребра (аргумента) примерно равно дифференциалу объема, получим:

$$\Delta V \approx dV =(l^3)' \cdot \Delta l = 3l^2\Delta l = 3 \cdot 1 \cdot 0,01=0,03м^3.$$

3. Частные производные

Понятие производной было введено для функции одной переменной. Но чаще возникает необходимость количественного описания процессов, которые зависят от целого ряда параметров. Обозначим, например, состояние организма как некоторую функцию U. Очевидно, что она зависит от целого ряда параметров: $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$. Здесь x_1 может означать температуру тела, x_2 - систолическое давление, x_3 - содержание гемоглобина в крови и т.д. Задача выбора информативных и доступных измерению параметров и, особенно, установления характера функциональной зависимости $U(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ весьма сложна. Однако, совершенно очевидно, что математический аппарат для описания процессов жизнедеятельности должен базироваться на применении и исследовании функций многих переменных. Каким образом в этом случае трансформируется понятие производной функции? Для этого вводится понятие частной производной.

Частная производная характеризует скорость изменения функции по одной из независимых переменных, в то время как остальные переменные считаются неизменяющимися.

Частная производная от функции $U(x,y)$ по переменной x:

$$\frac{\partial\ (x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} \qquad (6)$$

представляет предел дроби. В числителе этой дроби стоит разность значений функции U при “наращенном” $(x + \Delta x)$ и прежнем (x) значениях аргумента. В знаменателе же - значение приращения $\Delta x \to 0$.

Аналогично, частная производная функции *U (x,y)* по переменной *y*:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{U(x, y + \Delta y) - U(x, y)}{\Delta y}. \qquad (7)$$

Нахождение частных производных (дифференцирование функций многих переменных), не представляет особых сложностей.

Пример. Найти частные производные функции $U = x^3 \sin y$.

Находя частную производную от функции U по x, переменную y считаем зафиксированной, т.е. обращается со множителем $\sin y$ как с постоянной величиной:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 \sin y.$$

Аналогично, при прохождении частной производной по y постоянным считаем множитель x^3 и находим производную от $\sin y$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^3 \cos y.$$

<u>4. Частные дифференциалы и полный дифференциал</u>

Возьмем, для упрощения, функцию двух переменных: *U(x,y)*. Частным дифференциалом по x (обозначение $d_x U$) называют произведение ее частной производной по x на дифференциал аргумента dx: $d_x U = \frac{\partial U}{\partial x} dx$. Второй частный дифференциал: $d_y U = \frac{\partial U}{\partial y} dy$.

Частные дифференциалы позволяют оценивать, насколько изменится значение функции, если изменится на небольшую величину один из соответствующих ее аргументов.

Сумма всех частных дифференциалов называется полным дифференциалом. Для функции *U(x,y)* ее полный дифференциал *(dU)* равен:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \ . \qquad (8)$$

Нахождение полного дифференциала позволяет оценить, насколько изменится значение функции при изменении всех переменных, от которых она зависит.

Пример. Несколько усложним уже рассматривавшуюся задачу по нахождению изменения объема куба при увеличении длины его ребра. Возьмем параллелепипед с длинами ребер: $l_1=1м$, $l_2=2м$, $l_3=3м$. Пусть первые два ребра увеличились на: $\Delta l_1=0{,}01м$, и $\Delta l_2=0{,}02\ м$; а третье ребро уменьшилось на: $\Delta l_3= -0{,}01м$. На какую величину ΔV изменится объем V параллелепипеда?

Решение этой задачи может быть выполнено и без применения аппарата высшей математики:

$$\Delta V=(l_1+\Delta l_1)\ (l_2+\Delta l_2)\ (l_3+\Delta l_3) - l_1 \cdot l_2 \cdot l_3.$$

Однако, использование полного дифференциала позволяет существенно упростить решение и вычисление сделать минимальными. Поскольку изменения длин ребер не велики по сравнению с их первоначальными значениями, будем считать, что искомое приращение ΔV объема V (функции трех переменных - длин ребер) примерно равно полному дифференциалу dV:

$$\Delta V \approx dV = d(l_1 l_2 l_3) = \frac{\partial V}{\partial l_1}\Delta l_1 + \frac{\partial V}{\partial l_2}\Delta l_2 + \frac{\partial V}{\partial l_3}\Delta l_3 .$$

Найдя частные производные и подставив численные значения, получим:

$$dV= l_2 \cdot l_3 \cdot \Delta l_1+ l_1 \cdot l_3 \cdot \Delta l_2 +l_1 \cdot \Delta l_3= 2 \cdot 3 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 3 \cdot 0{,}02- 1 \cdot 2 \cdot 0{,}01 =0{,}1^3.$$

Теперь рассмотрим **более сложный пример**, **иллюстрирующий применение частных производных для рассмотрения задач фармакологии**.

Упрощенно, будем считать, что реакция организма на введенный лекарственный препарат зависит от величины его дозы x и времени t, прошедшем после введения. То есть, реакцию организма будем характеризовать некоторой функцией $R(x,t)$. Допустим, далее, что эта функция имеет вид:

$$R(x,t) = x^2\ (a-x)\ t^2\ e^{-t}. \qquad (9)$$

Здесь a - некоторый постоянный коэффициент, который считается известным. Отметим, что уравнения, реально используемые для математического описания фармакокинетики, имеют существенно более сложный вид. Входящие в них аргументы и постоянные коэффициенты учитывают не только величину дозы и время, но и возраст пациента, его конституционные особенности, тип нервной деятельности и др.

Тем не менее, на упрощенном примере, когда реакция организма задается уравнением (9), покажем, что использование частных производных позволяет ответить на практически важные вопросы: 1) **при какой дозе *x* реакция организма окажется максимальной?** и 2) **когда она наступит?**

Математически, задача сводится к нахождению экстремумов функции (9). Для нахождения максимальной дозы (максимума по x) необходимо найти частную производную $\frac{\partial R}{\partial x}$, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = (2ax - 3x^2)t^2 e^{-t} = 0. \qquad (10)$$

Уравнение (10) имеет два корня : $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2a}{3}$.

Первый из них соответствует минимуму реакции организма (если доза равна нулю - ничего не вводили), а второй - максимуму. В справедливости этого утверждения легко убедиться и чисто математически, используя правила различения максимума и минимума при исследовании функций на экстремум.

Таким образом, зная коэффициент a, определим дозу лекарства, обеспечивающую максимальную реакцию: $x = \frac{2a}{3}$.

Для нахождения время наступления этой максимальной реакции найдем частную производную $\frac{\partial R}{\partial t}$ и опять же решим соответствующее уравнение относительно t:

$$\frac{\partial R}{\partial t} = (2x - 3x^2)\, 2\, t\, e^{-t} - (2ax - 3x^2)\, t^2 e^{-t} = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) имеет корни $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. По смыслу задачи и из математического анализа, следует, что первый корень ($t_1 = 0$) соответствует минимуму реакции, а второй - максимуму. Если, например, в уравнении (9) время определялось в часах, то максимальная реакция наступит через 2 часа.

5.Первообразная функция и неопределенный интеграл

В элементарной математике сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня - примеры **взаимообратных** математических операций. Последовательно примененные к одному и тому же числу эти операции самого числа не изменяют.

$$(a + b - b = a, \quad \frac{a\,b}{b} = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a).$$

Взаимообратные операции существуют и в высшей математике. Дифференцирование (нахождение производной) позволяет по некоторой заданной функции найти скорость ее изменения. Операцией, обратной дифференцированию, является интегрирование - нахождение самой функции (первообразной) по заданной скорости ее изменения.

Функция $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$, если для всех x из области определения функции $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)\,dx$.

Иными словами, первообразная функция - это такая, производной от которой является заданная.

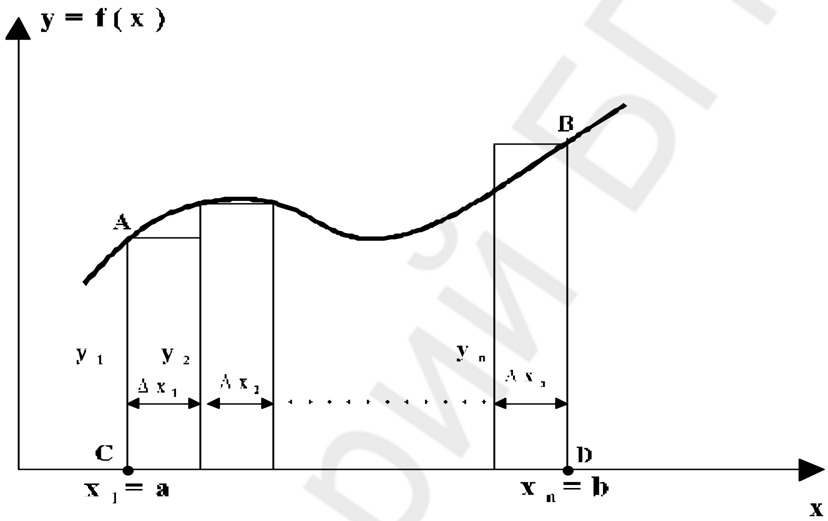
Например, задана функция $f(x) = 2x$. Ее первообразной будет $F(x) = x^2$, так как $F'(x) = f(x) = 2x$. Однако, $F(x) = x^2 + C$, где C - произвольная постоянная , так же будет первообразной для $f(x) = 2x$, поскольку $(x^2 + C)' = 2x$.

Совокупность всех первообразных функций для заданной функции $f(x)$ называют неопределенным интегралом и обозначают : $\int f(x)dx = F(x) + C$.

6.Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла подойдем из рассмотрения геометрической задачи.

Допустим, что некоторая функция задана в виде графика (см. рис.3). Поставим задачу: вычислить площадь криволинейной трапеции S_{ABCD}, которая образована графиком функции, осью абсцисс и ординатами, восстановленными из точек $x_1 = a$ и $x_n = b$,



Р и с .3

Приближенно, значение искомой площади можно найти, разбив криволинейную трапецию на отдельные прямоугольники и сложив их площади. Основанием этих прямоугольников служат малые интервалы Δx_1, Δx_2 ,...., Δx_n, а высотами - ординаты y_1, y_2, y_3 , ... , y_n. Если основания Δx_i малы, то:

$$S_{ABCD} \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x \quad . \qquad (12)$$

Соотношение (12) выполняется тем точнее, чем меньше основания прямоугольников Δx_i. Точное же значение искомой площади будет найдено при предельном переходе:

$$S_{ABCD} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = \int_a^b y dx \quad . \qquad (13)$$

Сумма, всех произведений y_i Δx_i, стоящая под знаком предела, называется **интегральной суммой**, а ее предел - определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на участке

$[a,b]$. Значения a и b называют, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Из проведенного рассмотрения геометрической задачи следует:

1) Определенный интеграл имеет **геометрический смысл** площади фигуры, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и ординатами, восстановленными из значений аргумента в пределах интегрирования.

2) Саму операцию интегрирования можно описать как сложение бесконечного большого количества бесконечно малых величин. Действительно, в формуле (2) при стремлении $\Delta x_i \to 0$ каждое слагаемое $y_i \Delta x_i \to 0$ (т.е. является бесконечно малой величиной - каждый отдельный прямоугольник стремится выродиться в линию), но число этих слагаемых стремится к бесконечности.

Вычисление определенного интеграла производится с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{14}$$

То есть, для нахождения определенного интеграла необходимо найти для подинтегральной функции $f(x)$ первообразную $F(x)$ и взять разность значений этой функции на верхнем и нижнем пределах интегрирования.

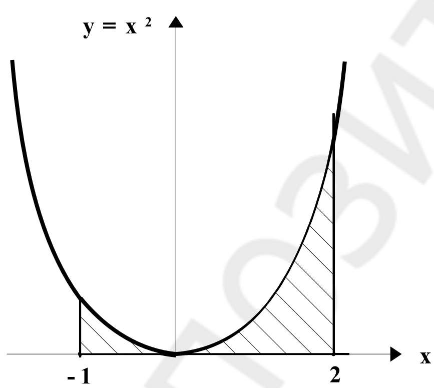


Рис.4

Пример 1. Возьмем параболу $y = x^2$ и поставим задачу: вычислить площадь S фигуры, образованной графиком параболы, осью x и ординатами, восстановленными из значений $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. На рис.4 эта искомая площадь заштрихована.

Задача сводится к нахождению определенного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{3} = 3.$$

Пример 2. Скорость движения тела $v = 3t^2 - 2t$ (м/с). Какой путь S пройдет тело за 5 с от начала движения? Решение сводится к нахождению определенного интеграла:

$$S = \int_0^5 (3t^2 - 2t)dt = (t^3 - t^2)\Big|_0^5 = 125 - 25 - (0 - 0) = 100 \text{ м}.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальное уравнение, его порядок и его решение

Дифференциальным называют уравнением, связывающее аргумент x, искомую функцию y и ее производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ различных порядков. В общем виде дифференциальное уравнение можно записать:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок дифференциального уравнения определяется наивысшим порядком входящей в него производной.

Примером дифференциального уравнения является второй закон Ньютона, определяющей силу F как произведение массы тела m на приобретенное под действием силы ускорение a : $F = ma$.

Учитывая, что ускорение есть первая производная от скорости v, запишем второй закон Ньютона в виде дифференциального уравнения первого порядка:

$$F = m\frac{dv}{dt}. \tag{15}$$

Или, поскольку ускорение является второй производной от пути S этот закон может представлен в виде дифференциального уравнения второго порядка:

$$F = m\frac{d^2S}{dt^2}. \tag{16}$$

Если известен конкретный характер действующей силы ,то, решая уравнение (16), установим вид движения. Найдем, как для данного случая путь зависит от времени: $S = f(t)$.

Решением дифференциального уравнения является такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Пример. Решить уравнение:

$$y' - x = 0 \tag{17}$$

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx} = x \quad \Rightarrow \quad dy = x\ dx. \tag{18}$$

В уравнении (18) выполнено разделение переменных, состоящее в том, что искомая функция и ее дифференциал выносятся в одну часть уравнения, а аргумент и его дифференциал - в другую.

Для получения решения необходимо в уравнении (18) избавиться от дифференциалов, - поэтому произведем интегрирование его левой и правой части:

$$\int dy = \int x dx \quad \Rightarrow \; y + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_2. \tag{19}$$

При нахождении неопределенных интегралов появляются произвольные постоянные C_1 и C_2 . Их следует объединить в одну постоянную C. Окончательно:

$$y = \frac{x^2}{2} + C. \tag{20}$$

Формула (20) есть общее решение дифференциального уравнения (17), содержащее столько производных постоянных, каков порядок дифференциального уравнения.

Легко доказать, что функция (20) действительно решение уравнения (17), поскольку ее подстановка в уравнении (17) обращает последнее в тождество.

Произвольная постоянная C может быть определена, если наряду с исходным дифференциальным уравнением заданы некоторые добавочные сведения - их называют **начальными условиями.** Например: при $x = 0 \quad y = 1$. Это начальное условия при подстановке его в общее решения (20) позволяет найти постоянную C :

$$1 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Тогда из общего решения (20) для данного начального условия получим частное решение уравнения (17), не содержащее произвольной постоянной:

$$y = \frac{x^2}{2} + 1. \tag{21}$$

2. Этапы решения задач при использовании дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения - математический аппарат, который позволяет решать не только чисто математические или физические задачи, но и количественно описывать самые разнообразные процессы (медико-биологические, социальные и др.). Несмотря на разнообразие рассматриваемых явлений, использование аппарата дифференциальных уравнений для их исследования должно происходить в определенной общей логической последовательности.

2.1. Составление дифференциального уравнения. Этот этап наиболее сложный и ответственный. Здесь необходимо учесть все факторы, которые влияют на течение исследуемого процесса, возможно, сделать некоторые допущения, определить начальные условия. При этом исследователь должен основываться на твердо установленных экспериментальных фактах или логических посылках. Например, при создании математических моделей работы сердца их практическая полезность (получение новых сведений, позволяющих улучшить диагностику сердечно-сосудистых заболеваний и повысить эффективность их лечения) определится полнотой и корректностью математического учета физиологических данных и клинической практики.

2.2. Решение уравнения. Этот этап может считаться более простым, чем первый, поскольку он предполагает выполнение чисто математических операций. Если невозможно получить решение дифференциального уравнения в аналитическом виде, то оно может быть решено расчетным путем с применением современной вычислительной техники.

2.3. Оценка и анализ результата. Получив решение дифференциального уравнения (или системы уравнений), необходимо оценить, какова теоретическая и практическая полезность полученных результатов - установлены ли новые закономерности в протекании, например, физиологических процессов; определено ли количественно влияние выбранных факторов на ,например, степень развития и характер патологии и т.п.

Кроме того, следует сопоставить полученные результаты с имеющимися установленными фактами. Если из математического описания физиологического процесса следуют неожиданные и неизвестные ранее сведения, то это может означать: 1) действительно установлено новое явление, которое впоследствии может быть подтверждено экспериментальными исследованиями; 2) полученный результат возник из-за того, что на этапе составления дифференциального уравнения не учтены все необходимые факторы или сделаны слишком грубые допущения.

3. Примеры использования дифференциальных уравнений

В соответствии с обозначенными в пункте **2** этапами, применим аппарат дифференциальных уравнений для рассмотрения некоторых задач.

3.1. **Поставим задачу: каков характер движения тела (зависимость пути *S* от времени *t*), если сила *F* на тело не действует?**

Дифференциальное уравнение, описывающее поведение тела в этом случае, представляют собой второй закон Ньютона:

$$m\frac{dv}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad v = const.$$

Считая, что масса $m \neq 0$, получим что в этом случае ускорение равно нулю и движение происходит с постоянной скоростью *v.* Для установления зависимости *S=f(t)* имеем уравнение:

$$\frac{dS}{dt} = v \Rightarrow dS = v \cdot dt \Rightarrow \int dS = v\int dt. \qquad (22)$$

В результате интегрирования получим:

$$S = vt + C, \Rightarrow \boxed{S = vt + S_0}, \qquad (23)$$

где C - произвольная постоянная, которая имеет смысл пути, пройденному к начальному моменту времени, и может определена из начального условия: при $t = 0$ $S = S_0$.

Решение (23) представляет собой уравнение равномерного прямолинейного движения. Таким образом, если на тело не действует сила ($F = 0$) , то тело сохраняет состояние покоя (частный случай, в формуле (23) $v = 0$), или равномерного прямолинейного движения. Используя аппарат дифференциальных уравнений, из второго закона Ньютона получаем его первый закон.

3.2. Рассмотрим микробиологическую задачу. Установим закон изменения со временем *(t)* численности бактерий (*n*), помещенных в питательную среду.

Для **составления** дифференциального уравнения, отражающего существование бактерий в этих условиях, необходим некоторый факт, который следует записать в математической форме. На основании экспериментальных данных и общих соображений таким фактом может служить утверждение: "скорость размножения бактерий (математически $\frac{dn}{dt}$) пропорциональна их числу (n) в данный момент времени".

Таким образом, необходимое дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{dn}{dt} = \kappa n, \qquad (24)$$

где κ - доступный экспериментальному определения коэффициент пропорциональности, зависящий от вида бактерий и параметров среды их обитания. Дополнительные данные, необходимые для решения задачи следуют из начального условия: при $t = 0$, $n = n_0$, т.е. в начальный момент времени количество бактерий считается известным и равным n_0 .

Для **решения** уравнения (24) произведем разделение переменных и последующее интегрирование:

$$\int \frac{dn}{n} = \kappa \int dt \quad \Rightarrow \quad \ln n = \kappa t + \ln C. \qquad (25)$$

Произвольную постоянную в уравнении (25) удобно представить в виде $\ln C$. Из начального условия: $C = n_0$.

Решая логарифмическое уравнение (25) с учетом начального условия, получим искомый закон изменения числа бактерий со временем:

$$\boxed{n = n_0 e^{\kappa t}} \quad . \qquad (26)$$

Произведем некоторый **анализ** результата. В чем его сиюминутная практическая полезность и возможные более отдаленные выводы?

1) Зная коэффициент κ и начальное число бактерий n_0, легко определить их число в любой момент времени t.

2) Прирост бактериальной массы определяется через коэффициент κ условиями среды обитания бактерий. Чем больше значение κ, тем быстрее увеличивается число бактерий

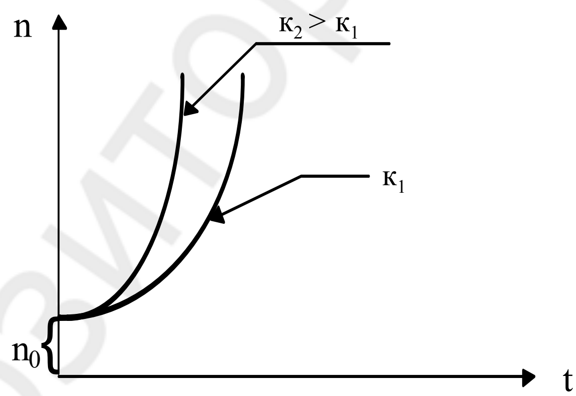


Рис.5

(см.рис.5). Если существуют факторы, препятствующие размножению бактерий (повышенная температура, ионизирующие излучения и др.), то коэффициент κ в формулах (24) - (26) уменьшается и может принять отрицательное значение - в этом случае будет наблюдаться гибель бактерий.

3) С некоторым риском можно попытаться придать полученному для бактерий результату (26) большую общность и сформулировать утверждение: “любой биологический вид, находясь в оптимальных для своего существования условиях, экспоненциально увели-

чивает свою численность со временем". Так, кролики, завезенные в Австралию, где практически нет хищников, которые бы ими питались, увеличили свое число в соответствии с формулой (26) и стали представлять серьезную опасность для сельского хозяйства.

3.3. Установим закон радиоактивного распада ядер атомов.

Для **составления** исходного дифференциального уравнения обозначим N число нераспавшихся ядер атомов в данный момент времени t, N_0 — число нераспавшихся ядер в начальный момент времени ($t = 0$). В процессе радиоактивного распада число N убывает. Обозначим через dN убыль нераспавшихся ядер за малый промежуток времени dt. Эта убыль, естественно, пропорциональна промежутку времени dt и числу нераспавшихся ядер N:

$$dN = -\lambda N\, dt, \tag{27}$$

где λ - постоянная радиоактивного распада. Знак "минус" в формуле (27) отражает тот факт, что число нераспавшихся ядер со временем уменьшается.

Решая уравнение (27) методом разделения переменных с учетом начального условия (при $t = 0$ $N = N_0$) получим закон радиоактивного распада:

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} \quad . \tag{28}$$

Уравнение (28) описывает убывание количества нераспавшихся ядер за счет радиоактивного распада.

Допустим теперь, что некоторое количество радионуклидов **одномоментно поступило в организм**. Убыль (dN) нераспавшихся радиоактивных ядер в организме будет определятся двумя процессами: 1) физическим распадом ядер и 2) биологическим выведением радиоактивных веществ из организма. Дифференциальное уравнение, отражающее эти два процесса , будет иметь вид:

$$dN = -(\lambda+\lambda_в) N\, dt, \tag{29}$$

где $\lambda_в$ - постоянная биологического выведения.

Решение уравнения (29) представляет закон исчезновения радионуклидов из организма при указанных условиях и имеет вид:

$$\boxed{N = N_0\, e^{-(\lambda+\lambda в)t}} \quad . \tag{30}$$

3.4. Рассмотрим внутривенное введение некоторого лекарственного вещества через капельницу. Будем считать, что оно вводится в кровь с постоянной скоростью v (г/мин.), а выводится из крови со скоростью, пропорциональной ее количеству m, содержащемуся в крови на данный момент времени t . Поставим задачу: найти закон, определяющий зависимость количества лекарственного вещества в крови от времени, т.е. $m = f(t)$. Задача сводится к нахождению вида функции $m = f(t)$.

Изменение содержания лекарства в крови (dm) за малое время (dt) определяется его приростом за счет введения ($v\,dt$) и уменьшением за счет выведения ($\kappa\, m\, dt$). Постоянный коэффициент κ характеризует интенсивность процесса утилизации .

Таким образом, необходимое для решения задачи дифференциальное уравнение имеет вид:

$$dm = v\,dt - \kappa\, m\, dt. \qquad (31)$$

Начальное условие можно записать: при $t = 0$ $m = m_0$, где m_0 - имеющаяся в крови масса вещества до начала введения.

Для решения уравнения (31) необходимо произвести разделение переменных и последующее интегрирование:

$$\int \frac{dm}{v - \kappa\, m} = \int dt\ . \qquad (32)$$

При нахождении интеграла в левой части выполним замену переменных, обозначив $v - \kappa m = u$:

$$\int \frac{dm}{v - \kappa m} = \left| \begin{matrix} v - \kappa m = u \\ -\kappa dm = du \\ dm = -\dfrac{du}{\kappa} \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\kappa}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{\kappa}\ln u + C_1 = -\frac{1}{\kappa}\left[\ln(v - \kappa\, m)\right] + C_1. \qquad (33)$$

Интеграл в правой части:

$$\int dt = t + C_2. \qquad (34)$$

Приравняв левую и правую часть и объединяя постоянные, получим:

$$\ln(\,v - \kappa m\,) = -\,\kappa t + C. \qquad (35)$$

Начальное условие дает возможность определить постоянную C:

$$C = \ln (v - \kappa m_0). \qquad (36)$$

С учетом формулы (36) для решения задачи, получим логарифмическое уравнение: $\ln (v - \kappa m) = - \kappa t + \ln(v - \kappa m_0)$. (37)

Потенцирование выражения (37) приводит к результату:

$$\frac{v - \kappa m}{v - \kappa\ m_0} = e^{-\kappa\ t}. \qquad (38)$$

После элементарных математических преобразований получим искомую зависимость содержания глюкозы в крови от времени:

$$\boxed{m = \frac{v}{\kappa} + \left(m_0 - \frac{v}{\kappa}\right)\ e^{-\kappa\ t}}\ . \qquad (39)$$

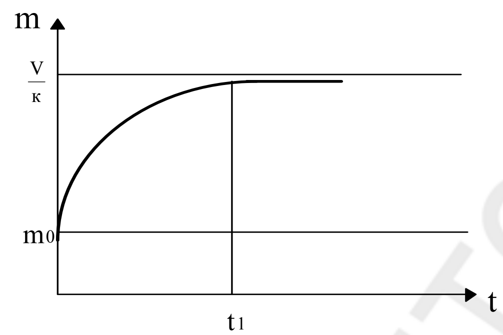


Рис.6

Графически эта зависимость показана на рис.6. Из закона (39) и рис.6 следует, что при длительном введении вещества ($t \to \infty$) его содержание в крови все равно не превысит некоторого максимального уровня $m_{\max} = \frac{v}{\kappa}$, поскольку при $t \to \infty$ второе слагаемое формулы (39) обращается в нуль. Из рис.6 следует, что введение следует прекращать в момент времени t_1, поскольку после этого наступает, практически, эффект насыщения. Отмеченный на графике уровень m_0 соответствует содержанию вещества в крови до начала введения.

Рассмотренные примеры касались количественного описания с помощью дифференциальных уравнений сравнительно простых явлений. Естественно, что рассмотрение более сложных задач требует и более сложного математического аппарата. Однако, использование математических методов для анализа процессов жизнедеятельности, изучения внешних воздействий на организм, разработки методов диагностики и лечения, - совершенно необходимо для понимания сущности этих явлений и имеет несомненную практическую значимость.

Контрольное задание

1. Зарегистрирована в виде кривой зависимость объема кровенаполнения ткани от времени. Какой физиологический смысл имеет производная этой зависимости?
2. Путь S в метрах, проходимый точкой при прямолинейном движении изменяется со временем t в секундах по закону: $S(t) = 4(e^{t/2} - 1)$. Вычислить скорость и ускорение точки через *2 с* после начала движения.
3. График функции имеет вид трапеции. Построить график производной этой функции.
4. Концентрация некоторого вещества (C) убывает с увеличением толщины ткани (h) по закону $C = C_0 e^{-kh}$, где k- постоянный коэффициент, C_0 - концентрация на поверхности. Найти градиент концентрации.
5. Количество теплоты (Q), теряемое телом человека при испускании им инфракрасных лучей , пропорционально четвертой степени температуры (T): $Q = aT^4$, где a- постоянная. На сколько процентов увеличилась температура тела, если выделяемое в этом случае количество теплоты возросло на *8%* ?
6. При лечении некоторого заболевания одновременно назначаются два препарата. Реакция организма (например, понижение температуры) на дозу x первого препарата и дозу y второго препарата описывается зависимостью: $R(x_1y)= x^2 y^2 (a - x)(b - y)$, где a и b- постоянные. Определить дозу y второго препарата, которая вызовет максимальную реакцию при фиксированной дозе x первого препарата.
7.На сколько процентов изменится электрическая мощность, выделяемая на некоторой нагрузке, если сила тока увеличится на *1%* , а сопротивление уменьшится на *3%* ?
8. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y = \cos x$ и осью x в пределах от 0 до $\pi/2$.
9. Установить закон поглощения света в веществе, т.е. получить зависимость интенсивности света I , прошедшего через слой вещества, от толщины этого слоя x. Считать, что убыль световой энергии в тонком слое вещества пропорциональна толщине этого слоя и интенсивности света на него упавшего. На верхней границе слоя интенсивность света считать известной и равной I_0.
10. Бактерии, помещенные в питательную среду, размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству на данный момент времени. Действие рентгеновского излучения вызывает их гибель со скоростью, пропорциональной квадрату их количества на данный момент времени. Составить дифференциальное уравнение, необходимое для решения задачи об установлении зависимости от времени t числа бактерий n, находящихся в питательной среде и под действием излучения.
11. Скорость роста популяции насекомых v зависит от времени t (в днях) по закону: $v = 2(t + t^2)$. Определить численность популяции через 3 дня, если в начальный момент число особей в популяции равно 100.
12. Если первоначальное количество фермента равно 1 *г*, а через 1*час* становится равным 1,2 *г*, то чему оно будет равно через 5 *час* после начала брожения? Скорость прироста фермента считать пропорциональной его полному количеству на данный момент времени.

Литература:

1.Лобоцкая Н.Л., Морозов Ю.В., Дунаев А.А. Высшая математика, 1987.

2. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов, 1983.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Рецензент - доцент кафедры физики Белорусского государственного технологического университета С.И.Лобко

Ильич Г.К. Элементы высшей математики

Учебное пособие для студентов медицинских ВУЗов. Минск, 1998 г. - 21 с.

Издание пособия обусловлено тем, что имеющаяся по этому разделу учебная литература сложна и весьма объемна для усвоения студентами медицинских специальностей.

В соответствии с требованиями программы по медицинской и биологической физике с основами высшей математики в пособии отражен учебный материал, направленный на ознакомление студентов-медиков с основными понятиями диффернциального и интегрального исчисления и простейшими дифференциальными уравнениями. На конкретных примерах (простейшие модели фармакокинетики, микробиологические задачи) и в контрольных заданиях показано, как аппарат высшей математики используется для описания медико-биологических процессов.

Предназначено для студентов 1-го курсов медицинских ВУЗов.

Утверждено ЦМК МГМИ

Учебное издание

Ильич Генрих Казимирович

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
по медицинской и биологической физике
для студентов медицинских ВУЗов

Ответственный за выпуск профессор С.Д. Денисов

Подписано в печать . Формат 60x84/16. Бумага писчая.

Уч.-изд. л. Уч. печ. л. Заказ Тираж экз.

Отпечатано в МГМИ г. Минск, ул. Ленинградская, 6